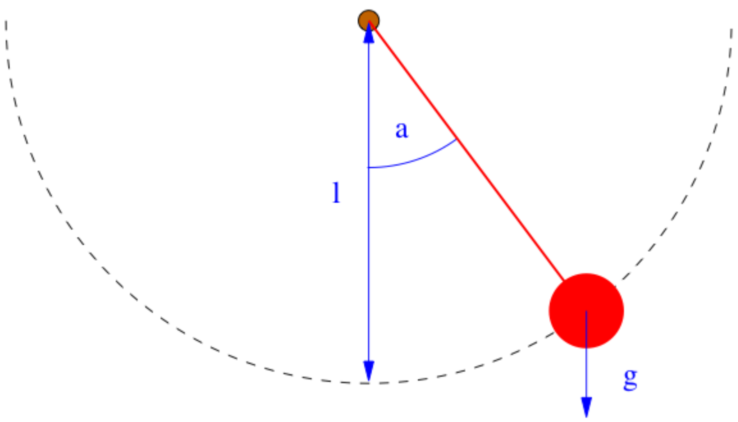
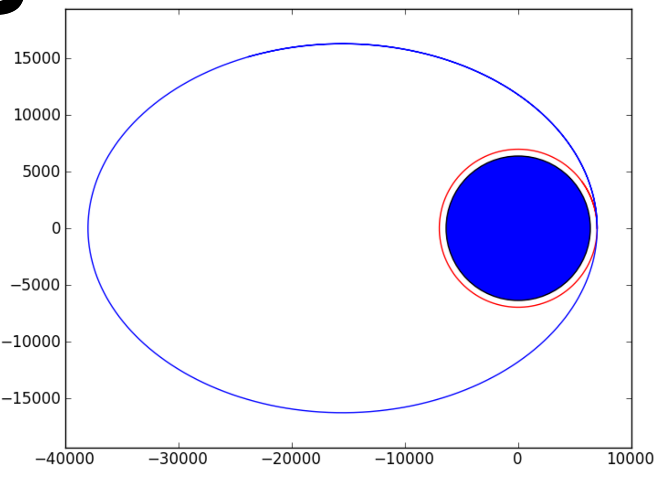
ETHZ Studienwoche 2017

Differentialgleichungen
oder
wie beschreibt man
Veränderung





Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

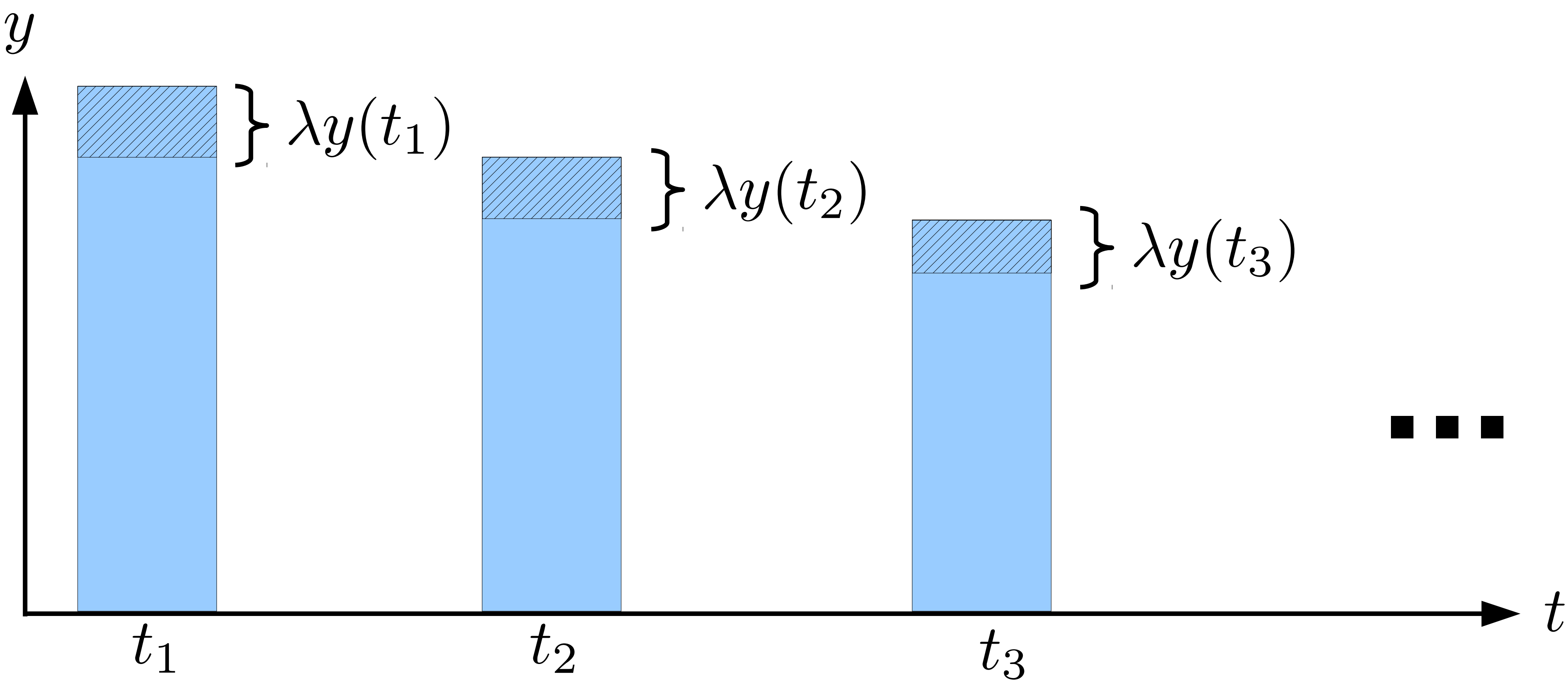
$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

y **Anzahl Atomkerne/Stoffmenge**

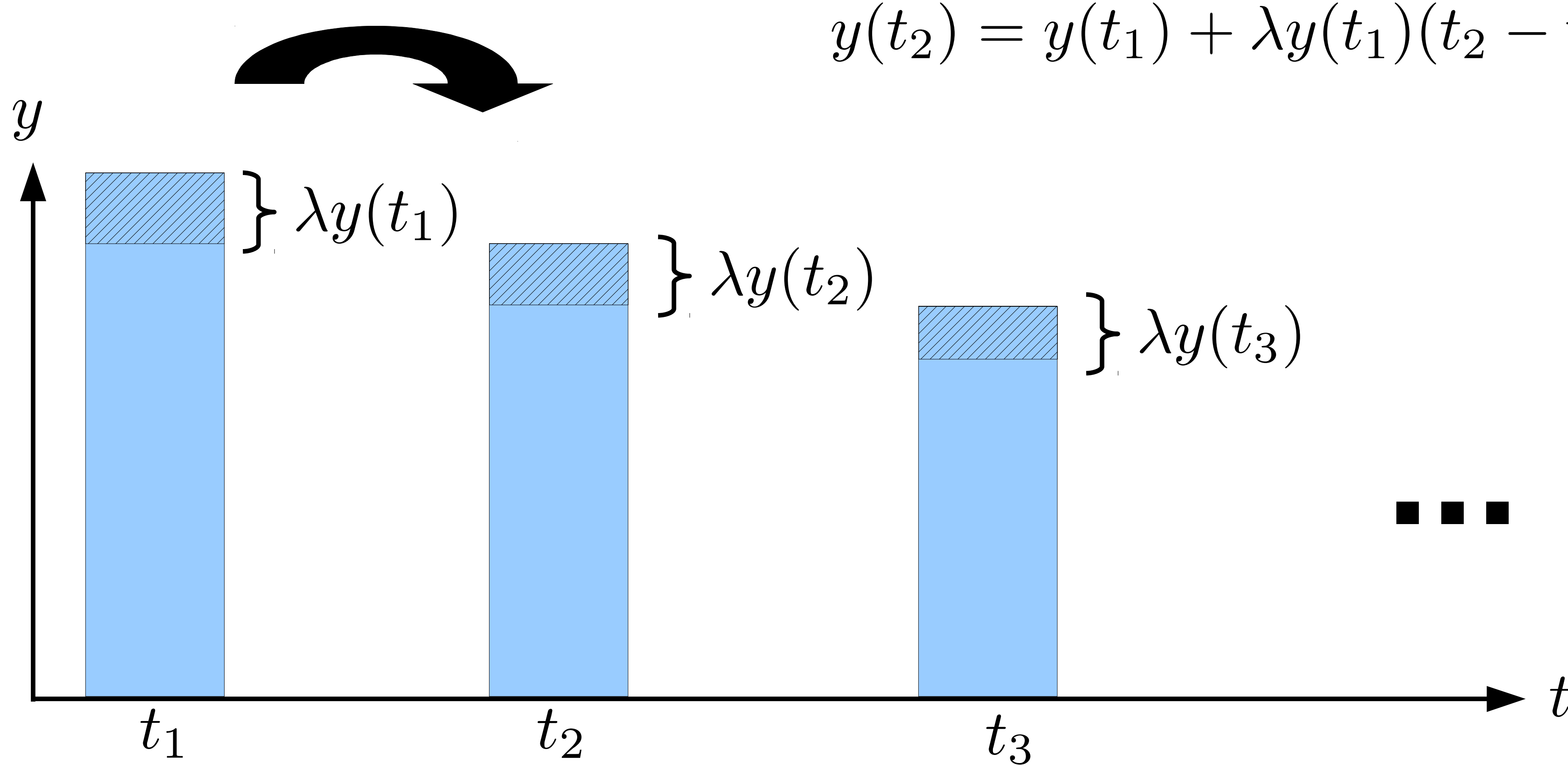
λ **Zerfallskonstante**



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

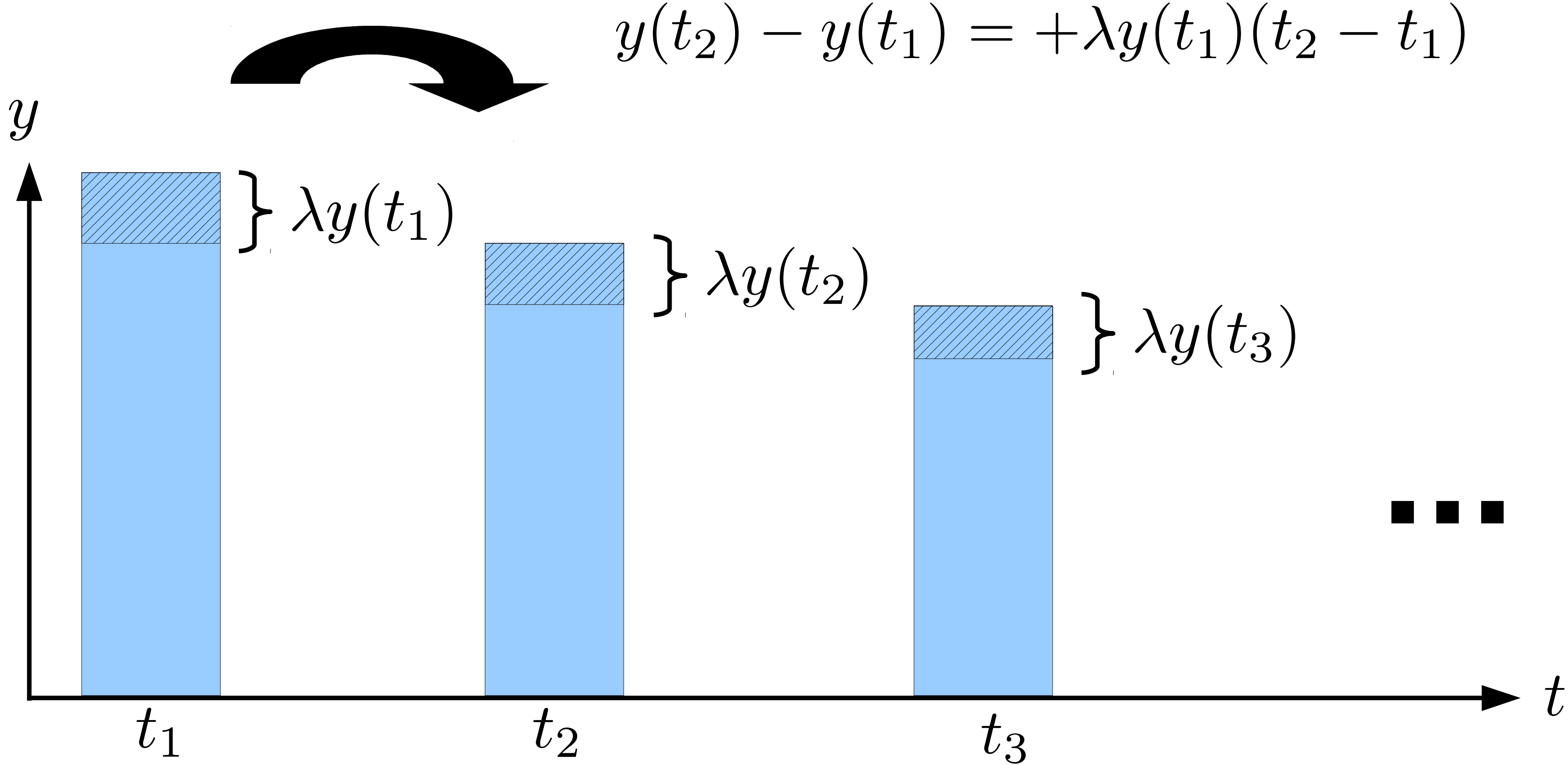
$$y(t_2) = y(t_1) + \lambda y(t_1)(t_2 - t_1)$$



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

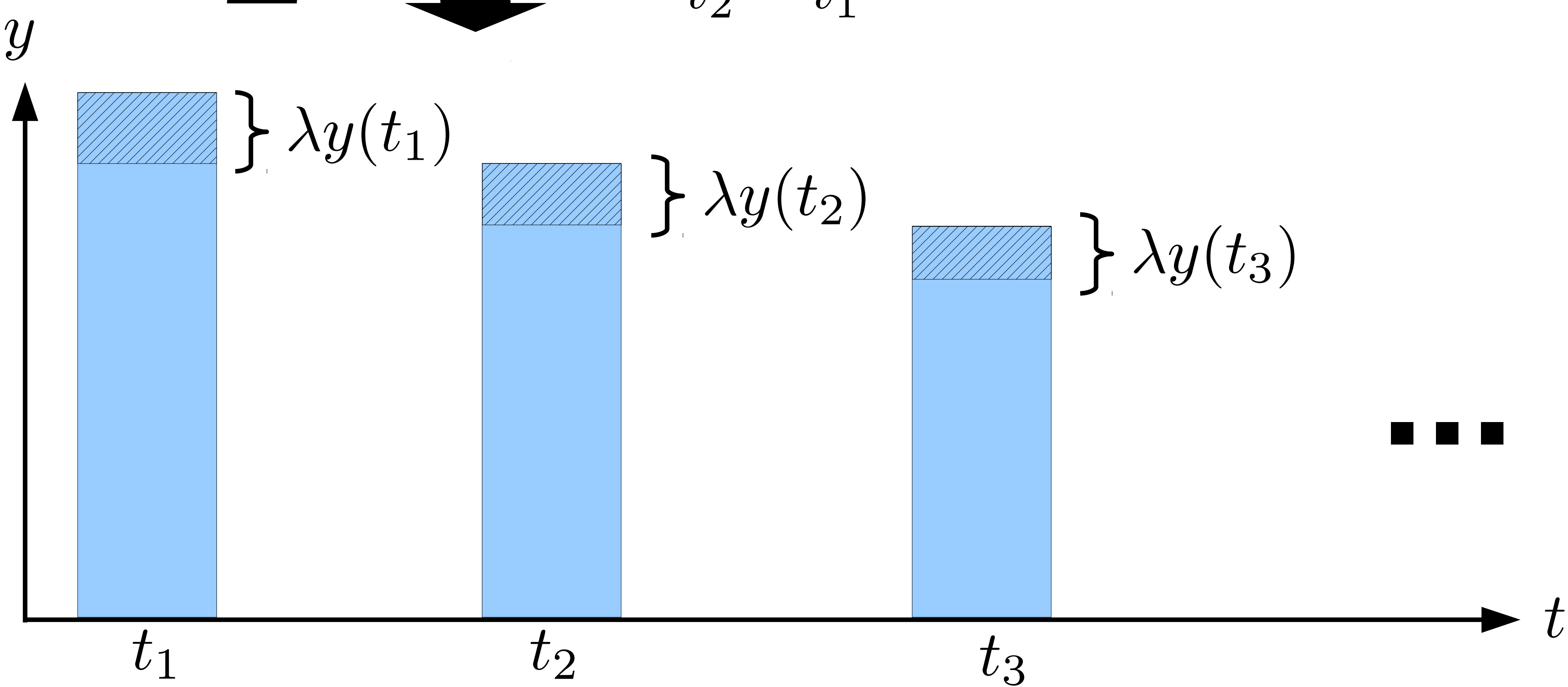
$$y(t_2) - y(t_1) = +\lambda y(t_1)(t_2 - t_1)$$



Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

$$\frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = +\lambda y(t_1)$$



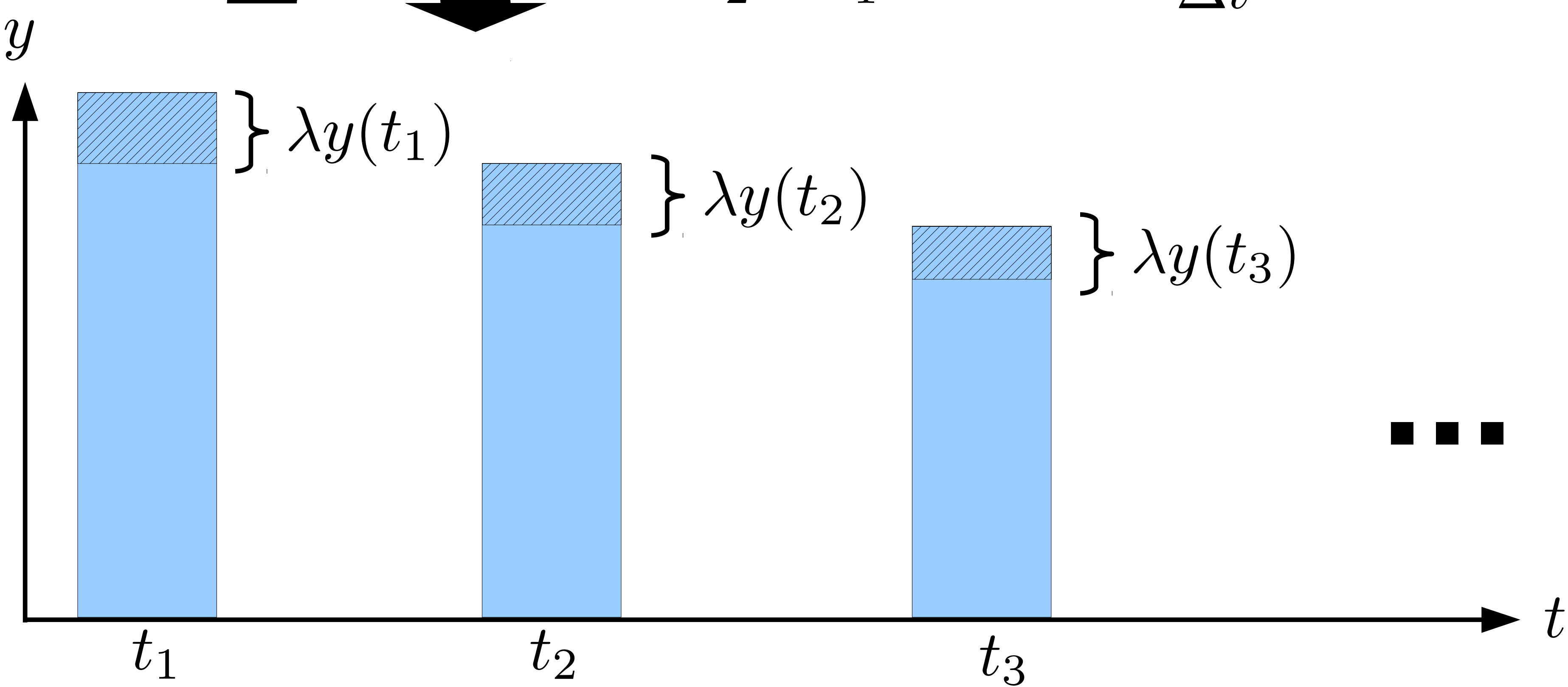
Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

Setze $t = t_1$

$\Delta t = t_2 - t_1$

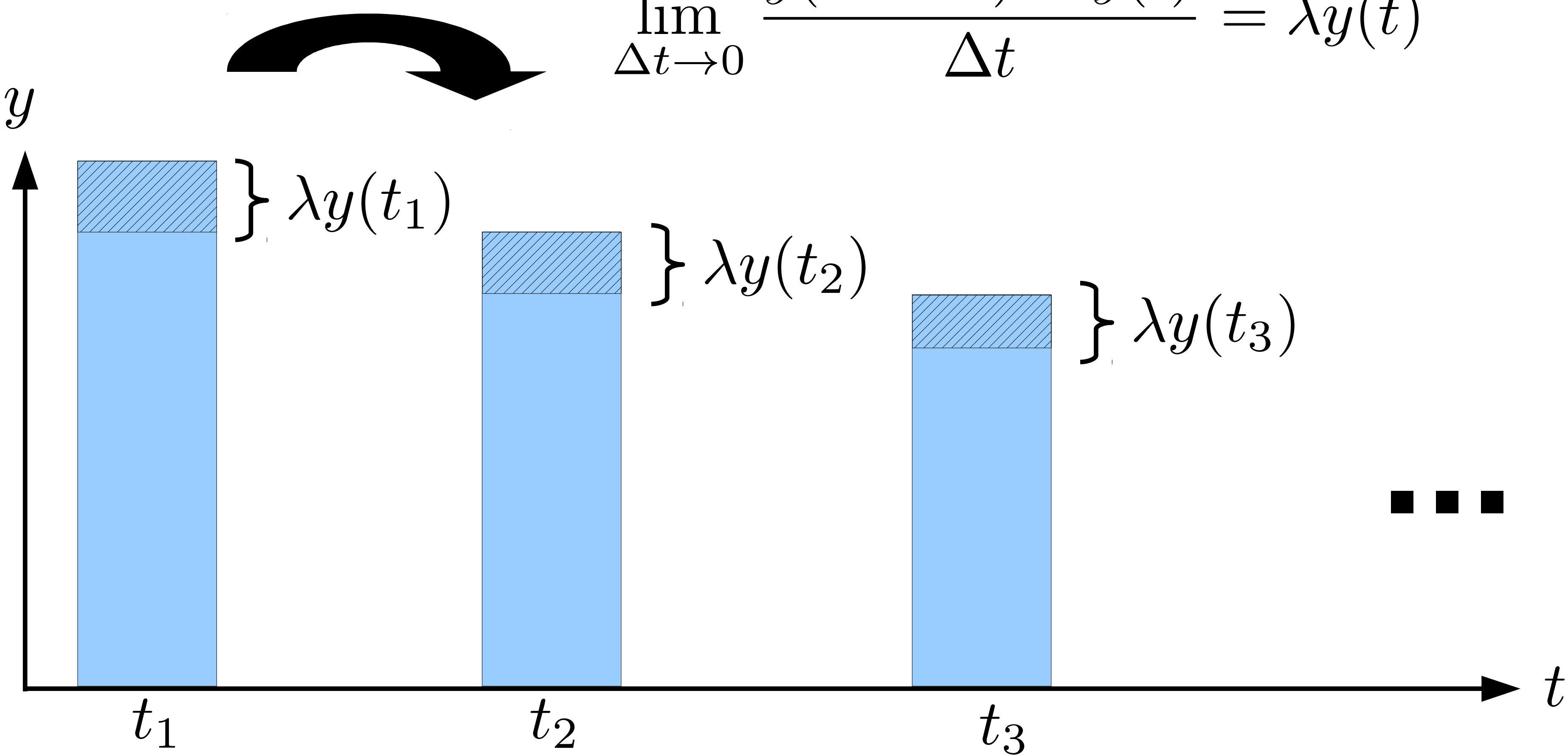
$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = +\lambda y(t)$$



Radioaktiver Zerfall

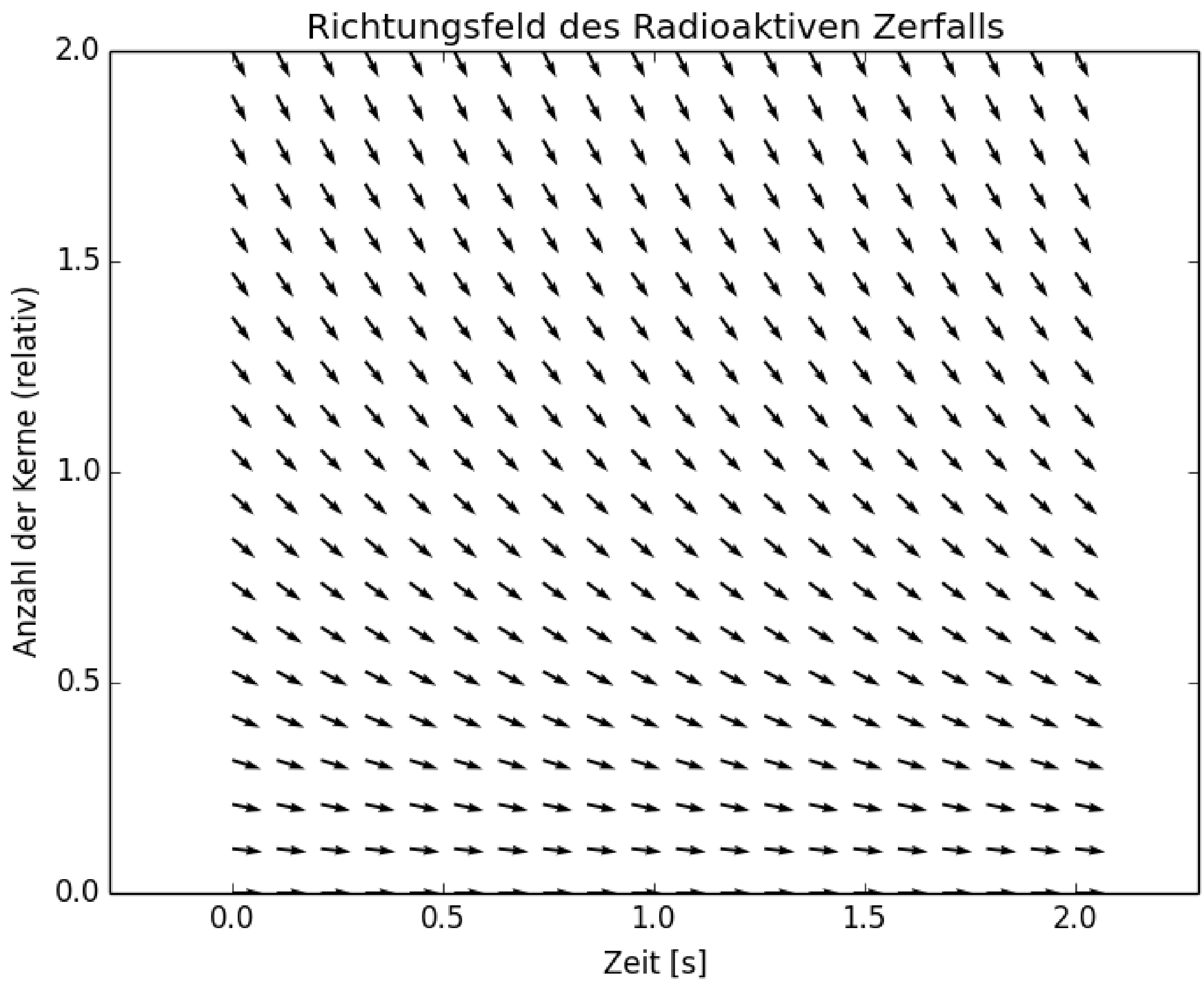
- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lambda y(t)$$



Radioaktiver Zerfall

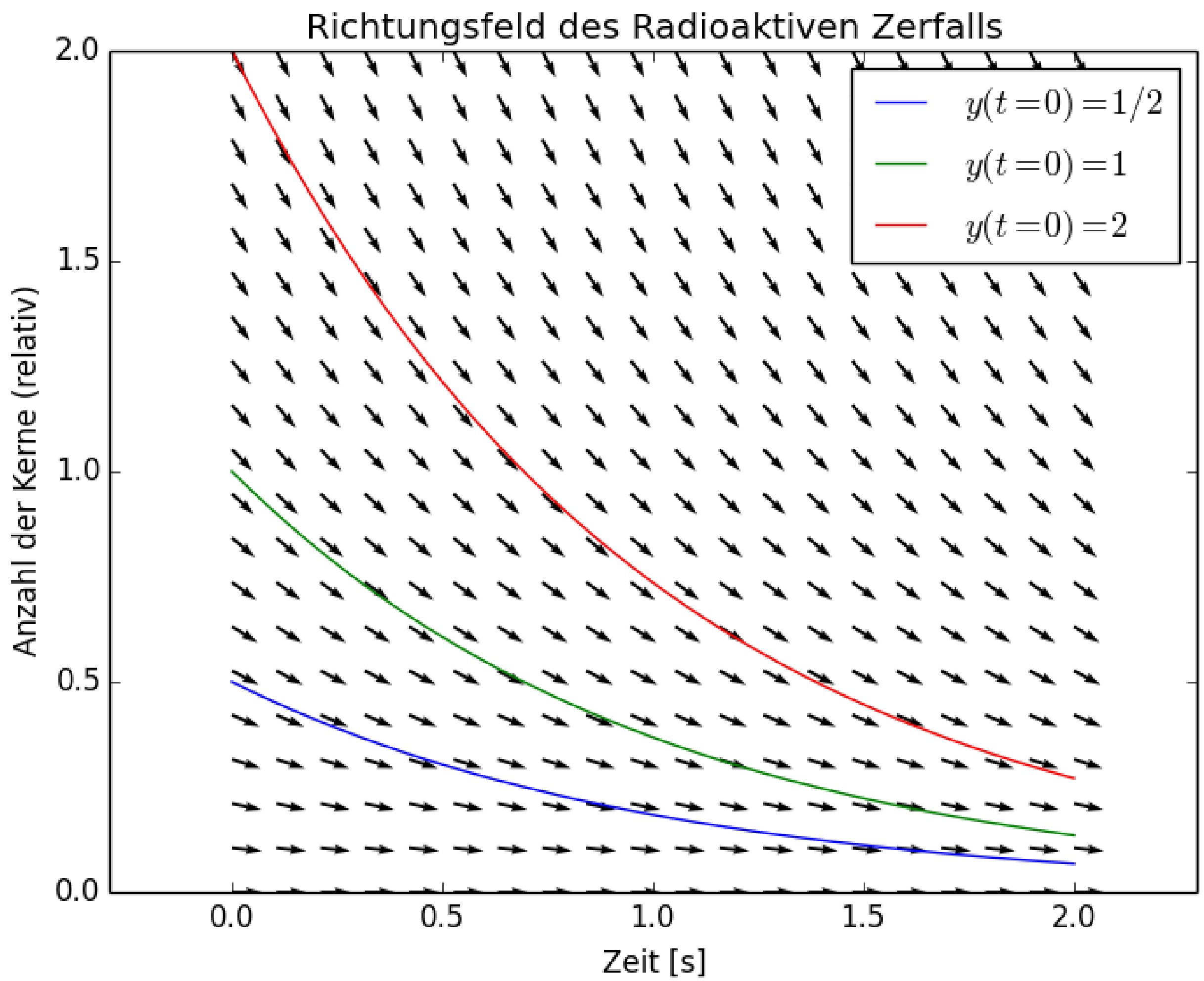
- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$



$$\lambda = -1$$

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$



$\lambda = -1$

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \Big| \; \text{“}\times dt\text{“} \quad \times \frac{1}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \lambda \mathrm{d}t \qquad \Big| \; \int$$

$$\ln(y) + C_1 = \lambda t + C_2 \qquad \Big| \; -C_1$$

$$\ln(y) = \lambda t + C_2 - C_1 \qquad \Big| \; \exp()$$

$$y = \underbrace{e^{C_2 - C_1}}_{C} e^{\lambda t} \longrightarrow y(t) = Ce^{\lambda t}$$

Allgemeine Lösung

Radioaktiver Zerfall

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

$$y(t) = Ce^{\lambda t}$$ **Allgemeine Lösung**

- Anfangswert: $y(t_0) = y_0$

y_0 **Anfangs-Stoffmenge**

t_0 **Anfangs-Zeit**

$$y(t_0) = Ce^{\lambda t_0} = y_0$$

$$C = e^{-\lambda t_0} y_0$$

$$\longrightarrow \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

Anfangswertproblem

- DGL + Anfangswert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t)) \qquad y(t_0) = y_0$$

- DGL zweiter Ordnung + Anfangswert

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \qquad y(t_0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{y}_0$$

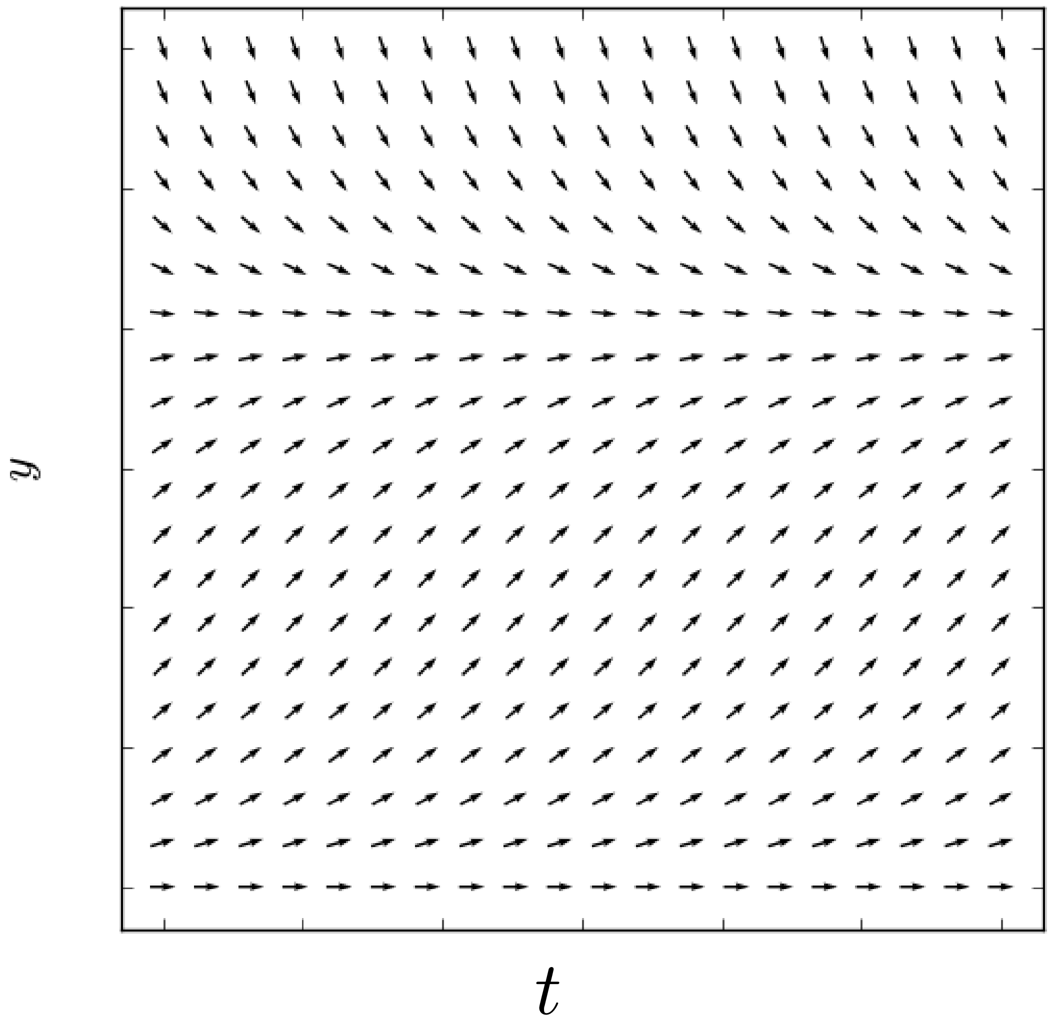
- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, y(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{y}_0 \quad \ldots$$

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma y - \sigma y^2$$



?

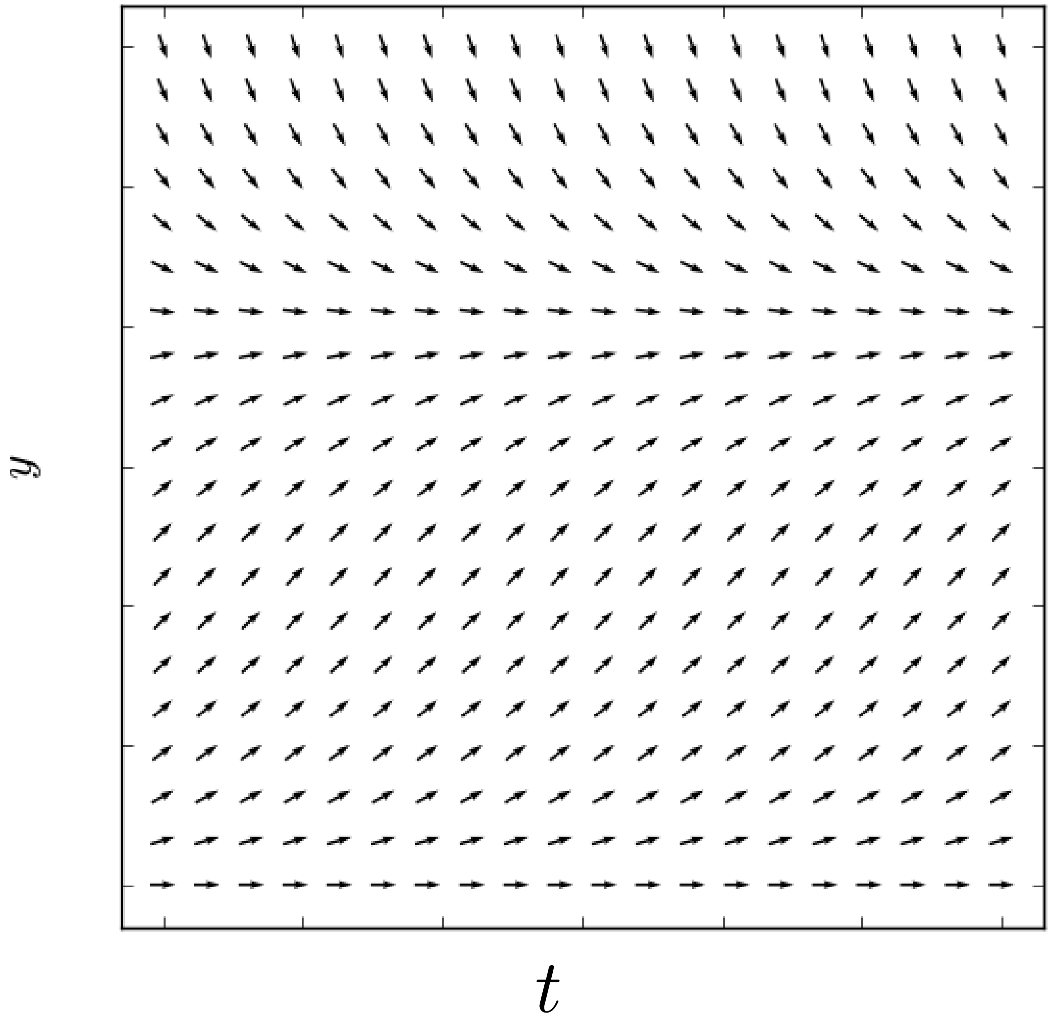
y ... Population

γ ... Geburtsrate

σ ... Sterberate

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma y - \sigma y^2$$



$$y = \frac{\gamma}{\sigma}$$

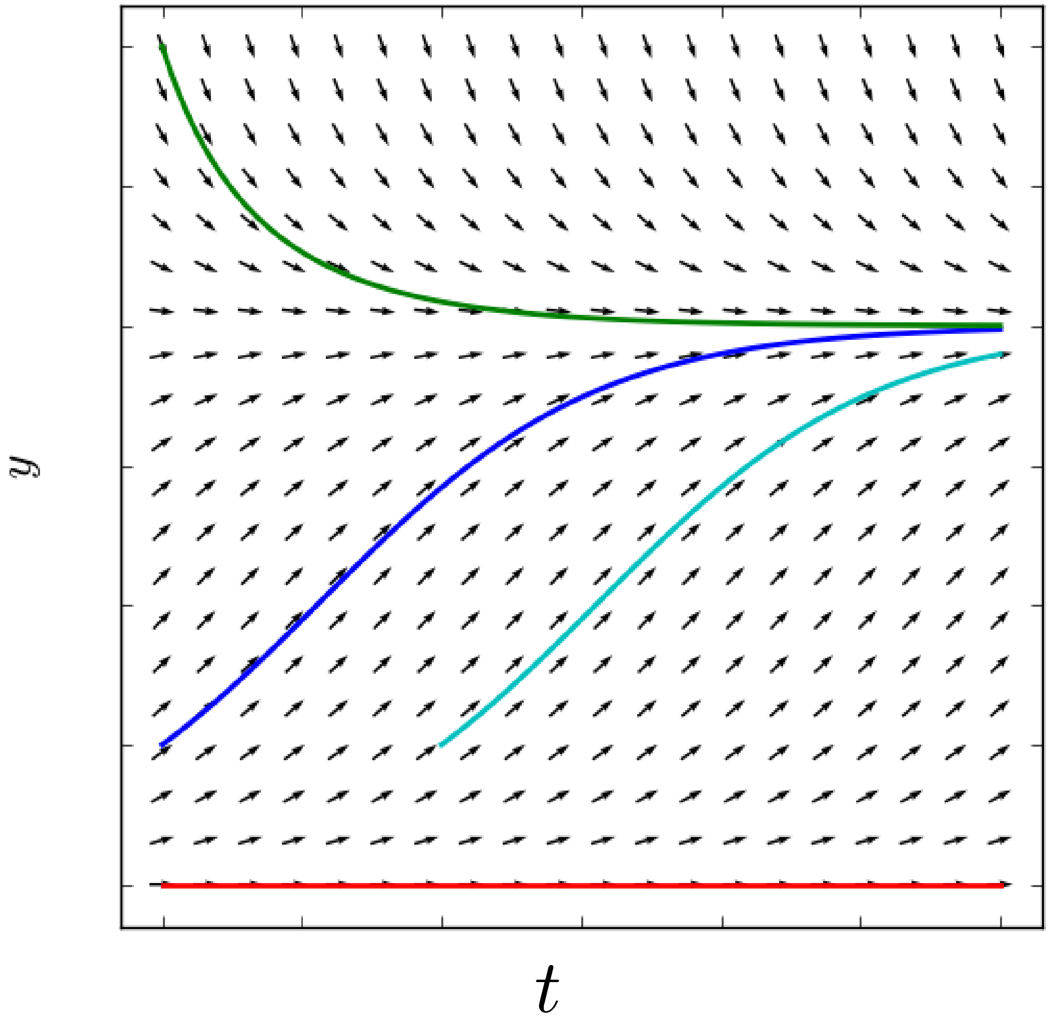
y ... Population

γ ... Geburtsrate

σ ... Sterberate

Logistische Differentialgleichung

- Populationswachstum $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma y - \sigma y^2$$



$$y = \frac{\gamma}{\sigma}$$

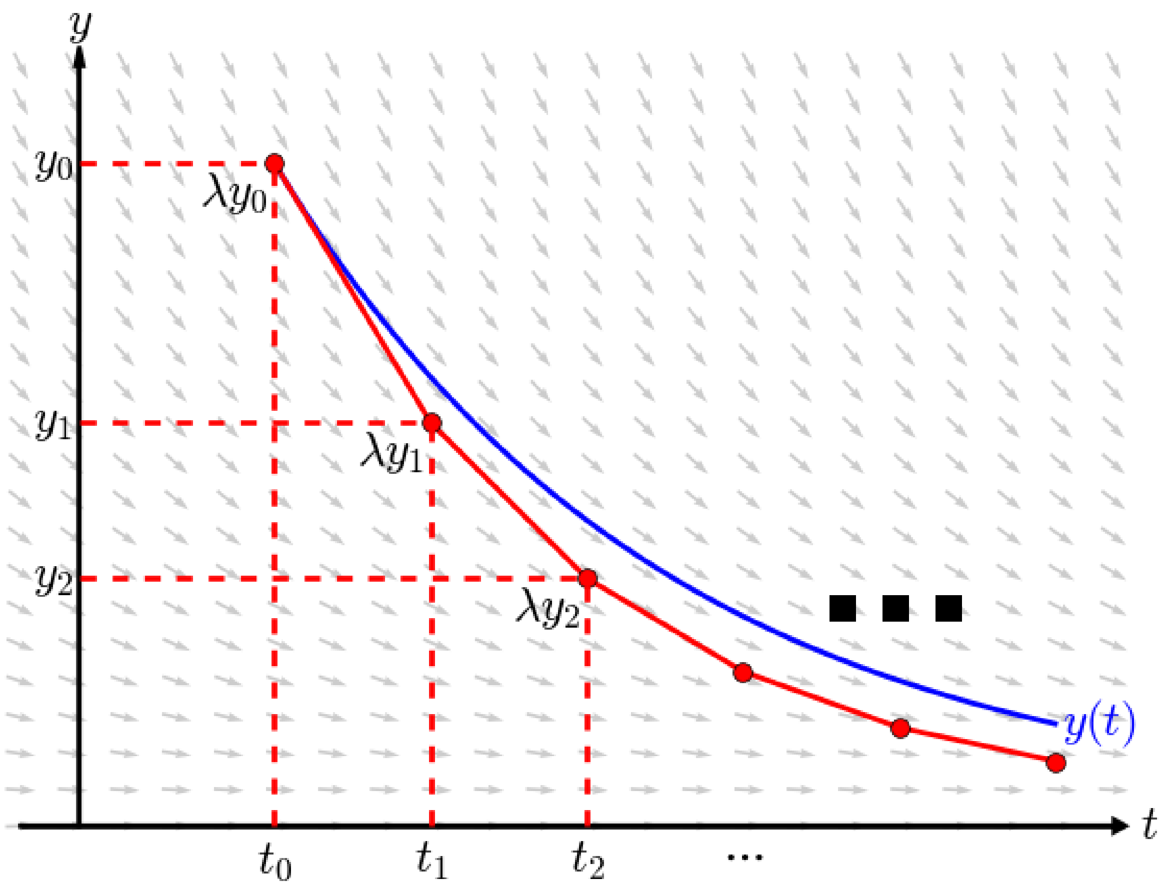
y ... Population

γ ... Geburtsrate

σ ... Sterberate

Euler Verfahren: Explizit

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

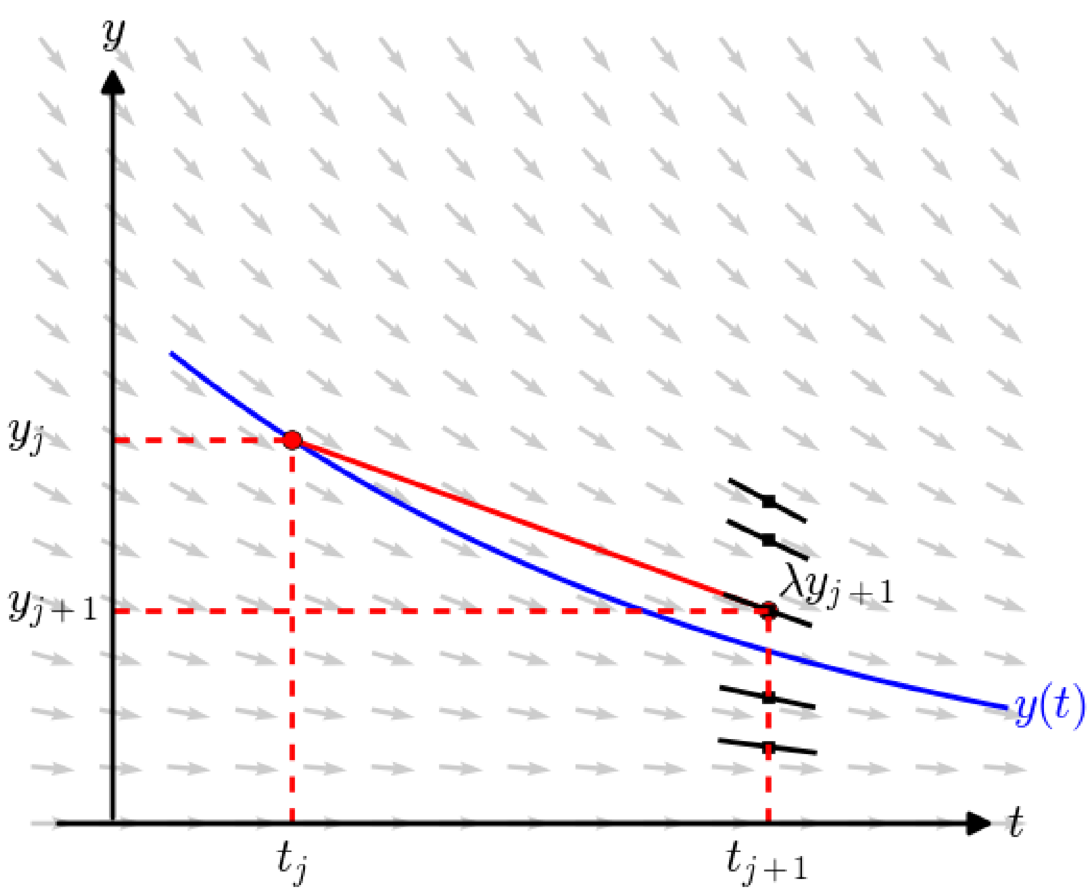


$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = \lambda y_j$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t \lambda y_j$$

Euler Verfahren: Implizit

- Radioaktiver Zerfall $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$

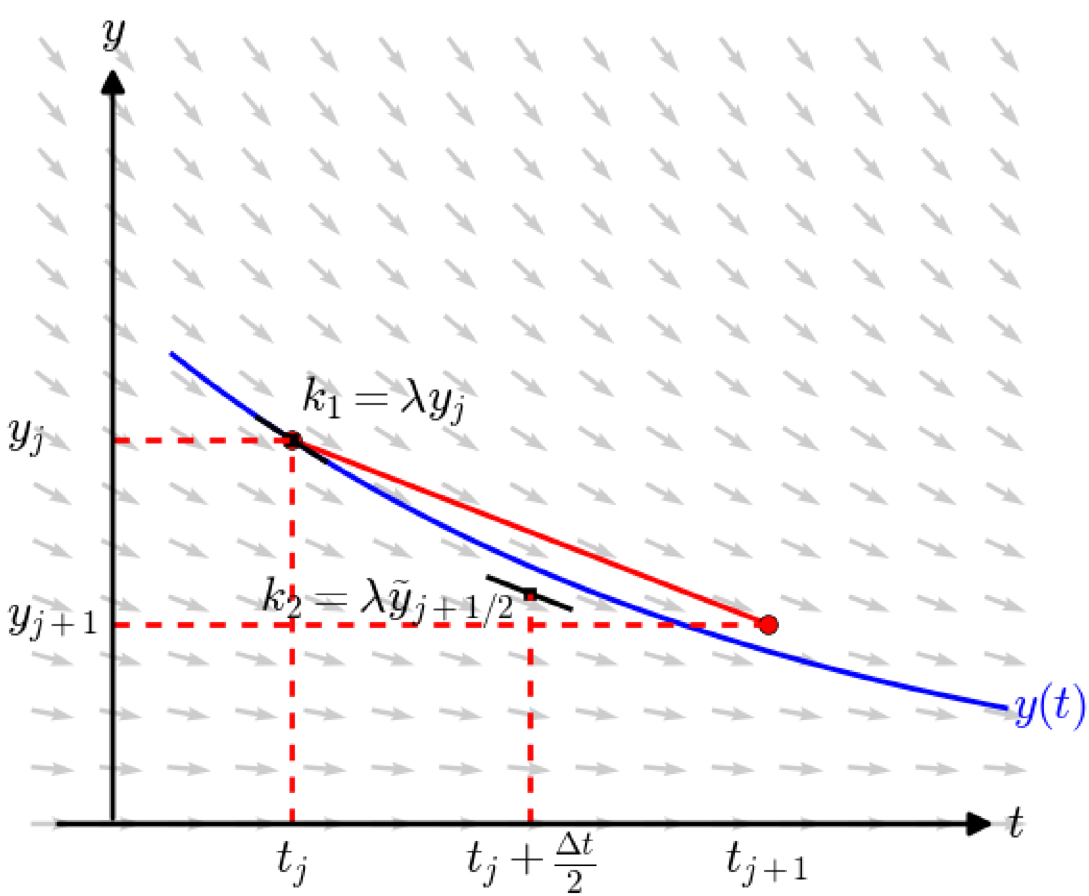


$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = \lambda y_{j+1}$$

$$y_{j+1} = \frac{1}{1 - \lambda \Delta t} y_j$$

Modifiziertes Euler Verfahren

- Radioaktiver Zerfall $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$



$$k_1 = \lambda y_j$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{\Delta t}{2} k_1$$

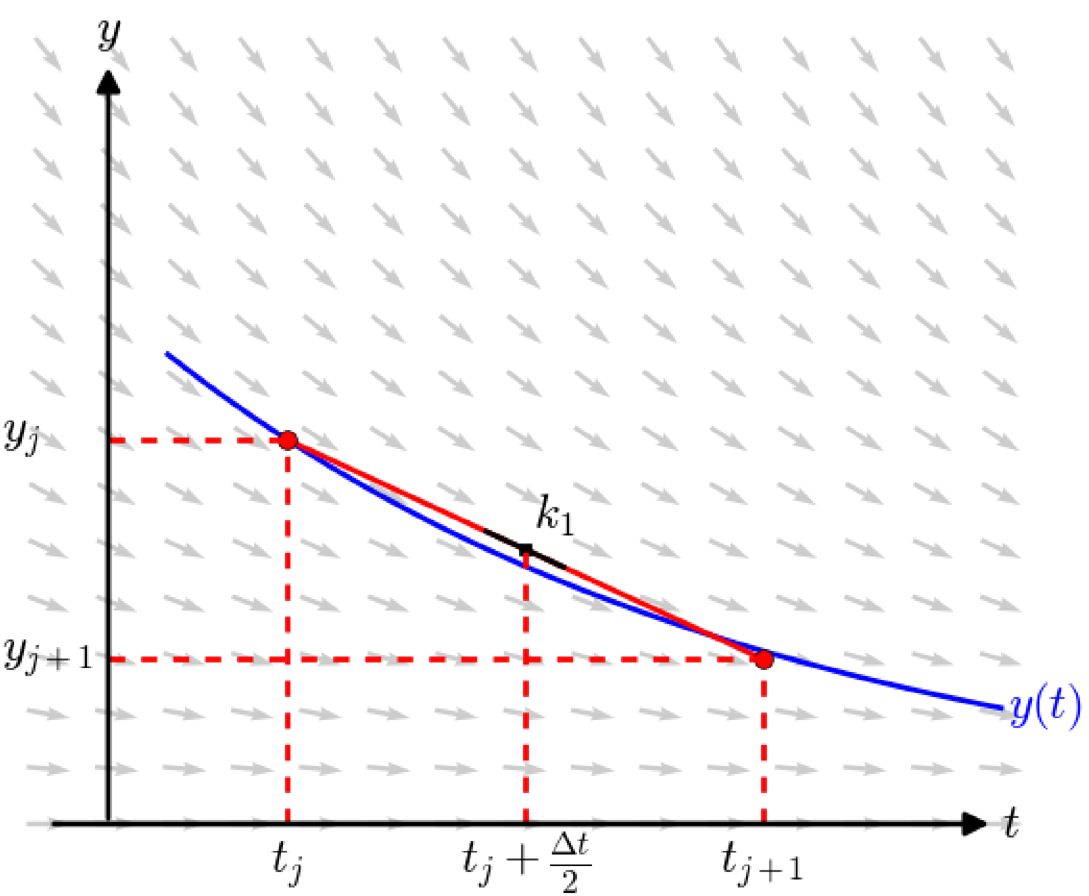
$$k_2 = \lambda \tilde{y}_{j+1/2}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t k_2$$

$$y_{j+1} = \left(1 + \Delta t\lambda + \frac{(\Delta t\lambda)^2}{2}\right) y_j$$

Implizite Mittelpunkts-Regel

- Radioaktiver Zerfall $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y \qquad \lambda < 0$



$$\frac{\tilde{y}_{j+1/2} - y_j}{\Delta t/2} = \lambda \tilde{y}_{j+1/2}$$

$$k_1 = \lambda \tilde{y}_{j+1/2}$$

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t k_1$$

$$\Downarrow$$

$$y_{j+1} = \frac{1 + \lambda \Delta t/2}{1 - \lambda \Delta t/2} y_j$$

Projekt 2

- Loese $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y$ mit $y(0) = 1$ $\lambda = -10$

  bis $t = 1$

- Verwende: explizites & implizites Euler Verfahren

- Vergleiche mit der exakten Loesung:

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(1)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 2+

- Loese $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y$ mit $y(0) = 1$ $\lambda = -10$

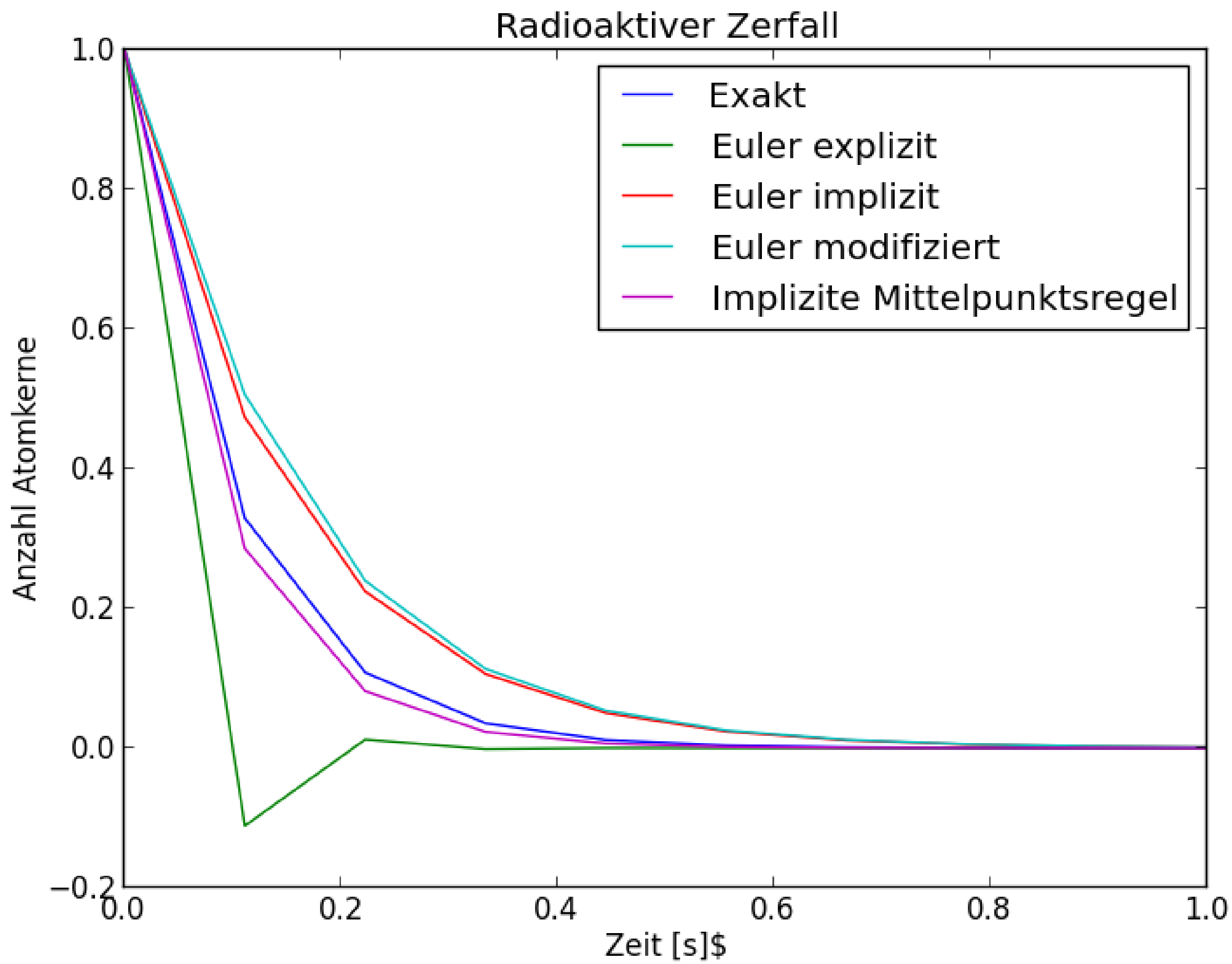
  bis $t = 1$
- Verwende: modifiziertes Euler-Verfahren und

  implizite Mittelpunkts-Regel
- Vergleiche mit der exakten Loesung:

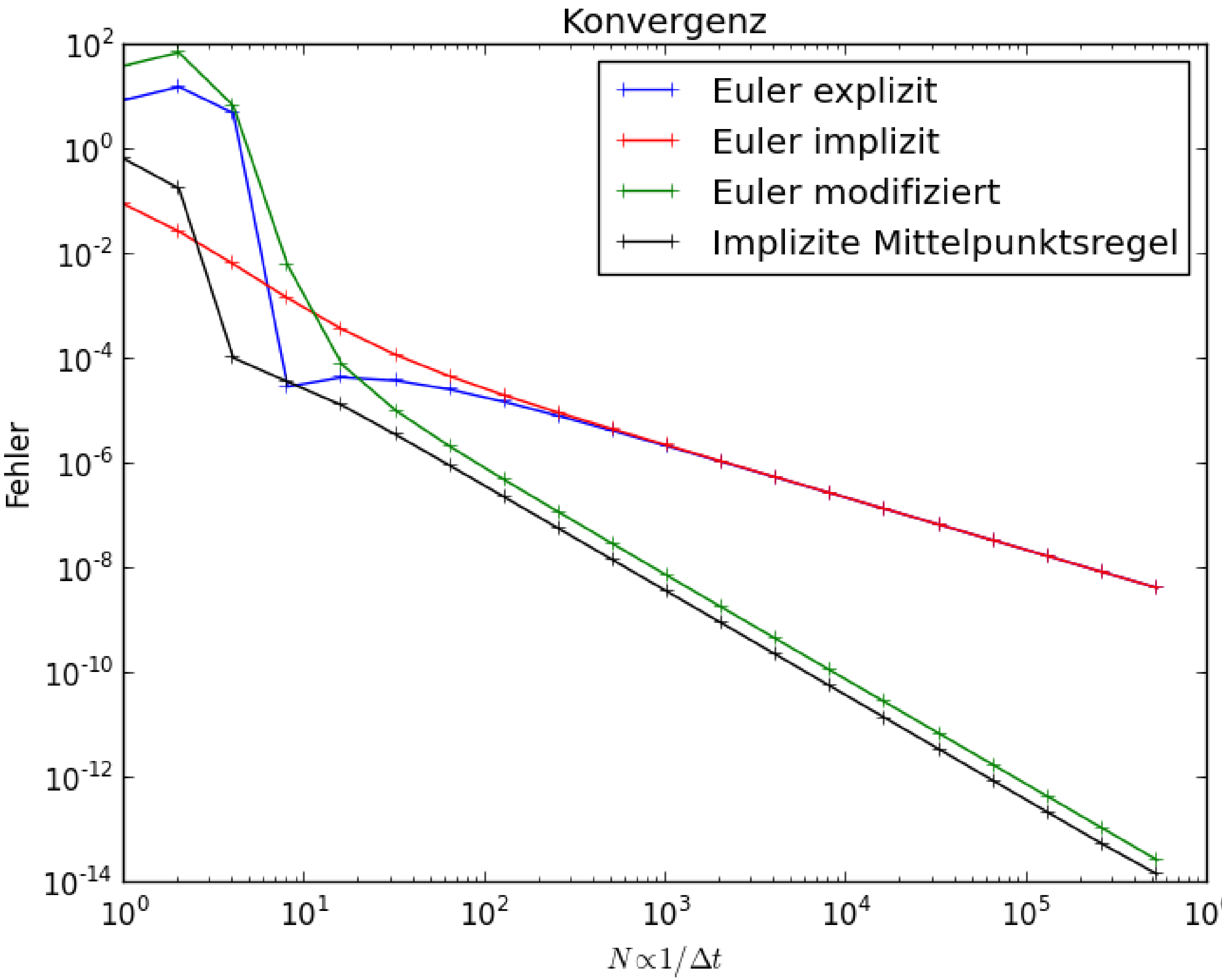
$$y(t) = e^{\lambda t}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(1)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 2


Radioaktiver Zerfall
Exakt
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunktsregel
Anzahl Atomkerne
Zeit [s]$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Projekt 2



Konvergenz
Euler explizit
Euler implizit
Euler modifiziert
Implizite Mittelpunktsregel
Fehler
$N \propto 1/\Delta t$
10^{2}
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}

Projekt 3

- Logistische Diff.-Gleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma y - \sigma y^2$ mit

$$\gamma = 1 \qquad \sigma = 2 \qquad y(t=0) = y_0$$

- Verwende: explizites Euler Verfahren und modifiziertes Euler-Verfahren

- Vergleiche mit der exakten Loesung:

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \left(\frac{\gamma}{y_0} - \sigma\right) e^{-\gamma t}}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(3)|$ als Funktion der Schrittweite

Projekt 3+

- Logistische Diff.-Gleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma y - \sigma y^2$ mit

$$\gamma = 1 \qquad \sigma = 2 \qquad y(t=0) = y_0$$

- Verwende: implizites Euler Verfahren und
  implizite Mittelpunkts-Regel

- Vergleiche mit der exakten Loesung:

$$y(t) = \frac{\gamma}{\sigma + \left(\frac{\gamma}{y_0} - \sigma\right) e^{-\gamma t}}$$

- Untersuche den Fehler $E = |y_N - y(3)|$ als Funktion der Schrittweite