Universität Augsburg
3. April 2013

Pizzaseminar zur Kategorientheorie
6. Übungsblatt

Aufgabe 1. *Das Yoneda-Lemma*

Sei $\mathcal{C}$ eine lokal kleine Kategorie und $\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ ihre Prägarbenkategorie. Wir wollen in mehreren Schritten das *Yoneda-Lemma* beweisen, demnach wir eine in $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}}$ natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \cong F(X) \tag{1}$$

haben. Mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ ist der kontravariante Hom-Funktor zu X bezeichnet, den wir auch $\widehat{X}$ geschrieben haben.

a) Zeige, dass eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ durch ihren Wert $s := \eta_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$ bereits eindeutig festgelegt ist, und zwar über die Formel

$$\eta_Y(f) = F(f)(s) \tag{2}$$

für alle Objekte Y und Morphismen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

b) Zeige, dass umgekehrt für beliebiges $s \in F(X)$ die Formel (2) eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}(\_, X) \Rightarrow F$ definiert.

c) Zeige mit a) und b), dass zumindest für festes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathcal{C}}$ eine Bijektion (1) existiert.

d) Linke und rechte Seite von (1) können als Auswertungen der Funktoren

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X), F) \\ R : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \widehat{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathrm{Set}, \quad (X, F) \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

an der Stelle (X, F) angesehen werden. Überlege, wie diese beiden Funktoren auf Morphismen wirken, und zeige, dass sie zueinander isomorph sind.

e) Du hast soeben das Yoneda-Lemma bewiesen. Herzlichen Glückwunsch!

Aufgabe 2. *Cayley-Einbettung*

Der Satz von Cayley aus der Gruppentheorie besagt, dass sich jede Gruppe G in eine symmetrische Gruppe (der Gruppe der Bijektionen einer bestimmten Menge) einbetten lässt. Genauer gibt es stets folgenden injektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{Sym}(G) := \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ bijektiv}\} \\ g & \longmapsto & g \circ \_ \end{array}$$

Vergleiche diese Einbettung mit der Yoneda-Einbettung für $\mathcal{C} := BG$. Erinnere dich dazu daran, wodurch Funktoren $(BG)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ schon gegeben sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Dichtheit der Yoneda-Einbettung*

Sei $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann wird jedes Objekt $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ auf kanonische Art und Weise (welche?) zu einem Kokegel des Diagramms

$$H/Y \xrightarrow{U} \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{D}.$$

Der Funktor H heißt genau dann *dicht*, wenn diese Kokegel sogar Kolimiten sind. Die Kategorie H/Y ist dabei die sog. *Kommakategorie*

Objekte: alle Morphismen $H(X) \xrightarrow{p} Y$ in $\mathcal{D}$, $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$

Morphismen: $\operatorname{Hom}(H(X) \xrightarrow{p} Y, H(\widetilde{X}) \xrightarrow{\tilde{p}} Y) :=$

$$\left\{ X \xrightarrow{f} \widetilde{X} \;\middle|\; \begin{tikzcd} H(X) \arrow[rr, "H(f)"] \arrow[dr, "p"'] & & H(\widetilde{X}) \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\ & Y & \end{tikzcd} \text{ kommutiert} \right\},$$

und der Funktor $U : H/Y \to \mathcal{C}$ der Vergissfunktor

$$\begin{array}{rrcl} U : & H/Y & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (H(X) \xrightarrow{p} Y) & \longmapsto & X \\ & (X \xrightarrow{f} \widetilde{X}) & \longmapsto & f. \end{array}$$

Zeige: Die Yoneda-Einbettung $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ ist dicht.

Bemerkung: Um das zum Ausdruck zu bringen, schreibt man auch für Prägarben F auf $\mathcal{C}$:

$$F \cong \int^{X \in \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X) \otimes F(X).$$