14. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (**S**, 15=4+4+4+3 Punkte)
Diese Aufgabe behandelt ein Beispiel zum Struktursatz 21.2 für zerfallende Matrizen. Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A; ist A zerfallend?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Hauptraums.

(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in M_4(\mathbb{Q})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Blockdiagonalgestalt wie in Satz 21.2(c) hat (es gibt genau so viele Diagonalblöcke wie Eigenwerte).

Aufgabe 2. (V) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $A_t := \begin{bmatrix} t & 2t-4 & t+1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_{A_t} und alle Eigenwerte von A_t.

(b) Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, so dass A_t diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, so dass A_t nicht diagonalisierbar ist.

(d) Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$, so dass A_t diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (V) Diese Aufgabe behandelt ein Beispiel zur Normalform von nilpotenten Matrizen (Satz 21.9). Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(a) Zeigen Sie, dass A nilpotent ist; bestimmen Sie das minimale $d \geq 1$ mit $A^d = 0_{4\times 4}$.

(b) Bestimmen Sie $m := \dim N(A)$.

(c) Bestimmen Sie $v_1 \in \mathbb{Q}^4$ mit $A^{d-1}v_1 \neq 0_4$. Bilden Sie $B_1 = \{u_1, \ldots, u_d\}$ (wie im 1. Schritt des Verfahrens im Skript S. 102) und ergänzen Sie B_1 zu einer Basis C von $\mathbb{Q}^4$.

(c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in M_4(\mathbb{Q})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Blockdiagonalgestalt mit 0-Jordan-Blöcken auf der Diagonalen hat.

Aufgabe 4. (V)
(a) Geben Sie unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ an, die nicht zerfallend sind.

(b) Sei $A \in M_n(K)$ und A^{tr} die transponierte Matrix. Zeigen Sie: $\chi_A = \chi_{A^{\mathrm{tr}}}$ und $\mu_A = \mu_{A^{\mathrm{tr}}}$.

(c) Sei $A = J_n(\lambda) \in M_n(K)$ ein λ-Jordan-Block. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $J_n(\lambda)$. (Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 2, 3, 4$.)

Aufgabe 5. (Z) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1+i) & 2i \\ 0 & 1+i & 1+i \\ -i & \frac{1}{2}(-1+i) & 1+2i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A.

Hinweis: Wenn Sie Schwierigkeiten haben, die Nullstellen von χ_A zu finden, so gehen Sie wie folgt vor. Sei zunächst $f = X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ beliebig; ersetzt man X durch $X - a/2$, d.h., man bildet das Polynom $g := f(X - a/2) \in \mathbb{C}[X]$, so wird der Koeffizient von X in g gleich 0 ("quadratische Ergänzung"). Sei analog $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ beliebig und setze $g := f(X - a/3) \in \mathbb{C}[X]$; siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Cardanische_Formeln`.

(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$ nilpotent, $A \neq 0_{n\times n}$. Sei $m := \dim N(A)$ und $d \geq 1$ minimal mit $A^d = 0_{n\times n}$.

(a) Sei $n = 2$ und $A \neq 0_{n\times n}$. Zeigen Sie: Es gilt $d = 2$, $m = 1$ und es gibt eine invertierbare Matrix $T \in M_2(K)$ mit $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Sei $n = 3$ und $A \neq 0_{n\times n}$. Zeigen Sie: Es gilt entweder $m = 1$, $d = 2$ oder $m = 2$, $d = 3$; es gibt eine invertierbare Matrix $T \in M_3(K)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(falls } m = 1\text{)} \qquad \text{oder} \qquad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(falls } m = 2\text{)}.$$

(c) Formulieren Sie analoge Aussagen zu (c) für $n = 4, 5, 6$. Ist dies auch für $n = 7$ möglich?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 7. - 11. Februar in den Übungsgruppen. Die Punkte zählen im Wintersemester. Die Besprechung der schriftlichen Aufgaben erfolgt in der ersten Woche des Sommersemesters.