M. Künzer Abgabe am 08.06.05.

Cohomologie von Gruppen, SS 05

Blatt 7

Aufgabe 19 (15 Punkte). Sei R ein Ring.

(1) Sei I eine Indexmenge (möglicherweise unendlich). Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein Tupel von R-Moduln. Konstruiere das Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ und das Coprodukt $\coprod_{i\in I} M_i$. (Hinweis: Letzteres in ersterem.)

(2) Zeige, daß ${}_R(\coprod_{i\in I} M_i, -) \simeq \prod_{i\in I} {}_R(M_i, -)$, wobei die Funktorialität der rechten Seite geeignet zu definieren sei. Zeige damit und mit Aufgabe 18 (4), daß aus M_i projektiv für alle i folgt, daß $\coprod_{i\in I} M_i$ projektiv ist. Zeige dual, ist M_i injektiv für alle i, so ist $\prod_{i\in I} M_i$ injektiv.

(3) Sei X ein R-Modul. Zeige, daß es einen Projektiven P und einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ gibt.

(4) Sei für den Moment $R = \mathbf{Z}$. Zeige, daß es für jeden $\mathbf{Z}$-Modul X einen Injektiven I und einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt. (Hinweis: Mit Aufgabe 5 (3) sind $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ injektiv. Sei $x \in X$. Ist $\langle x\rangle$ endlich, so gibt es $\langle x\rangle \rightarrowtail \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, ist $\langle x\rangle \simeq \mathbf{Z}$, so gibt es $\langle x\rangle \rightarrowtail \mathbf{Q}$. Wir können jeweils zu einem Morphismus $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ resp. $X \xrightarrow{f_x} \mathbf{Q}$ fortsetzen. Diese Morphismen zusammengenommen bilden einen Morphismus in das Produkt.)

(5) Sei wieder R beliebig. Zeige, daß es für jeden R-Modul X einen Injektiven I und einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt. (Hinweis: Wende (4) auf $X|_{\mathbf{Z}}$ an. Zeige und verwende dann, daß für einen injektiven $\mathbf{Z}$-Modul I auch ${}_{\mathbf{Z}}(R, I)$ ein injektiver R-Modul ist.)

Aufgabe 21 (4 Punkte). Zeige oder widerlege.

(1) Seien R und S Ringe, und sei $R\text{-Mod} \xrightarrow{F} S\text{-Mod}$ additiv. Es ist $\mathrm{K}(F) \circ \mathrm{PRes} \simeq \mathrm{PRes} \circ F$.

(2) Sei R ein Ring. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz in R-Mod. Es ist (i,p) split kurz exakt genau dann, wenn i Coretraktion ist, und auch genau dann, wenn p Retraktion ist.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Sei R ein Ring. Ein R-Modul isomorph zu einem R-Modul der Form $\coprod_{i\in I} R$ für eine Indexmenge I heiße *frei (auf I)*.

(1) Zeige, daß $X \in \operatorname{Ob} R\text{-Mod}$ genau dann projektiv ist, wenn X ein direkter Summand eines freien Moduls ist.

(2) Zeige, daß ein direkter Summand von R isomorph zu einem Modul von der Form Re mit einem *Idempotent* $e \in R$ ist, i.e. einem Element e von R, welches $e^2 = e$ erfüllt.

Aufgabe 23 (3+3+6 Punkte). Sei $R = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \;:\; a_{i,j} = 0 \text{ für } i > j \right\} \subseteq \mathbf{Q}^{3\times 3}$.

(1) Gib drei paarweise nichtisomorphe projektive Summanden von R an.
(Hinweis: Isomorphe Moduln haben dieselben Annullatorideale.)

(2) Gib drei paarweise nichtisomorphe Injektive von R-Mod von $\mathbf{Q}$-Dimension ≤ 3 an.
(Hinweis: Zeige zunächst, daß $R\text{-Mod} \simeq [\![\Delta_2, \mathbf{Q}\text{-Mod}]\!]$.)

(3) Löse die Projektiven aus (1) injektiv und die Injektiven aus (2) projektiv auf.