

Blatt 13

Abgabe per Email am 27. Mai 2020 um 12 Uhr !

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind **Bonusaufgaben**. Die Klausur findet am Donnerstag 28. Mai um 8:15 Uhr statt. Wegen der Coronasituation wird sie online durchgeführt. Die Aufgaben werden am 28. Mai um 8:10 Uhr per Email zugeschickt, die Lösungen schicken Sie ebenfalls per Email gleich nach Ende der Bearbeitungszeit an jiri.cerny@unibas.ch zurück. Bei der Klausur sind alle Hilfsmittel zugelassen. Die Blätter 12 und 13 sind für die Klausur nicht relevant.

Aufgabe 63. Fortsetzung der Aufgabe 61 (A, 1 Punkt)

Für alle drei Ketten aus der Aufgabe 61:

- Bestimme welche Zustände rekurrent und welche transient sind.
- Welche der Ketten sind irreduzibel?
- Bestimme die invariante Verteilung(en)?

Aufgabe 64. Rekurrenz der einfachen Irrfahrt (B, 6 Punkte)

Sei $S = (S_n)_{n \geq 0}$ die einfache symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d .

- Zeige, dass S_n rekurrent ist.

Hinweis. Mit Hilfe der Aufgabe 49, zeige dass $P_0[\tilde{H}_0] = 1$. Alternativ, beobachte, dass $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$ und zeige, dass $P(S_{2k} = 0) = ck^{-1/2} + o(k^{-1/2})$ mit $c > 0$, und nutze das um die Rekurrenz zu zeigen.

- Finde alle invariante Masse von S .
- Ist S positiv oder null-rekurrent?

Aufgabe 65. Transiente Irrfahrt (A, 4 Punkte)

Sei $X = (X_n)_{n \geq 0}$ die einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} mit Drift, d.h. $P(X_{n+1} = x + 1 | X_n = x) = 1 - P(X_{n+1} = x - 1 | X_n = x) = p > 1/2$.

- Zeige, dass $\pi(x) = A + B(\frac{p}{1-p})^x$ ein invariantes Mass für jedes $A, B > 0$ ist.
- Ist X rekurrent oder transient?

Aufgabe 66. Markovkette ohne invariantes Mass (B–C, 4 Punkte)

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = x) = 1 - P(X_{n+1} = x + 1 | X_n = x) = 10^{-x}, \quad x \geq 1,$$

und $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1$.

- Zeige, dass X irreduzibel und transient ist.
- Zeige, dass X kein nicht-triviales Invariantmass hat.