Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 7 **Abgabe: 23.05.**

1 Kommutierende Operatoren, gemeinsame Eigenbasen, Quantenzahlen

Wir werden in der Vorlesung sehen, dass jeder Hermitesche Operator $\hat{A}$ eine ganze Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt, eine sogenannte *Eigenbasis*. In dieser Übung werden wir uns mit der folgenden wichtigen Verallgemeinerung beschäftigen:

„Zwei Hermitesche Operatoren haben genau dann eine *gemeinsame* Eigenbasis, wenn sie kommutieren."

Wofür braucht man das? Vielleicht erinnern Sie sich aus der Experimentalphysik daran, dass man die Eigenzustände des Wasserstoffatoms mit drei „Quantenzahlen" n, l, m bezeichnet. Dahinter steckt die obige Aussage: Man kann zeigen, dass für Zentralpotentiale der Hamiltonoperator $\hat{H}$, der „Drehimpulsbetragsquadratoperator" $\hat{L}^2$ und die z-Komponente des Drehimpulses $\hat{L}_z$ (paarweise) kommutieren. Die obige Aussage sagt, dass es deshalb gemeinsame Eigenzustände dieser drei Operatoren gibt. Mit jedem Eigenzustand sind entsprechend drei Eigenwerte verbunden, welche wiederum durch n, l und m festgelegt sind. Allgemein nennt man Zahlen, die Eigenwerte einer Observablen bestimmen, *Quantenzahlen*.

Wir werden uns zunächst die allgemeine Theorie ansehen, und dann ein leichtes Beispiel betrachten (zum Glück nicht das Wasserstoffatom).

Erinnerung:

1. Der *Kommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als
$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{1}$$
Der Kommutator ist also genau dann 0, wenn die beiden Operatoren kommutieren.

2. Ein Vektor $|\phi\rangle \neq 0$ ist ein *Eigenvektor* von $\hat{A}$ zum *Eigenwert* $\mu \in \mathbb{C}$ falls gilt, dass
$$\hat{A}|\phi\rangle = \mu|\phi\rangle. \tag{2}$$

a) Wir beginnen mit einer kleinen Fingerübung:

Sei $\hat{A}$ ein (nicht notwendigerweise Hermitescher) Operator auf einem Hilbertraum. *Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ das Vielfache $c|\phi\rangle$ wieder ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zu μ ist. Folgern Sie, dass es zu jedem Eigenwert μ einen Eigenvektor $|\psi\rangle$ gibt, der normiert ist: $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.*

Wenn es zu einem Eigenwert μ zwei Eigenvektoren $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ gibt, die nicht nur einfach Vielfache voneinander sind, sagt man, dass μ *entartet* ist.

b) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Hermitesche Operatoren. Nehmen Sie an, es gebe eine *gemeinsame* Eigenbasis, also eine Basis $\{|\phi_i\rangle\}_i$, wobei jeder $|\phi_i\rangle$ ein Eigenvektor sowohl von $\hat{A}$ als auch von $\hat{B}$ ist. *Zeigen Sie, dass dann $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ gilt.*

Hinweis: Es reicht aus, für einen allgemeinen Vektor $|\psi\rangle$ zu zeigen, dass $[A, B]|\psi\rangle = 0$ gilt. Es ist sicher eine gute Idee, $|\psi\rangle$ in der gemeinsamen Eigenbasis auszudrücken...

c) Zur Umkehrung: Seien $\hat{A}, \hat{B}$ Hermitesche Operatoren, die kommutieren $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine gemeinsame Eigenbasis gibt. Dies gilt zwar ganz allgemein, hier machen wir aber die vereinfachende Zusatzannahme, dass kein Eigenwert von $\hat{A}$ oder $\hat{B}$ entartet sei.

Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme jeder *Eigenvektor $|\phi\rangle$ von $\hat{A}$ auch Eigenvektor von $\hat{B}$ sein muss. Warum bedeutet das, dass es eine gemeinsame Eigenbasis gibt?*

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\hat{B}|\phi\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum gleichen Eigenwert wie $|\phi\rangle$ ist und nutzen sie, dass der Eigenwert nicht entartet ist.

d) Nun eine Anwendung. Wir betrachten ein freies Teilchen in einer Dimension mit Hamiltonoperator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Erinnern Sie sich, dass die Eigenfunktionen – also die Lösungen von $\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ – ebenen Wellen der Form $e^{i\hbar kx}$ sind, wobei die Wellenzahl durch $k = \pm\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ gegeben ist.

Betrachten Sie nun zusätzlich den *Paritätsoperator* $\hat{\Pi}$, der durch $(\hat{\Pi}\phi)(x) = \phi(-x)$ definiert ist. Dieser hat die Eigenwerte 1 (gerade Funktionen) und -1 (ungerade Funktionen).

Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ und der Hamiltonoperator kommutieren, indem Sie sie auf eine allgemeine Funktion $\phi(x)$ anwenden.

Es folgt also, dass es gemeinsame Eigenfunktionen $|\phi_{E,s}\rangle$ gibt, die gleichzeitig

$$\hat{H}|\phi_{E,s}\rangle = E|\phi_{E,s}\rangle \quad \text{und} \quad \hat{\Pi}|\phi_{E,s}\rangle = s|\phi_{E,s}\rangle \quad \text{mit} \quad E \in \mathbb{R}_+, s \in \{\pm 1\}$$

erfüllen. *Finden Sie diese gemeinsamen Eigenfunktionen (vernachlässigen Sie die Normierung).*

Anmerkung: Man sagt, dass Energie E und Parität s Quantenzahlen für das freie Teilchen sind.