Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 22 (1—2), (1971), pp. 85—86

ÄQUIVALENZRELATION FÜR DIE CHARAKTERISIERUNG DES JACOBSONSCHEN RADIKALS

Von

F. SZÁSZ (Budapest)

Für eine universale Algebra $\mathfrak{A}=(A, \Omega)$ im Sinne von G. BIRKHOFF und für eine Teilmenge B der Menge A der Strukturelemente bezeichne B_Ω die durch B erzeugte Teilstruktur. Enthält B nur ein enziges Element b, so wird B_Ω mit $(b)_\Omega$ bezeichnet. Durch die Gleichung $(a)_\Omega=(b)_\Omega$ wird in A eine Äquivalenzrelation definiert.

Ist nun insbesondere $\mathfrak{A}=(A, \Omega)$ ein assoziativer Ring, wobei Ω das System der Addition, Substraktion und aller Rechtsmultiplikationen bezeichnet, so stimmt $(a)_\Omega$ mit dem Hauptrechtsideal $(a)_r$ von A überein, und dann ist die durch die Gleichung $(a)_r=(b)_r$ definierte Äquivalenzrelation $\equiv$ auch eine Linkskongruenz der multiplikativen Halbgruppe des Ringes A, die mit der Hilfe von ganzen rationalen Zahlen und von Ringelementen auch explizit beschrieben werden kann.

Das Ziel dieser Note ist, das Jacobsonsche Radikal J eines Ringes A (vgl. JACOBSON [3]) mit der Hilfe der obigen Äquivalenzrelation zu charakterisieren. Demnach läßt sich J als ein einseitig antieinfaches Radikal ansehen (vgl. ANDRUNAKIEWITSCH [1]). Die im Beweis benützte Methode ist teilweise einem Beweis von SĄSIADA [5] und des Verfassers [6] ähnlich.

Es gilt nämlich der folgende

SATZ. *Das Jacobsonsche Radikal J eines Ringes A stimmt mit der Menge K derjenigen Elemente x von A überein, für welche die (im vorigen erklärte) Äquivalenzrelation $y \equiv y+yz$ mit jedem Element $y\in A$ und mit jedem Element z des Hauptrechtsideals $(x)_r$ gilt.*

BEWEIS. Bezeichnen $B^{-1}C$ für beliebige Teilmengen B und C des Ringes A die Menge

$$\{w;\, w\in A,\ Bw\subseteqq C\}$$

und Φ_r das Frattinische Rechtsideal (d.h. den Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale) von A, so läßt sich nach HILLE [2] bzw. KERTÉSZ [4] $J=A^{-1}\Phi_r$ bestätigen.

Zuerst beweisen wir $K\subseteqq J$. Gilt nämlich $x\notin J$ für ein $x\in A$, so existieren wegen $x\notin A^{-1}\Phi_r$ ein Element $y\in A$ und ein maximales Rechtsideal R von A mit $yx\notin R$. Dann ergibt sich $A^2\nsubseteqq R$, $y\notin R$ und der A-Rechtsmodul A/R ist einfach. Folglich gibt es ein $u\in A$ mit $y+R = yxu+R$. Dann gilt wegen $z = -xu\in(x)_r$, und

$$(y+y(-xu))_r \subseteqq R \neq A = (y)_r+A$$

gewiß $x\notin K$.

Zweitens zeigen wir, daß auch $J\subseteqq K$ gilt. Ist nämlich $x\notin K$ für ein $x\in A$, so existieren Elemente $z\in(x)_r$ und $y\in A$, derart, daß $y+yz$ und y nicht äquivalent bezüglich $\equiv$ sind. Man erhält dann $(y)_r \neq (y+yz)_r$ und $(y)_r \supset (y+yz)_r$. Ist nun $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Rechtsideale R von A, für die

$$(y+yz)_r \subseteqq R \quad \text{und} \quad y \notin R$$

gelten, so ist $\mathfrak{M}$ nichtleer und induktiv. Es sei M ein maximales Rechtsideal aus $\mathfrak{M}$ (welches nach dem Zornschen Lemma existiert). Der A-Rechtsmodul A/M ist dann subdirekt irreduzibel, denn $(y)_r + M/M$ liegt in jedem von Null verschiedenen A-Teilmodul von A/M. Wegen $y \notin M$ und $y+yz \in M$ erhält man $(yz)_r + M = (y)_r + M$, weiterhin

$$(yz)_r + M \subseteqq y(x)_r + M \neq M.$$

Da $(y)_r + M/M$ ein einfacher A-Rechtsmodul ist, der von dem Radikal J annihiliert wird, gilt $x \notin J$.

Hiernach gilt $J=K$, womit der Satz bewiesen ist.

Bemerkung (am 27. August 1971): Übungsaufgabe 5.24 des Lehrbuches „Vorlesungen über Artinsche Ringe" von A. Kertész führt ein Radikal $K^*(M)$ für jeden A-Rechtsmodul M über einem Ring A ein. Nach dem Verfasser (Rings, which are radical modules; *Proc. Japan Acad.*, im Erscheinen) ist A dann und nur dann ein Jacobsonscher Radikalring, wenn A, als ein A-Rechtsmodul A angesehen, ein Radikalmodul ist, d. h. $K^*(A) = A$ gilt. Andererseits hat der Verfasser gezeigt (Notes on modules, III; *Proc. Japan Acad.* 46:3 (1970) 354—357), dass $K^*(A)$ klein Radikal, im Sinne von S. A. Amitsur und A. G. Kurosch, des Ringes A ist.

(Eingegangen am 28. Mai 1969, bearbeitet am 30. Januar 1970)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13—15.

Literaturverzeichnis

[1] W. A. Andrunakiewitsch, Antieinfache und streng idempotente Ringe, *Isv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.* **21** (1957) S. 125—144. (Russisch)
[2] E. Hille, Functional Analysis and Semi-Groups (Providence, 1948) *Amer. Math. Soc. Colloq, Publ.*, vol. **31**.
[3] N. Jacobson, Structure of Rings (Providence, 1964, 2. edition), *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, vol. **37**.
[4] A. Kertész, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**:4 (1963), S. 595—597.
[5] E. Sąsiada, Solution of the problem of existence of simple radical rings, *Bull. Acad. Polon. Sci.* Klasse III, **9** (1961), S. 257.
[6] F. Szász, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte f. Math.* **67** (1963), S. 359—362.