

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

3846

# Aufgaben metrischen Optik

ERSTER TEIL

# Linsen-Optik

von

**Dr. Alexander Gleichen**

Geheimer Regierungsrat



BERLIN 1917

Verlag der Central-Zeitung, Berlin W 57

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294458



# Uebungs-Aufgaben

aus der geometrischen Optik

---

---

Erster Teil

# Linsen-Optik

von

Dr. Alexander Gleichen  
Geheimer Regierungsrat

---

---

BERLIN 1917

Verlag der Zentral-Zeitung, Berlin W. 57

W. 500

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

II 3846

Druck von Rosenthal & Co., Berlin NW. 21

Akc. Nr. 593/50

## **Vorwort.**

---

Die nachfolgenden 143 Aufgaben aus der Linsenoptik mit ihren Lösungen sind eine Zusammenstellung der im Laufe des Jahres 1916 in der Centralzeitung für Optik und Mechanik veröffentlichten Aufgaben. Durch die gesonderte Herausgabe in Buchform hofft der Verfasser, diese Uebungen weiteren Kreisen in bequemer Form zugänglich zu machen.

**Berlin**, im Juni 1917.

**Dr. Alexander Gleichen.**

**Druckfehlerverzeichnis:**

Seite 7, Zeile 12, ist zu setzen „Objektseite“ an Stelle von „Objektivseite“.

Seite 40, Zeile 9, ist zu setzen „Bildes“ an Stelle von „Objektes“.

Seite 60 in der letzten Zeile ist  $M_2 A_2$  zu setzen an Stelle von  $M_1 A$ .

---

## Druckfehlerverzeichnis.

Es muß heißen:

- S. 6 Zeile 2 von unten: statt Objektivpunkt — Objektpunkt  
S. 7 Zeile 12 von oben: „ Objektivseite — Objektseite  
S. 10 Zeile 5 von unten: „ fernerer — — fernen  
S. 10 Zeile 1 von unten: „ deren — — — dessen  
S. 14 Fig. 10 muß auf der rechten Seite statt P der Punkt P' sein  
S. 15 Zeile 2 von oben: statt Bild — — — Objekt  
S. 15 Zeile 1 von unten: „ Q' S' — — — Q' P'  
S. 21 Zeile 6 von oben: „  $\infty$  — — —  $\frac{1}{\infty}$   
S. 21 Zeile 10 von unten: „ gleichzeitigen — gleichzeitigen  
S. 25 Zeile 13 von oben: „ v' — — — y'  
S. 30 Zeile 11 von oben: „ das — — — die  
S. 33 Zeile 3 von unten ist hinter „Objektgröße“ einzuschalten  
„zu Bildgröße“  
S. 40 Zeile 9 von oben: statt Objektes — — Bildes  
S. 52 Fig. 34 rechts muß es heißen statt F — F'  
S. 60 Zeile 1 von unten: statt M, A — — — M<sub>2</sub> A<sub>2</sub>  
S. 61 Zeile 2 von unten muß es heißen D = D<sub>1</sub> + D<sub>2</sub> — d. D<sub>1</sub> · D<sub>2</sub>  
S. 79 Fig. 49: der Punkt E liegt, wie in der Beschreibung ausgeführt, auf der Verlängerung von F<sub>1</sub> A  
S. 84 Zeile 2 von unten: statt Bintritts — — Eintritts  
S. 94 Zeile 3 von oben: „ Kathode — — Kathete  
S. 102 Fig. 60 muß es rechts statt u — — — u' heißen.





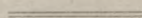
# Inhalts-Verzeichnis.

	Seite
Zur Einführung . . . . .	1
Kap. I. Grundsätze und Dioptrik einer dünnen Linse im idealen Strahlengange.	
§ 1. <b>Einleitung und Grundsätze.</b> Linsenformen — Abbildung eines Punktes — Brennpunkt — Brennebene — Parachialgebiet — Unendlich dünne Linsen . . . . .	5
§ 2. <b>Grundkonstruktionen an dünnen Linsen.</b> Verlauf parallelstrahliger Bündel bei einer Sammellinse — bei einer Zerstreuungslinse — Abbildung achsensenkrechter Objekte durch eine Sammellinse — durch eine Zerstreuungslinse — Gesichtswinkel . . . . .	10
§ 3. <b>Berechnung der Brennweiten dünner Linsen.</b> Vorzeichenregel — Brechungsexponent — Berechnung der Brennweite $f$ für verschiedene Linsenformen . . . . .	17
§ 4. <b>Berechnung von Lage und Größe der Bilder bei dünnen Linsen.</b> Beispiele für verschiedene Formen von Sammellinsen und Zerstreuungslinsen bei verschiedener Lage der Objekte — Windschiefe Lage der Objektebene — Windschiefe Geraden — Sekundäre Achsen — Anwendung auf das Sehen des menschlichen Auges durch ein Brillenglas . . . . .	22
§ 5. <b>Mehrere unendlich dünne im Kontakt befindliche Linsen.</b> Berechnung der Brennweite bei verschiedenen Linsenkombinationen . . . . .	36
§ 6. <b>Die Durchdringungsprobleme.</b> Virtuelle Objekte — Bestimmung von Lage und Größe des Bildes für virtuelle Objekte . . . . .	38

	Seite
§ 7. <b>Konvergenzverhältnis und Konstruktionen der Bilder mittels konjugierter Ebenen.</b> Maßstab der ähnlichen Abbildung $\beta$ — Konvergenzverhältnis $\gamma$ — Schnitthöhen eines Strahles in konjugierten Ebenen — Hauptebenen . . . . .	41
Kap. II. Der Strahlengang im paraxialen Gebiet für beliebig viele Linsen und für ein beliebiges zentriertes Linsensystem.	
§ 8. <b>Bestimmung des Bildes für den Fall eines Systems von Linsen oder brechenden Flächen.</b> Bildkonstruktion bei beliebigen auf einer Achse zentrierten Linsensystemen für gleiche und verschiedene Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums — Hauptebenen — Hauptpunkte — Knotenebenen — Knotenpunkte — Definition der Brennweiten mittels der Hauptpunkte — Abbildungsbeziehungen bezogen auf die Brennpunkte und Hauptpunkte . . . . .	46
§ 9. <b>Die Brechkraft und das Gullstrandsche System der Vergenzen.</b> Einführung der reduzierten Vergenz und der Brechkraft . . . . .	56
§ 10. <b>Die Konstruktion der Hauptpunkte in Sonderfällen.</b> Bestimmung der Lage der Hauptpunkte für eine Kombination von zwei brechenden Flächen — Kernpunkt — Größe der Brechkraft $D$ zweier dünner Linsen im Abstände $d$ . . . . .	57
§ 11. <b>Die Bedeutung der Vorzeichen in der geometrischen Optik. Das anschauliche und das rationelle System der Zählung.</b> Normalfiguren — positive und negative Strecken — Die Abbildungsbeziehungen im anschaulichen und rationalen System — Die Abbildungsbeziehungen bezogen auf beliebige konjugierte Punkte . . . . .	63
§ 12. <b>Berechnung von Brechkraft und Lage der Hauptpunkte bei Linsen von endlicher Dicke.</b> Berechnung der Brechkraft und der Lage der Hauptpunkte für verschiedene Linsenformen — Konzentrische Linsen — Nulllinse — Brechkraft einer Vollkugel — Berechnung der Brechkraft $\Delta$ einer Linse,	

	Seite
die beiderseits von einem Medium vom Brechungs- exponenten $n$ umgeben ist . . . . .	70
Kap. III. Die Strahlenbegrenzung.	
§ 13. <b>Die Eintritts- und Austrittspupille.</b> Blendenbilder — Wirksame Blende — Eintritts- pupille — Austrittspupille — Hauptstrahlen . . . . .	79
§ 14. <b>Die Pupillen und die Orthoskopie.</b> Neigung der bildseitigen Hauptstrahlen zur Achse — Bedingung für die Orthoskopie — Lage der ortho- skopischen Koinzidenzebene — Bestimmung des Ge- sichtsfeldwinkels — Eintrittsluke — Austrittsluke — Natürliche Fixpunkte — Bestimmung der [E. P.] und [A. P.] eines Systems . . . . .	81
Kap. IV. Der endliche Strahlengang.	
§ 15. <b>Brechung an ebenen Begrenzungsflächen.</b> Brechungsgesetz — Gang eines Strahles durch ein Prisma — Symmetrischer Durchgang des Strahles durch ein Prisma — Totale Reflexion . . . . .	89
§ 16. <b>Das Rechnen mit kleinen Winkeln.</b> Der Sinus kleiner Winkel — Umrechnung eines Winkels in Bogenmaß — Satz über kleine Winkel . . . . .	93
§ 17. <b>Die sphärische Aberration.</b> Idealer Strahlengang — Wahrer und endlicher Strahlengang — Definition der sphärischen Aber- ration — Seidelsches Gebiet — Fälle in denen die sphärische Aberration für einen Achsenpunkt voll- ständig aufgehoben ist . . . . .	96
§ 18. <b>Die Sinusbedingung und die aplanatische Abbildung.</b> Trigonometrische und geometrische Definition der Sinusbedingung — Sinuskreis — Aplanatische Punkte — Orthoskopische Punkte — Konstruktion der aplanatischen Punkte einer Kugelfläche — Konstruktion eines aplanatischen Körpers und einer aplanatischen Linse . . . . .	101
§ 19. <b>Kaustik und Koma.</b> Kaustische Linie oder Brennlinie — Fundamental- strahl — Koma . . . . .	110
§ 20. <b>Der Astigmatismus.</b> Astigmatismus bei torischen Flächen — Strahlen- gang durch eine torische Fläche — Abbildung von Objekten bei der astigmatischen Brechung — Me-	

	Seite
ridionalschnitt — Sagittalschnitt — Unterschiede zwischen der ersten und zweiten Form des Astigmatismus — Abbildungsbeziehungen im sagittalen und meridonalen Teile eines astigmatischen Bündels	113
§ 21. <b>Die astigmatischen Bildflächen.</b> Abbildung einer Objektebene durch unendlich dünne astigmatische Bündel — Gesetze über die Krümmung der astigmatischen Bildflächen — Satz von Petzval! — Berechnung eines Meniskus mit ebenem Bildfeld . . . . .	124
§ 22. <b>Die Dispersion.</b> Brechungsexponent $n_D$ — Mittlere Dispersion — Achromatisches Linsensystem — Berechnung eines achromatischen Prismas — Formel für das achromatische Prisma — Berechnung der Werte $n_F$ und $n_C$ für Kronglas — Bestimmung der Brennweiten eines Meniskus aus Kronglas für die Brechungsexponenten $n_D$ , $n_C$ und $n_F$ . . . . .	128
§ 23. <b>Die Achromasie.</b> Achromatisches Linsensystem — Bedingung für achromatische Kombination — Berechnung der einzelnen Brennweiten $f_1$ und $f_2$ eines achromatischen Systems mit der Gesamtbrennweite $f$ — Berechnung der Radien eines Achromaten — Bedingung für die Achromasie der Brennweiten zweier dünner Linsen — Ramsdensche Okulare — Huyghenssche Okulare — Berechnung eines Achromaten, der die Petzvalbedingung erfüllt . . . . .	132



## Zur Einführung.

Der Zweck der nachfolgenden Aufgaben mit ihren Lösungen ist, den angehenden Optiker, sowohl den Mann in der Werkstatt als auch den Verkäufer optischer und ophthalmologischer Waren in die Grundlehren dieser Wissenschaft einzuführen und ihn womöglich zu einer selbständigen Beurteilung der wichtigsten Einzelfälle hinzuleiten. Nach den persönlichen Erfahrungen des Verfassers besteht gerade bei den Optikern ein lebhafter Wunsch, sich über die Einzelvorgänge klar zu werden und sie womöglich zu beherrschen. Es liegt dies wohl an der Eigenart des optischen Instrumentes, das vom einfachen Brillenglas bis zu den Wunderwerken moderner Technik, wie wir sie z. B. in den großen astronomischen Fernrohren und den zusammengesetzten Mikroskopen besitzen, dem Menschen gewissermaßen persönlich näher steht als andere technische Erzeugnisse; denn sie dienen dazu, das große befreiende Geschenk der Natur, den Gesichtssinn, ins Wunderbare zu steigern. Der Mensch, welcher mit derartigen Instrumenten täglich beschäftigt ist, sei es bei der Herstellung oder beim Vertrieb, gewinnt ein höheres Interesse daran, als dies bei vielen anderen Erzeugnissen der Technik der Fall ist. Und dieses Interesse führt ihn naturgemäß zu der Frage, auf welche Weise es gelingt, die wunderbare Naturkraft „Licht“ in den Dienst der Befriedigung menschlicher Bedürfnisse zu

stellen. Aber bei der Beantwortung dieser Frage bieten sich große Schwierigkeiten. Die Optik nimmt unter den Ingenieurwissenschaften eine ganz besondere Stellung ein. Hier sieht man nicht, wie bei den auf den Gesetzen der Statik und Kinematik aufgebauten Maschinen, die Uebertragung der Kräfte durch Hebel, Schrauben, Zahnräder usw., bis zu dem gewünschten Endergebnis, sondern fast geheimnisvoll verwirren und entwirren sich die unmateriellen Lichtwirkungen, um letzten Endes auf der Netzhaut unseres Auges den Sehakt auszulösen. Und doch ist in einem gewissen Sinne die Optik die einfachste aller Wissenschaften, insofern als sie auf ganz wenigen und ganz einfachen Zahlen- und Maßbeziehungen beruht, aus denen sich der volle Reichtum ihrer Erscheinungen mittels der Geometrie und Algebra entwickeln läßt. In dieser Exaktheit ist sie der reinen Mathematik vergleichbar. Andererseits bieten aber die geometrisch-optischen Probleme insofern große Schwierigkeiten, als sie fast unüberwindliche Anforderungen an die mathematischen Leistungen stellen. So ist man z. B. bei dem heutigen hohen Stande der mathematischen Forschung kaum imstande, den Verlauf der Lichtstrahlen, die von einem Punkte ausgehen und durch eine Linse gebrochen werden, allgemein vollständig mathematisch darzustellen. Mit der Häufung der Linsen zu Systemen wachsen diese Schwierigkeiten noch außerordentlich. Aber diese Schwierigkeiten haben gerade den Anreiz gegeben zu immer neuen Untersuchungen. Fast alle großen Mathematiker haben sich denn auch mit dem Problem der optischen Abbildungslehre beschäftigt. Es sei nur auf die Namen: Newton, Huyghens, Lagrange, Euler und Gauß hingewiesen.

Unbekümmert um diesen hohen Flug mathematischer Forschung sind aber die praktischen Optiker seit über hundert Jahren ihren eigenen Weg gegangen, indem sie

auf dem Wege der systematischen Versuche die Linsensysteme aufgebaut haben. Sie sind dabei zu Ergebnissen gekommen, die sehr beachtenswert sind, und zu denen man, wenigstens bis vor mehreren Jahrzehnten, auf mathematisch-analytischem Wege kaum gelangt wäre. In diesem Sinne soll der berühmte Helmholtz einmal geäußert haben: „Die Optiker haben so ihre eigenen Kniffe.“

Seit mehreren Jahrzehnten haben sich jedoch diese Verhältnisse geändert. Es war namentlich das Genie eines Abbe, das den Strom wissenschaftlicher Forschung befruchtend in die optische Praxis hinübergeleitet und so eine neue Blütezeit der Optik herbeigeführt hat.

Unter den angedeuteten Umständen könnte es aussichtslos erscheinen, jemanden, der nur über die allerersten Anfangsgründe der Geometrie und Algebra verfügt, in die optischen Lehren auch nur bis zu einem gewissen Grade einweihen zu wollen. Dem ist jedoch nicht so! Die Theorie der optischen Instrumente gestattet in vielen Fällen eine derartige Vereinfachung der Auffassung der Verhältnisse, sogenannte Fiktionen, um einen Gullstrandschen Ausdruck zu gebrauchen, daß jemand nur mit Zirkel und Lineal sich eine verhältnismäßig tiefe Einsicht verschaffen kann. Daß gerade die Optik hierfür das geeignete Gebiet ist, beweist die Tatsache, daß Kepler eine richtige Theorie der optischen Abbildung liefern konnte, ohne das Brechungsgesetz zu kennen.

In der Tat werden wir später Gelegenheit haben, zu bemerken, daß wir zur Konstruktion optischer Instrumente, soweit es sich nicht um die Korrekturen des Strahlenganges handelt, des Brechungsgesetzes gar nicht bedürfen. Unter einem bestimmten Gesichtspunkt betrachtet, stellt sich dieser Teil der Optik lediglich als ein rein geometrisches Problem dar.

Man könnte einwenden, daß jedes Lehrbuch der Physik die Anfangsgründe der Optik enthält, und daß für

den Weiterstrebenden eine reiche Auswahl von Lehrbüchern über geometrische Optik und die Theorie optischer Instrumente zur Verfügung steht. Das Studium der Optik, wie sie z. B. in den physikalischen Lehrbüchern für unsere höheren Schulen dargestellt wird, liefert gewiß einen sehr nützlichen Ueberblick, den sich jeder Optiker verschaffen sollte. Aber die Darstellung hört doch eigentlich dort auf, wo die Bedürfnisse des in der Praxis stehenden Optikers anfangen. Auf der anderen Seite bietet das Eindringen in die Fachlehrbücher für den Nichtmathematiker außerordentliche Schwierigkeiten, weil diese Bücher, von hoher Warte aus geschrieben, das Rüstzeug der Mathematik meist als selbstverständliche Voraussetzung hinstellen.

Manche dieser Lehrbücher kann der wissensdurstige Mann der Praxis nur mit einem Gemisch von Bewunderung und Hoffnungslosigkeit betrachten, wenn er sieht, wie Formel auf Formel sich drängt und diese immer neue Formeln gebären.

Außerdem bietet gerade die in Aussicht genommene Form von Frage und Antwort resp. von Aufgabe und Lösung den Vorteil, daß dem Leser das Wissensgebiet in kleinen Ausschnitten geboten wird und er Gelegenheit hat, daran seine Kräfte zu üben, ohne durch den Blick auf die Fülle des zu Ueberwindenden mutlos gemacht zu werden.

Nun noch ein Wort über die Methodik, d. h. über die Frage, wo und wie man den Lehrstoff angreifen und bearbeiten soll. Das Natürlichste wäre, daß man „von vorn“ anfängt. Der Verfasser ist jedoch anderer Ansicht. Er wird versuchen, den Leser sofort mitten in die Sache zu führen, und zwar in die Linsenoptik, beginnend mit den Eigenschaften einer Einzellinse und dann fortschreitend zum Aufbau optischer Instrumente.

---



## Kap. I. Grundsätze und Dioptrik einer dünnen Linse im idealen Strahlengange.

### § 1. Einleitung und Grundsätze.

Den nachfolgenden Aufgaben aus dem Gebiete der Linsenoptik und der optischen Instrumente schicken wir einige Erklärungen voraus, die wir diejenigen Leser besonders zu beachten bitten, die sich an den nachfolgenden Aufgaben der praktischen Optik fortlaufend beteiligen wollen. Diese Erklärungen, so selbstverständlich und allgemein bekannt sie scheinen, bilden die Grundlage, auf der sich das ganze weitere Lehrgebäude aufbaut, fast mit derselben Sicherheit, mit der die mathematischen Wissenschaften auf ganz wenigen, uns als Selbstverständlichkeiten erscheinenden Axiomen über Maß und Zahl ruhen.

Jeder unserer Leser weiß, was man unter einer optischen Linse versteht, und daß man 6 verschiedene Formen derselben unterscheidet, die in Fig. 1 unter 1 bis 6 dargestellt sind.

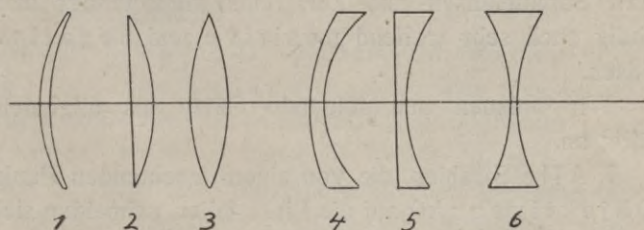


Fig. 1.

Jede ist von einer vorderen und einer hinteren Fläche begrenzt, deren Mittelpunkte alle auf der optischen Achse liegen, die wir auch schlechthin als „Achse“ bezeichnen. Eine durch die Achse gelegte Ebene nennt man einen Hauptschnitt. Ein solcher Hauptschnitt wird in Fig. 1 durch die Papierebene dargestellt. Die dargestellten Figuren sind also Linsenquerschnitte. Den Linsenkörper selbst kann man erhalten, wenn man diese Querschnitte um die Achse rotieren läßt.

Die sechs Linsen zerfallen in zwei Gruppen, 1—3 und 4—6. Die ersteren sind sogenannte Sammellinsen, d. h. sie sammeln die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Lichtstrahlen wieder nach einem Punkt hin. Außerlich erkennt man sie daran, daß sie in der Mitte dicker als am Rande sind. Ihre Namen sind der Reihe nach: Sammelnder Meniskus, plankonvexe Linse, bikonvexe Linse.

Die Linsen der zweiten Gruppe (4—6) sind in der Mitte dünner, als am Rande und heißen Zerstreuungslinsen, und zwar der Reihe nach Zerstreuender Meniskus, plankonkave Linse, bikonkave Linse.

Das Licht, welches von einem Punkte auf eine Zerstreuungslinse fällt, wird zerstreut und zwar so, als käme es von einem Punkte vor der Linse. Die Richtung des Lichtes soll im allgemeinen von links nach rechts sein. Statt Sammellinsen und Zerstreuungslinsen sagt man häufig auch sehr treffend positive und negative Linsen.

Wir nehmen nun folgende Sätze als allgemein gültig an.

I. Alle Strahlen, die von einem leuchtenden Punkt (Objektivpunkt) auf die Linse fallen, schneiden sich nach der Brechung (entweder direkt oder rückwärts ver-

längert) in einem Punkte (Bildpunkt). Man nennt diesen Vorgang die Abbildung eines Punktes. Objektpunkt und zugehöriger Bildpunkt werden auch konjugierte Punkte genannt.

II. Alle in einer achsensenkrechten Ebene gelegenen Punkte bilden sich wiederum in einer achsensenkrechten Ebene ab. Solche Ebene nennt man konjugiert.

III. Alle achsenparallel, also von einem unendlich fernen Punkt her einfallenden Strahlen, schneiden sich nach der Brechung in einem Punkte, den man den Brennpunkt nennt. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, je nachdem man das Licht von der Objektseite oder der Bildseite her einfallen läßt; den ersteren nennt man den bildseitigen oder hinteren Brennpunkt ( $F'$ ), den andern den objektseitigen oder vorderen ( $F$ ). Achsensenkrechte Ebenen durch  $F'$  und  $F$  heißen Brennebenen oder Fokalebene. Diesen Ebenen sind konjugiert die unendlich ferne achsensenkrechte Objektebene und die unendlich ferne Bildebene. Da von einem unendlich fernen Punkt herkommende Strahlen als untereinander parallel angesehen werden können, so kann man auch sagen, daß alle zu einander parallelen Strahlen nach der Brechung durch eine Linse in einem Punkte der hinteren Fokalebene vereinigt werden.

IV. Punkte einer geraden Linie werden wieder als Punkte einer geraden Linie abgebildet.

V. Punkte einer Ebene werden wieder als Punkte einer Ebene abgebildet.

Aus der Erfahrung hat man gefunden, daß diese fünf Sätze in erster Annäherung für eine jede Linse gelten, ja sogar für eine beliebige Zusammenstellung solcher Linsen auf einer optischen Achse, d. h. für die meisten optischen und ophthalmologischen Instrumente. Man kann mit Gullstrand die Sätze als „Fiktionen“, also gewissermaßen „Erdichtungen“ auffassen, denen keine

wirklichen Verhältnisse voll entsprechen. Sie haben aber deshalb einen so großen Wert, weil der wirkliche Strahlengang in Linsen und Linsensystemen sich nach ihnen umso mehr richtet, je näher die Strahlen der optischen Achse verlaufen. Jener, streng genommen, unendlich dünne, fadenförmige Raum um die optische Achse herum, heißt das paraxiale Gebiet. Der Strahlengang heißt in diesem Falle ideal.

Die Freiheit, die wir uns nehmen, besteht also lediglich darin, daß wir für ein endlich ausgedehntes Gebiet gelten lassen, was nur für ein unendlich beschränktes Gebiet gilt.

In Fig. 2 ist eine Linse dargestellt mit den beiden Scheiteln  $S_I$  und  $S_{II}$ , in denen die Achse die Flächen

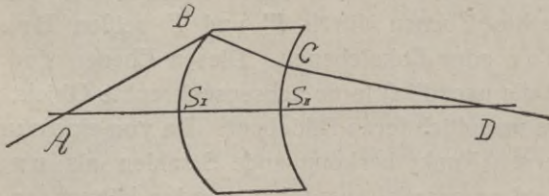


Fig. 2

durchdringt, und einem auf die Linse fallenden und sie durchdringenden Strahl  $A B C D$ .

Wir machen nun die weitere Annahme, daß wir die Dicke der Linsen, d. h. die Strecke  $S_I S_{II}$  in Fig. 2 ver-

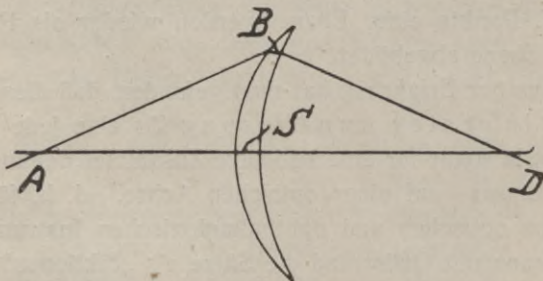


Fig. 3.

nachlässigen können, und schaffen somit eine neue Fiktion, die der unendlich dünnen Linse, die uns sehr nützlich sein wird.

Indem wir uns vorstellen, daß die Linsenflächen einander ganz nahe rücken, können wir die Strahlenwege innerhalb der Glasmasse überhaupt vernachlässigen, so auch z. B. den Strahlenweg  $BC$  in Fig. 2. Es schrumpfen die Strecken  $S_I S_{II}$  und  $BC$  in Fig. 2 zu Punkten  $S$  und  $B$  zusammen, wie Fig. 3 dies zeigt. Die unendlich dünne Linse, oder wie wir öfters kurz sagen werden, die „dünne“ Linse, hat also nur einen einzigen Scheitel  $S$ . Fällt ein Strahl  $AB$  (Fig. 2) auf dieselbe, so geht auch der von der Linse (mittels zweier Brechungen an den beiden Linsenflächen) gebrochene Strahl vom Punkte  $B$  aus. Im Punkte  $B$  haben wir also einen Punkt, der sowohl dem auf die Linse fallenden, als auch dem die Linse verlassenden Strahl angehört. Diese Bemerkung wird sich als besonders wichtig erweisen.

Unsere 5 Regeln fügen wir noch zwei neue hinzu, die jedoch nur für dünne Linsen gelten.

VI. Ein auf den Scheitel  $S$  einer dünnen Linse fallender Strahl durchdringt dieselbe, ohne seine Richtung zu verändern.

VII. Der hintere und der vordere Brennpunkt einer dünnen Linse haben ein und dieselbe Entfernung vom Linsenscheitel, die man die Brennweite nennt.

Wir werden in Folgendem häufig eine dünne Linse durch einen stärkeren achsensenkrechten Strich bezeichnen, über dem der Buchstabe  $L$  und ein Plus- oder Minus-Zeichen gesetzt ist, je nachdem es sich um eine positive (sammelnde) oder negative (zerstreuende) Linse handelt.

In Fig. 4 u. 5 sind zwei solcher Linsen dargestellt.  $S$  stellt den Scheitel,  $F'$  und  $F$  den hinteren und vorderen Brennpunkt vor. Bildpunkte und -Bilder, die infolge der Schnittpunkte der Strahlen wirklich vorhanden sind.

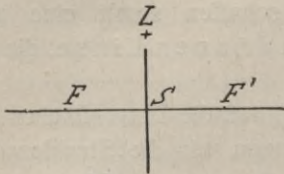


Fig. 4.

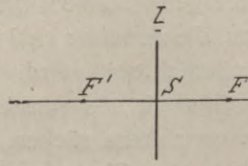


Fig. 5.

heißen reell, dagegen solche, die nur in der gedachten Verlängerung vorhanden sind, virtuell. Wenn das Licht von links nach rechts auf die Linse fällt, liegen die reellen Bilder rechts, die virtuellen links von der Linse.

## § 2. Grundkonstruktionen an dünnen Linsen.

**Aufgabe 1.** Zeichne den Verlauf der von einem unendlich fernen Achsenpunkte (z. B. einem Stern) auf eine dünne Sammellinse fallenden Strahlen.

**Lösung.** Die von einem unendlich fernen Achsenpunkte ausgehenden Strahlen erscheinen in der Nähe der

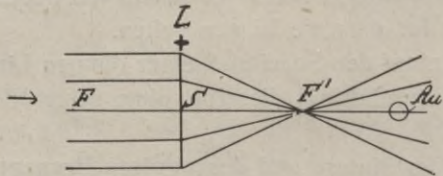


Fig. 6.

Linse  $L$  (Fig. 6) als ein System achsenparalleler Geraden, die nach Satz III sämtlich nach dem hinteren Brennpunkt  $F'$  gebrochen werden, wie dies in Fig. 6 gezeichnet ist.  $F'$  stellt das sogenannte reelle Bild des fernerer (unendlichfernen) Punktes dar. Man kann den Punkt auf einer Mattscheibe auffangen und ihn dann von allen Seiten betrachten oder ihn direkt mit dem Auge ansehen, deren Pupille bei  $Au$  gezeichnet ist.

**Erklärung:** Das menschliche normale (emmetropische) Auge, dessen genauere Einrichtung wir erst später kennen lernen werden, sieht alle Objekte scharf von „Unendlich“ bis zu einem bestimmten, dem Auge nahen Punkt, dem sog. Nahpunkt. Mit demselben Auge sehen wir die (optisch) unendlich fernen Sterne sowie eine Schrift in etwa 10 cm vom Auge scharf, allerdings nicht gleichzeitig, sondern infolge einer stärkeren Krümmung der brechenden Flächen der im Auge befindlichen sogen. Kristallinse, nach einander. Dieser Vorgang heißt die *Akkommodation* des Auges.

Der Nahpunkt liegt bei ganz jungen Menschen etwa 7 cm vom Auge entfernt, rückt aber mit fortschreitendem Alter weiter weg. Die Entfernung beträgt im Mittel z. B. bei

20	30	40	50	60	Jahren
10	14	22	40	200	cm

Damit das Auge in Fig. 6 den Bildpunkt  $F'$  scharf sieht, muß die Strecke  $F'A$  gleich oder größer als der Nahpunktabstand des betr. Auges sein. Bemerket sei, daß ein Mensch eine zu lesende Schrift gewöhnlich nicht in die möglichst größte Nähe, sondern in eine Entfernung von etwa 25 cm bringt, die man als „bequeme Leseweite“ oder auch „deutliche Sehweite“ bezeichnet. Gemäß Fig. 6 kann aber das Auge nur den Punkt  $F'$  sehen, wenn es sich innerhalb des von  $F'$  nach rechts hin ausgehenden Strahlenkegels befindet, da sonst kein Licht in die Pupille des Auges gelangt.

**Aufgabe 2.** Zeichne den Verlauf der von einem fernen Achsenpunkte (also achsenparallel) auf eine Zerstreuungslinse fallenden Strahlen.

**Lösung:** Die auf die —  $L$  fallenden parallelen Strahlen verlassen, wie Fig. 7 zeigt, die Linse divergent und so, als kämen sie von dem sogenannten hinteren Brennpunkt  $F'$ , der jedoch im Falle einer Zerstreuungslinse

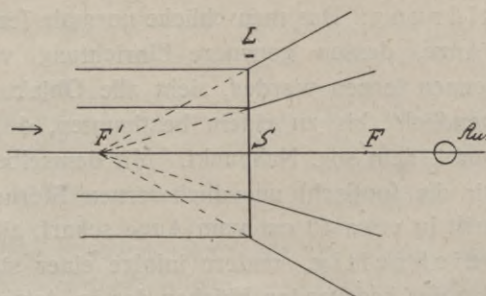


Fig. 7.

vor der Linse liegt. Der Punkt  $F'$  ist virtuell. Das in die Linse hineinschauende Auge  $Au$  sieht den Punkt  $F'$ , sofern  $F'Au$  gleich oder größer als der Nahpunkt-  
abstand des betr. Auges ist.

**Aufgabe 3.** Zeichne das durch eine Sammellinse entworfene Bild eines leuchtenden Punktes  $Q$ .

**Lösung.** Die Linse  $+L$  sei wieder durch eine achsensenkrechte Strecke dargestellt.  $F'$  sei der hintere Brennpunkt,  $S$  der Scheitel der Linse.

Man verfolge von den unendlich vielen von  $Q$  ausgehenden Strahlen, die sich sämtlich im Bildpunkt  $Q'$  vereinigen müssen, zunächst zwei, deren Verhalten nach der Brechung wir aus Satz VI und III kennen, nämlich

1. den Strahl  $QS$ , welcher unverändert weitergeht und
2. den achsenparallelen Strahl  $QA$ , der nach der Brechung durch  $F'$  gehen muß.

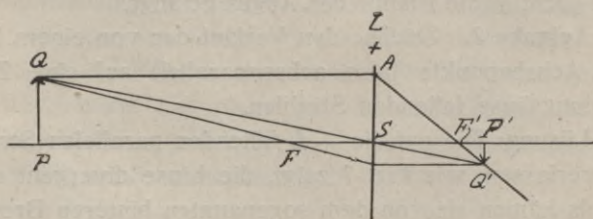


Fig. 8.



Diese beiden Strahlen schneiden sich nach der Brechung, wie Fig. 8 lehrt, in  $Q'$ , dem gesuchten Bildpunkt.

Wir hätten auch den Strahl  $QF$  verwenden können; derselbe muß, da er durch den vorderen Brennpunkt geht, nach der Brechung achsenparallel verlaufen. Sein Schnittpunkt mit der verlängerten  $QS$  muß also ebenfalls  $Q'$  ergeben.

**Aufgabe 4.** Konstruiere das von einem achsensenkrechten Objekt durch eine Sammellinse entworfene achsensenkrechte Bild.

**Lösung:** Wenn wir in Fig. 8 das Lot  $QP$  fällen und dieses als Objekt auffassen, so ist nach Satz II das von  $Q'$  auf die Achse gefällte Lot  $P'Q'$  das zugehörige Bild. Dasselbe ist reell und umgekehrt. Es sind also in Fig. 8 sowohl  $P$  und  $P'$  als auch  $Q$  und  $Q'$  konjugierte Punkte.

**Aufgabe 5.** Welche Veränderungen erleidet das Bild, wenn man ein Objekt von großer Entfernung bis zur Sammellinse heran bewegt?

**Lösung.** In großer Entfernung erzeugt die  $(+L)$  ein umgekehrtes, reelles, verkleinertes Bild, wie dies aus Fig. 8 bereits ersichtlich ist. Nähert sich  $PQ$  soweit, daß  $PS$  doppelt so groß wie  $FS$ , also gleich der doppelten Brennweite ist, so wird  $PQ = P'Q'$ . Bild und Objekt sind also gleich groß, wie die Ausführung der Konstruktion nach Fig. 9 zeigt. In diesem Falle ist auch die Objektentfernung  $PS$  gleich der Bild-

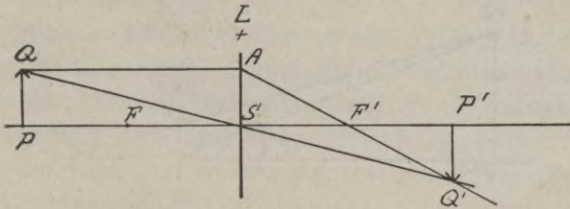


Fig. 9.

entfernung  $P'S$ . Man nennt dies „Abbildung auf gleiche Größe“. (Bei der Vergrößerung von Photographieen ist es eine bekannte Regel, daß die Vergrößerung 1 entsteht, wenn man die zu vergrößernde Photographie in die doppelte Brennweite bringt.)

Bei noch weiterer Annäherung des Objectes an  $F$  wird  $P'Q'$  schnell größer und entfernt sich nach rechts von  $F'$ , wie dies durch Fig. 10 dargestellt ist. Die Linse ( $+L$ ) wirkt in diesem Falle als Projektionsapparat.

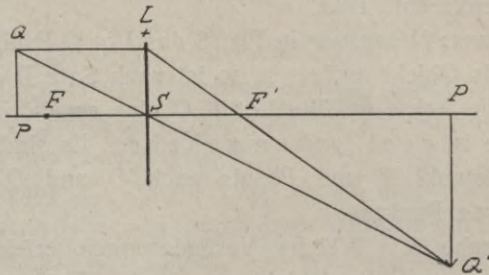


Fig. 10.

Sobald das Objekt  $PQ$  in die vordere (durch  $F$  gehende) Brennebene tritt, geht das Bild ins Unendliche, was sich dadurch zeigt, daß die Geraden  $AF'$  und  $QS$  einander parallel werden. Nähert sich  $PQ$  noch mehr der Linse, so springt das Bild  $P'Q'$  aus der rechten nach der linken Unendlichkeit um und nähert sich als virtuelles vergrößertes und aufrechtes Bild von links nach rechts der Linse (Fig. 11).

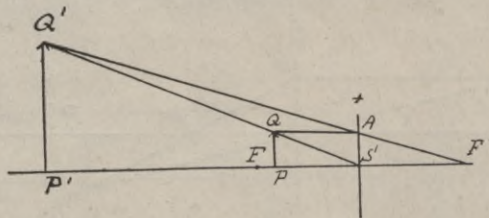


Fig. 11.

Schnell der Linse zueilend, holt das Bild das langsamer sich fortbewegende Bild gerade in dem Augenblick ein, wo das Objekt sich dicht an der Linse befindet. Objekt und Bild fallen also in dem (als unendlich dünn gedachten) Linsenkörper zusammen. Da wir uns die Linse selbst als eine achsen senkrechte Ebene vorstellen, so ist die letztere also sich selbst konjugiert, das heißt, sie stellt mit allen darin enthaltenen Punkten Objekt und Bild zugleich dar. Bemerket sei noch einmal, daß man die virtuellen Bilder nur sieht, wenn man von links in die Linse hineinsieht.

**Aufgabe 6.** Konstruiere das von einer Zerstreuungslinse (Negativlinse) entworfene Bild eines achsen senkrechten Objektes.

**Lösung.** Die Lösung ist dieselbe wie in Aufgabe 4, wenn man beachtet, daß der zur Konstruktion benutzte

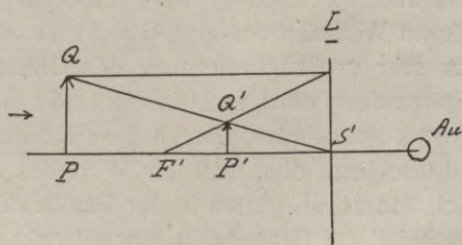


Fig. 12.

bildseitige (vordere) Brennpunkt  $F'$  auf der linken Seite der Linse liegt. Gemäß Fig. 12 zieht man also  $QA$  achsenparallel und verbindet  $A$  mit  $F'$ . Wo diese Verbindungslinie von der Geraden  $QS$  geschnitten wird, liegt der Bildpunkt  $Q'$  und das Lot zur Achse  $Q'S'$  ist

das gesuchte Bild. Es ist virtuell aufrecht und verkleinert.

**Aufgabe 7.** Welche Veränderungen erleidet das durch eine Zerstreungslinse entworfene Bild, wenn man das Objekt bis an die Linse heranhöhrt?

**Lösung:** Wie die Betrachtung der Fig. 12 unmittelbar lehrt, wird das virtuelle Bild beständig größer und nähert sich der Linse, wenn man das Objekt an die Linse heran führt. An der Linse selbst sind, wie bei der Sammellinse, Bild und Objekt gleich groß. Die Linsenebene ist also auch hier sich selbst konjugiert.

Ein von der Bildseite her in die Linse hineinschauendes Auge sieht das Bild  $P'Q'$  scharf, wenn die Entfernung  $P'Au$  gleich oder größer als der Nahpunkt-  
abstand des Auges ist.

**Erklärung:** Die dargestellten Konstruktionen sind unausführbar für unendlich ferne Objekte. Bei unendlich (sehr) fernen Objekten pflegt man den Winkel  $w$  einzuföhren, unter welchen dasselbe unserem Auge erscheint. Diesen Winkel nennt man Gesichtswinkel. Wegen der sehr großen Entfernung des Objektes kann man die Spitze des Gesichtswinkels in jedem beliebigen Punkt annehmen, der in der Nähe der abbildenden Linse liegt, ohne daß der Wert des Gesichtswinkels sich ändert, also etwa in der Pupille des Auges, im Linsenscheitel, im Brennpunkt usw. Denkt man sich das unendlich ferne Objekt achsensenkrecht, so kommt die Achse vom untersten, der freie Schenkel des Gesichtswinkels vom obersten Punkte des Objektes.

**Aufgabe 8.** Konstruiere für eine Sammellinse das Bild eines unendlich fernen achsensenkrechten Objektes, das unter dem Winkel  $w$  erscheint.

**Lösung:** Man zeichne einen unter dem Winkel  $w$  einfallenden, durch  $S$  gehenden Strahl und verlängere ihn, bis er die bildseitige (durch  $F'$  gelegte) Fokalebene

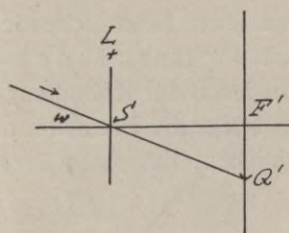


Fig. 13.

in  $Q'$  schneidet, dann ist (Fig. 13) die Strecke  $Q'F'$  das gesuchte Bild; denn der einfallende, durch  $S$  gehende Strahl, der vom oberen Rande des unendlich fernen Objektes kommt, geht ungebrochen durch die Linse. Da nun ferner alle unendlich fernen Punkte nach Satz III in der  $F'$ -Ebene abgebildet werden, so muß Punkt  $Q'$  dort liegen, wo der durch  $S$  gehende Strahl die  $F'$ -Ebene schneidet. Das Bild  $F'Q'$  ist reell und umgekehrt.

**Aufgabe 9.** Wo liegt das von einer Zerstreuungslinse entworfene Bild eines unendlich fernen, unter dem Winkel  $w$  erscheinenden Objektes?

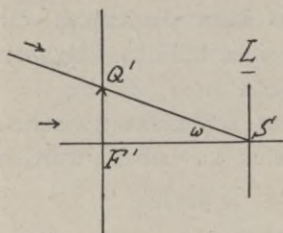


Fig. 14.

**Lösung.** Die Lösung entspricht vollständig der Aufg. 8, nur mit dem Unterschied, daß die bildseitige Fokalebene ( $F'$ -Ebene) auf der linken Seite, also vor der Linse liegt (Fig. 14). Das Bild ist virtuell und aufrecht.

### § 3. Berechnung der Brennweite dünner Linsen.

**Erklärung.** Die Brennweiten  $F'S = FS$  einer dünnen Linse hängen von den Brechungsexponenten  $n$  des Glasmaterials ab und außerdem von der Lage und Krümmung der begrenzenden Flächen.

Der Radius einer Fläche wird positiv gerechnet, wenn diese dem ankommenden Lichte ihre gewölbte (konvexe) Seite darbietet, wie in Fig. 15, negativ, wenn sie dem Lichte ihre hohle (konkave) Seite zuwendet (Fig. 16).

Jede Glassorte, wie überhaupt jeder lichtbrechende Körper, hat einen sogenannten Brechungs-  
exponenten.<sup>1)</sup> Von diesem und von der Krümmung  
und Lage der brechenden Flächen hängt die Brennweite  
einer Linse ab. Bei den gebräuchlichen Glassorten liegt

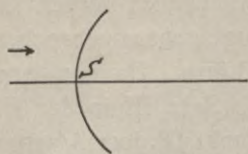


Fig. 15.

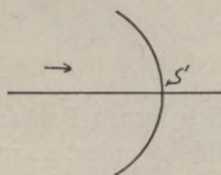


Fig. 16.

der Wert des Brechungsindex etwa zwischen 1,48  
und 1,63. Für ein und dieselbe Glassorte hat derselbe  
für verschiedene Farben etwas verschiedene Werte.  
Unter mittleren Brechungsindex ( $n_D$  oder auch  
schlechtweg  $n$  genannt) versteht man denjenigen für  
gelbes Licht. Weiteres hierüber siehe bei den Aufgaben  
über „Dispersion“ und „Achromasie“.

Der Wert  $n$  für Brillengläser schwankt zwischen  
1,51 und 1,53. Um einfache Zahlen zu haben, werden  
wir in Folgendem häufig  $n = 1,5 = \frac{3}{2}$  setzen.

**Aufgabe 10.** Berechne die Brennweite  $f$  einer dün-  
nen Linse vom Brechungsindex  $n$  und den Radien  
 $r_1$  und  $r_2$  der vorderen und hinteren Fläche.

**Lösung:** Man berechnet  $f$  nach der Gleichung:<sup>2)</sup>

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad 1)$$

wo  $r_1$  und  $r_2$  positiv sind, wenn es sich um ein positives  
oder negatives meniskenförmiges Glas handelt  
(vergl. z. B. Fig. 17), das dem ankommenden Lichte seine  
konvexe Seite entgegenstellt.

<sup>1)</sup> Die sogenannten doppelbrechenden Körper haben sogar  
zwei Brechungsindex.

<sup>2)</sup> Ueber die Herleitung dieser Gleichung siehe z. B.  
Gleichen u. Klein: Schule der Optik. S. 62.

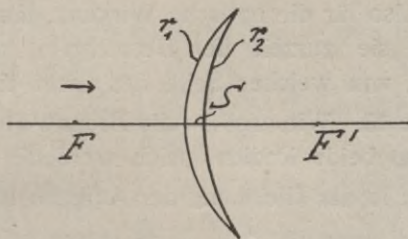


Fig. 17.

**Aufgabe 11.** Wie groß ist die Brennweite  $f$  eines positiven Meniskus, wenn  $r_1 = 10$  cm und  $r_2 = 20$  cm ist und man  $n = 1,5$  setzt?

**Lösung:** Die Gleichung in Aufgabe 10 liefert

$$\frac{1}{f} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \right) = 0,5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

oder  $f = 40$  cm (vergl. Fig. 17).

**Aufgabe 12.** Wie groß ergibt sich die Brennweite derselben Linse (Aufgabe 11), wenn man sie umwendet, so daß sie dem Lichte die konkave Seite zuwendet (vergl. Fig. 18).

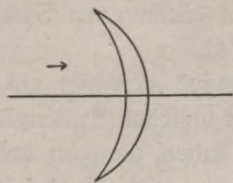


Fig. 18.

**Lösung:** Da jetzt  $r_1$  und  $r_2$  vertauscht sind und beide Flächen ihre konkaven Seiten dem ankommenden Lichte entgegen stellen, so ist zu setzen:

$$r_1 = -20 \text{ cm} \quad r_2 = -10 \text{ cm}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (1,5 - 1) \left[ \left( -\frac{1}{20} \right) - \left( -\frac{1}{10} \right) \right] \\ &= (1,5 - 1) \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \right) \end{aligned}$$

also wie oben:  $f = 40$  cm.

Es ist also für die optische Wirkung dünner Linsen, soweit wir sie zurzeit der Betrachtung unterziehen, gleichgültig, von welcher Seite das Licht einfällt.

**Aufgabe 13.** Wie groß ist die Brennweite eines Meniskus, wenn beide Radien gleich werden?

**Lösung:** In der Gleichung der Aufgabe 10 wird jetzt  $r_1 = r_2$  und demnach  $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$  zu setzen sein, wodurch die rechte Seite den Wert Null annimmt. Daraus folgt:

$$\frac{1}{f} = 0.$$

hat aber ein Bruch den Wert Null, so muß, da der Zähler im vorliegenden Falle einen von Null verschiedenen Wert hat, der Nenner den Wert „Unendlich“ ( $\infty$ ) haben. Also ist

$$f = \infty.$$

Der Brennpunkt der Linse liegt im Unendlichen. Die Linse wirkt wie ein Planglas.

**Aufgabe 14.** Wie groß ist die Brennweite einer gleichseitigen bikonvexen Sammellinse vom Radius  $r$ ?

**Lösung:** Es handelt sich hier um die Form, wie sie die früher allgemein üblichen Brillengläser, die sogenannten „Bigläser“, haben, die man auch jetzt noch neben den meniskenförmigen vielfach benützt. Man hat zu setzen

$$r_1 = r \text{ und } r_2 = -r,$$

da ja die hintere Fläche dem Lichte die konkave Seite zuwendet. Man erhält:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left[ \frac{1}{r} - \left( -\frac{1}{r} \right) \right] = (n - 1) \cdot \frac{2}{r}$$

oder

$$f = \frac{r}{2(n - 1)}$$

Für  $n = 1,5$  ergibt sich

$$f = r$$



Für  $n = 1,5$  ist also die Brennweite eines gleichseitigen Biglases gleich dem Radius.

**Aufgabe 15.** Wie groß ist die Brennweite einer plankonvexen Linse vom Radius  $r$ ?

**Lösung:** Jetzt ist  $r_1 = \infty$   $r_2 = -r$ . Also wird,

da  $\frac{1}{\infty} = 0$  ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{r} \quad \text{oder} \quad f = \frac{r}{n-1}$$

Setzt man  $n = 1,5$ , so wird

$$f = 2r.$$

Die Brennweite einer Plankonvexlinse ist also (für  $n = 1,5$ ) gleich dem doppelten Radius.

**Aufgabe 16.** Wie groß ist die Brennweite eines Meniskus mit den Radien  $r_1 = 16$  cm,  $r_2 = 10$  cm, wenn  $n = 1,52$  gesetzt wird?

**Lösung:** Man hat:

$$\frac{1}{f} = (1,52 - 1) \cdot \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{10} \right) = 0,52 \left( \frac{5}{80} - \frac{8}{80} \right)$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{0,52 \cdot 3}{80}; \quad f = -\frac{80}{3 \cdot 0,52} = -51,3 \text{ cm}$$

Es handelt sich also um einen zerstreuen den Meniskus von 51,3 cm Brennweite.

**Aufgabe 17.** Wie groß ist die Brennweite einer gleichzeitigen Bikonkavlinse vom Radius  $r$ ?

**Lösung:** Hier ist  $r_1 = -r$  und  $r_2 = r$  zu setzen und man erhält (Aufgabe 10)

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( -\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{2(n-1)}{r}$$

oder:

$$f = -\frac{r}{2(n-1)}$$

Für  $n = 1,5$  wird  $f = -r$ .

Die Brennweite einer gleichseitigen Zerstreungslinse ist also gleich dem Radius.

**Aufgabe 18.** Wie groß ist die Brennweite einer Plankonkavlinse vom Radius  $r$ ?

**Lösung:** Es ergibt sich analog wie bei Aufgabe 15:

$$f = -\frac{r}{n-1}$$

$$\text{und für } n = 1,5 \quad f = -2r$$

#### § 4. Berechnung von Lage und Größe der Bilder bei dünnen Linsen.

**Aufgabe 19.** Berechne Lage und Größe des mittels einer dünnen Linse von einem gegebenen Objekt entworfenen Bildes.

**Lösung:** Wir setzen gemäß der Figuren: 8 bis 10

$$P S = a \qquad P' S = a'$$

$$P Q = y \qquad P' Q' = y'$$

und wie früher  $S F = S F' = f$ .

Dann bestehen folgende Gleichungen, die man ohne weiteres aus der Konstruktion gemäß Fig. 8 durch Aufstellung einiger Proportionen ableiten kann:<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \dots\dots\dots 2.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \dots\dots\dots 3.$$

Der Natur der Aufgabe nach sind  $a$ ,  $y$  und  $f$  gegeben. Aus Gl. 2 folgt zunächst  $a'$  und dann aus Gl. 3 der Wert von  $y'$ .

Den Quotienten  $\frac{y'}{y}$  bezeichnet man auch als Vergrößerungsverhältnis.

Zur Berechnung merke man noch folgendes

1. Für Sammellinsen hat  $f$  positive, für Zerstreuungslinsen negative Werte.

2. Fällt das Licht von links ein, so bedeutet ein positiver Wert von  $a'$ , daß das Bild rechts von der Linse liegt und reell ist, während ein negativer Wert von  $a'$  zeigt, daß das Bild links liegt und virtuell ist.

<sup>1)</sup> Vergl. z. B. Schule der Optik S. 66.

Ein positiver Wert von  $y'$  bedeutet, daß das Bild umgekehrt, ein negativer, daß das Bild aufrecht ist.

**Erklärung.** Photographische Objektive, Projektionslinsen und Lupen kann man ebenso wie Brillengläser in erster Annäherung als dünne Linsen auffassen.

**Aufgabe 20.** Ein photographisches Objektiv hat  $f = 20$  cm Brennweite. Wie groß ist das Bild einer 1,70 m langen und 5 m entfernten Person auf der Mattscheibe, und wie groß ist der Kameraauszug?

**Lösung:** In Gl. 2 (Aufg. 19) sind gegeben  $f = 20$  cm und  $a = 500$  cm, und man erhält:

$$\frac{1}{500} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{20} \text{ oder } \frac{1}{a'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{500} = \frac{24}{500}$$
$$a' = \frac{500}{24} = 20,83 \text{ cm}$$

Aus Gl. 3 folgt dann  $y' = \frac{a'}{a} \cdot y$ .

Da  $y = 170$  cm gegeben ist, so wird

$$y' = \frac{500 \cdot 170}{24 \cdot 500} = 7,08 \text{ cm}$$

Der Kameraauszug ist also gleich  $a' = 20,83$  cm und die Bildgröße  $y' = 7,08$  cm.

**Aufgabe 21.** Mit dem Objektiv der vorigen Aufgabe soll ein menschlicher Kopf von 22 cm Höhe, 5 cm groß abgebildet werden. Aus welcher Entfernung hat die Aufnahme zu geschehen und wie weit muß die Kamera ausgezogen werden?

**Lösung:** Hier ist gegeben  $y = 22$ ,  $y' = 5$  und  $f = 20$ . Man hat also:

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{22} = \frac{a'}{a} \text{ und}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{20}$$

Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit  $a'$  erhält man:

$$\frac{a'}{a} + 1 = \frac{a'}{20} \text{ oder } \frac{5}{22} + 1 = \frac{a'}{20}$$

woraus zunächst die Länge des Kameraauszuges  $a' = 24,54$  cm folgt.

Alsdann folgt:

$$a = \frac{a' \cdot 22}{5} = \frac{540 \cdot 22}{22 \cdot 5} = 108 \text{ cm}$$

als gesuchte Objektentfernung.

**Erklärung.** Wenn jemand einen Gegenstand von der Größe  $y$  in der Entfernung  $a$  fixiert und zwischen Auge und Gegenstand senkrecht zur Blickrichtung etwa einen Stab oder dergl. so bringt, daß er den Gegenstand (das Objekt) gerade deckt, so ist, wenn  $g$  die Länge des deckenden Stabes und  $l$  dessen Entfernung vom Auge ist,

$$\frac{y}{a} = \frac{g}{l}$$

falls das Auge sich am Ort des photographischen Objektivs oder doch in dessen Nähe befindet.

Gleichung 3 in Aufgabe 19 liefert dann:

$$y' = \frac{g}{l} \cdot a'$$

wodurch die Größe  $y'$  des Bildes auf der Mattscheibe bekannt ist.

Besonders praktisch ist dieses Verfahren für sehr entfernte Gegenstände, für welche der Kameraauszug  $a'$  gleich der Brennweite  $f$  wird. Man hat dann

$$y' = \frac{g}{l} \cdot f$$

Hält man z. B. einen kleinen in mm geteilten Stab senkrecht zur Blickrichtung in der Hand mit ausgestrecktem Arm, dessen Länge  $l$  man vorher zu  $60 \text{ cm} = 600 \text{ mm}$  bestimmt hat und greift mit dem Daumnagel das deckende Stück  $g$  ab, so liefert die letzte Gleichung sofort die Bildgröße. Dieses Verfahren, so roh es erscheint, ist sehr empfehlenswert, weil man sich leicht Täuschungen bezüglich der Größe der Bilder auf der Platte hingibt.

**Aufgabe 22.** Wie groß erscheint ein ferner Kirchturm auf der Mattscheibe, der bei ausgestrecktem Arm von  $l = 50$  cm Länge durch  $g = 7$  cm gedeckt wird, wenn  $f = 15$  cm ist?

**Lösung:** Nach der Formel

$$y' = \frac{g}{l} \cdot f$$

$$\text{ist } y' = \frac{7}{50} \cdot 15 = 2,1 \text{ cm.}$$

**Aufgabe 23.** Wie kann man die Formel der vorigen Aufgabe vereinfachen, wenn ein und dieselbe Person (Armlänge = 60 cm) sich beständig desselben Objektivs von  $f = 15$  cm bedient?

**Lösung.** Die Formel der vorigen Aufgabe wird jetzt:

$$v' = g \cdot \frac{15}{60} = \frac{g}{4}$$

Der vierte Teil der am Lineal abgegriffenen Strecke liefert also immer die Bildgröße. Ein ferner Hirsch z. B., der durch 1 cm abgedeckt wird, erscheint auf der Platte nur  $2\frac{1}{2}$  mm groß.

**Aufgabe 24.** Ein Projektionsapparat von 15 cm Brennweite soll 20fache Vergrößerung liefern. Wie weit muß der Projektionsschirm entfernt sein?

**Lösung:** Hier ist  $f = 15$  und  $\frac{y'}{y} = 20$ . Zu berechnen die Strecke  $a'$ . Aus Gl. 3 der Aufgabe 19 folgt:

$$\frac{y'}{y} = 20 = \frac{a'}{a}.$$

Multipliziert man Gl. 2 (Aufg. 19) mit  $a'$ , so entsteht:

$$\frac{a'}{a} + 1 = \frac{a'}{f} \text{ oder } 20 + 1 = \frac{a'}{15}$$

woraus  $a' = 21 \cdot 15 = 315 \text{ cm} = 3,15 \text{ m}$ .

**Aufgabe 25.** Die Bildhöhe eines Kinofilms beträgt 18 mm. In einer Entfernung von 10 m soll das Bild 1,5 m hoch erscheinen. Wie groß muß die Brennweite des Projektionsobjektivs sein?

**Lösung.** Gegeben ist:  $y = 18$  mm,  $y' = 1500$  mm  
 $a' = 10\,000$  mm. Zu berechnen ist  $f$ .

Lösung: Man hat:  $\frac{y'}{y} = \frac{1500}{18} = \frac{a'}{a} = \frac{10\,000}{a}$  oder  
 $a = 120$  mm.

Ferner ist  $\frac{1}{f} = \frac{1}{120} + \frac{1}{10\,000}$   $f = 118,57$  mm

**Aufgabe 26.** Ein in eine Konvexlinse (Lupe) von  
5 cm Brennweite hineinschauendes Auge will einen Gegen-  
stand (virtuell) in 25 cm Entfernung hinter der Linse  
sehen. Wo muß der Gegenstand aufgestellt sein und wie  
stark ist die Vergrößerung?

**Lösung:** Damit der Gegenstand ein virtuelles Bild  
entwirft, muß er innerhalb der Brennweite der Linse stehen.  
Da in diesem Falle das Bild auf derselben Seite der Linse  
wie das Objekt liegt, so haben wir  $a' = -25$  zu setzen.

Die Gleichung  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$  liefert also

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{25} = \frac{1}{5}; \frac{1}{a} = \frac{6}{25}; a = \frac{25}{6} \text{ cm} = 4\frac{1}{6} \text{ cm}$$

Der Gegenstand muß also  $4\frac{1}{6}$  cm von der Linse ent-  
fernt sein.

Ferner ist  $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{25}{4\frac{1}{6}} = 6$ . Das Bild ist also  
6 mal so groß wie der Gegenstand.

Dem Auge wird also eine 6 fache Vergrößerung (Lupen-  
wirkung) dargeboten.

Diese Vergrößerung ist so zu verstehen, daß wir das  
Bild 6 mal so groß sehen, wie das Objekt, wenn sich das  
letzte in derselben Entfernung vom Auge wie das Bild  
befindet.

**Aufgabe 27.** Zeichne das Bild eines beliebigen, in einer  
achsensenkrechten Ebene befindlichen Objektes.

**Lösung:** Die achsensenkrechte Objektebene  $E$  enthalte  
enthalte ein beliebig gestaltetes Objekt, das in Fig. 19 als  
Dreieck  $A B C$  gezeichnet ist. Man konstruiere die zur

$E$ -Ebene konjugierte achsenkrechte Ebene  $E'$ . Da in dieser Ebene das zu  $A B C$  gehörige Bild liegen muß, und alle durch  $S$  gehenden Strahlen die Linse ungebrochen durchdringen, so hat man nur von  $A, B$  und  $C$  aus Strahlen durch  $S$  zu ziehen, die die  $E'$ -Ebene in den

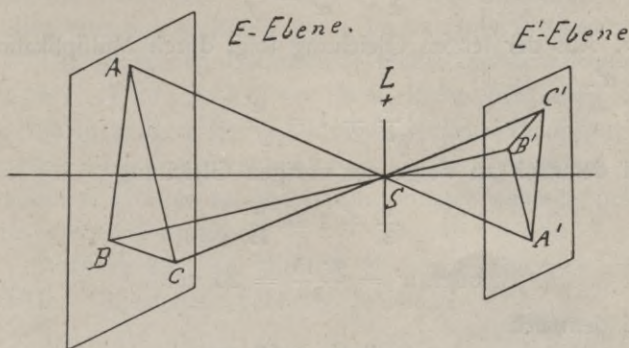


Fig. 19.

Punkten  $A' B' C'$  durchstoßen. Das Bild  $A' B' C'$  ist dem Objekt  $A B C$  ähnlich, d. h. alle Winkel des Objektes (z. B.  $\sphericalangle A B C$ ) sind gleich den entsprechenden Winkeln im Bild (z. B.  $\sphericalangle A' B' C'$ ) und die Verhältnisse entsprechender Seiten des Objektes und Bildes sind einander gleich.

Setzt man die auf der Achse gemessenen Entfernungen der  $E$ -Ebene resp. der  $E'$ -Ebene vom Linsenscheitel  $S$  gleich  $a$  resp.  $a'$ , so ist also:

$$\frac{A' B'}{A B} = \frac{B' C'}{B C} = \frac{C' A'}{C A} = \frac{a'}{a}$$

Auf diesem Satz beruht ganz wesentlich die ähnliche photographische Abbildung.

**Aufgabe 28.** Eine Landkarte mit dem Maßstab 1:10000 soll mittels einer Linse (eines phot. Objectives) von der Brennweite  $f = 15$  cm in eine Landkarte vom Maßstab 1:30000 verwandelt werden. Wo müßten bei der Aufnahme Landkarte und Mattscheibe stehen?

**Lösung:** Da eine Verkleinerung im Verhältnis von 10000 : 30000, d. h. 1 : 3 eintreten soll, so muß

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{3}$$

und außerdem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

sein. Aus der letzten Gleichung folgt durch Multiplikation mit  $a'$ .

$$\frac{a'}{a} + 1 = \frac{a'}{f}$$

und demnach zu Folge der vorigen Gleichung

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{a'}{15}$$

$$\text{oder } a' = \frac{4 \cdot 15}{3} = 20 \text{ cm}$$

und demnach

$$a = 3 a' = 60 \text{ cm}$$

**Erklärung.** Eine beliebige gerade Linie im Objektraum wird im allgemeinen nicht in einem Hauptschnitt (Ebene durch die Achse) liegen und wird also die Achse nicht schneiden. Man nennt sie dann windschief zur Achse. Wenn eine Gerade die Achse schneidet, so liegt sie in einem Hauptschnitt, da man durch zwei sich schneidende Geraden immer eine Ebene legen kann.

Jede Gerade im Objektraum wird nach Satz IV als Gerade im Bildraum abgebildet. Man kann diese beiden konjugierten Geraden aber auch als konjugierte Lichtstrahlen auffassen und umgekehrt. Es folgt dies daraus, daß eine Gerade, die wir als ein Objekt auffassen, ebenso wie ein Lichtstrahl durch zwei Punkte der Lage nach vollständig bestimmt ist. Durch die zugehörigen beiden konjugierten Punkte sind dann sowohl die Gerade als auch der Lichtstrahl eindeutig bestimmt.

Eine Gerade, welche in der Linsenebene liegt (achsensenkrechte Ebene



durch  $S = \text{Hauptebene}$ ) ist sich selbst konjugiert, d. h. sie stellt zugleich ihr eigenes Bild dar.

Eine beliebige Ebene im Objektraum wird im allgemeinen nicht mit einem Hauptschnitt zusammenfallen, sondern die Achse nur in einem Punkte schneiden. Wir wollen eine solche Ebene als windschief bezeichnen.

Die gegebenen Definitionen bilden die Grundlage für das als „Perspektive“ bezeichnete Lehrgebiet und für die in neuerer Zeit zu hervorragenden Wichtigkeit gelangte Photogrammetrie. In Folgendem beschränken wir uns auf die Lösung einiger weniger, besonders wichtiger Aufgaben.

**Aufgabe 29.** Zeichne die zu einer beliebigen windschiefen Objektebene gehörige Bildebene.

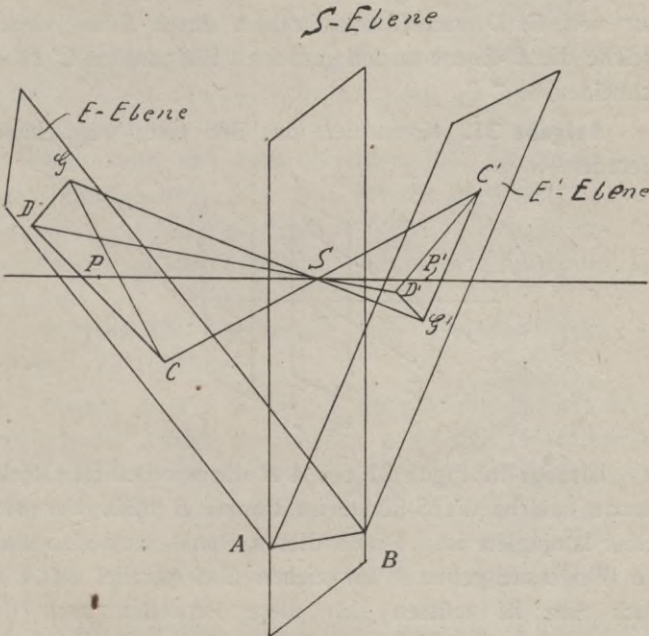


Fig 20.

**Lösung:** Die gegebene Objektebene werde  $E$ -Ebene genannt. Sie schneide die Achse im Punkte  $P$  und die Linsenebene ( $S$ -Ebene) in einer Geraden  $AB$ , die sich selbst konjugiert ist, durch die also die gesuchte Bildebene (die  $E'$ -Ebene) ebenfalls hindurchgehen muß. Ist nun ferner  $P'$  das Bild von  $P$  auf der Achse, das ebenfalls der  $E'$ -Ebene angehört, so muß die letztere durch die Gerade  $AB$  und den Punkt  $P'$  gehen, wodurch sie vollständig bestimmt ist (Fig. 20).

**Aufgabe 30.** Zeichne das Bild einer ebenen Figur, das sich in einer windschiefen Objektebene befindet.

**Lösung:** Die gegebene Figur sei ein Dreieck  $CDG$  in der  $E$ -Ebene (Fig. 20). Das Bild muß in der zur  $E$ -Ebene konjugierten  $E'$ -Ebene liegen, die gemäß der vorigen Aufgabe zu zeichnen ist. Da nun die durch  $S$  gehenden Strahlen ungebrochen weiter gehen, so hat man nur von  $C, D$  und  $G$  aus Strahlen durch  $S$  zu ziehen, welche die  $E'$ -Ebene in den gesuchten Bildpunkten  $C' D' G'$  schneiden.

**Aufgabe 31.** Konstruiere das Bild einer windschiefen Geraden.

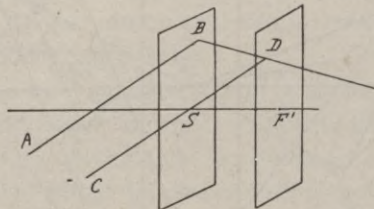


Fig. 21.

**Lösung:** In Figur 21 sei  $AB$  die windschiefe Objektgerade, welche die  $S$ -Ebene im Punkte  $B$  trifft, der sich selbst konjugiert ist. Durch diesen Punkt muß also auch die Bildgerade gehen. Wir ziehen  $CS$  parallel zu  $AB$ . Nach Satz III müssen sich diese Parallelen nach der Brechung in einem Punkte  $D$  der achsensenkrecht durch

den hinteren Brennpunkt  $F'$  gelegten Ebene ( $F'$ -Ebene) schneiden. Also ist  $BD$  die gesuchte Bildgerade.

**Anmerkung.** Da, wie oben schon bemerkt, eine Gerade durch einen Lichtstrahl ersetzt werden kann, so ist hiermit auch die Aufgabe gelöst, zu einem beliebigen windschiefen Strahl den gebrochenen zu zeichnen.

**Erklärung.** Die letzten Aufgaben liefern die Grundlagen, jedes beliebige von ebenen Flächen begrenzte Raumbilde im Objektraum durch eine Linse hindurch abzubilden. Die *ähnliche* Abbildung, wie sie bei in achsenkrechten Ebenen befindlichen Objekten besteht, ist hier nicht mehr vorhanden.

Wir haben bisher nur die Abbildungsverhältnisse von Punkten auf der Achse und von achsenkrechten Objekten betrachtet. Nun kommt es aber häufig vor, daß ein Auge schief in eine Linse hineinschaut, z. B. beim Blicken des rollenden Auges durch ein Brillenglas. Es ist deshalb nicht ohne Interesse, den Abbildungsvorgang auf solchen schiefen Achsen zu untersuchen, die wir als *sekundäre Achsen* bezeichnen wollen.

Man kann sich auch vorstellen, daß die ganze Linse durch einen Schirm oder eine Blende abgedeckt sei und nur eine kleine seitlich liegende Stelle (bei  $S_0$  in Fig. 22) freigelassen sei, durch welche hindurch die Abbildung vor sich geht.

**Aufgabe 32.** Konstruiere eine sekundäre Achse im Objekt- und Bildraum.

**Lösung.** In Fig. 22 sei ein Hauptschnitt (Schnitt durch die optische Achse) dargestellt.  $S$  ist der Linsenscheitel, durch den achsenrecht die Linsenebene ( $S$ -Ebene) geht.  $F'$  stellt den bildseitigen Brennpunkt<sup>1)</sup> dar, durch den achsenrecht die zugehörige Fokalebene (die  $F'$ -Ebene) gelegt ist. Die optische Achse selbst ist durch die durch  $S$  und

<sup>1)</sup> Der bildseitige Brennpunkt  $F'$  ist in Fig. 22 versehentlich mit  $F$  bezeichnet.

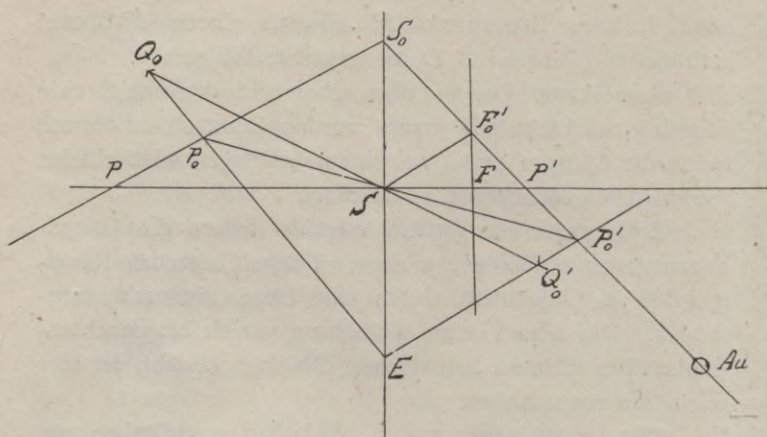


Fig. 22.

$F'$  gehende Gerade dargestellt. Nun sei eine sekundäre Achse  $P S_0$  im Objektraum gegeben, die im Bildraum in Richtung  $S_0 P'$  verläuft, wo  $P$  und  $P'$  konjugierte Achsenpunkte sind. Den im Bildraum verlaufenden Teil der optischen Achse kann man nach denselben Regeln konstruieren, als wenn man den zum einfallenden Stahl  $P S_0$  zugehörigen gebrochenen Strahl  $S_0 P'$  zeichnet. Hier empfehlen sich zwei Methoden:

1. Man zeichnet den zum Achsenpunkt  $P$  gehörigen Bildpunkt  $P'$  und legt durch  $S_0$  und  $P'$  eine Gerade oder:
2. Man lege durch  $S$  eine Parallele zu  $P S_0$ , welche die  $F'$ -Ebene im Punkte  $F_0'$  schneidet. Nach III der Grundsätze muß durch  $F_0'$  auch der von  $S_0$  ausgehende gebrochene Strahl gehen, so daß also  $S_0 F_0'$  die gesuchte sekundäre Achse im Bildraum ist.

**Anmerkung.** Die letztere Methode liefert ersichtlich auch einen neuen Weg zur Konstruktion des Bildpunktes  $P'$ , wenn der Objektpunkt  $P$  gegeben ist.

**Aufgabe 33.** Konstruiere von einem Punkte  $P_0$  auf einer sekundären Achse den zugehörigen Bildpunkt  $P_0'$ .

**Lösung:** Man ziehe von  $P_0$  durch  $S$  eine Gerade

welche die gebrochene sekundäre Achse in  $P_0'$  schneidet (Fig. 22). Die Richtigkeit dieser Konstruktion folgt ohne weiteres aus der Bemerkung, daß alle von  $P_0$  ausgehenden Strahlen sich in  $P_0'$  schneiden müssen und der Strahl  $P_0 S$  ohne Richtungsänderung den Linsenscheitel  $S$  durchdringt.

**Anmerkung.** Wie man erkennt, ist die Konstruktion der Bildpunkte auf einer sekundären Achse einfacher als auf der Hauptachse (Achse schlechthin); denn im ersteren Falle kommt man durch Ziehen nur einer einzigen Geraden zum Ziel.

**Aufgabe 34.** Konstruiere das Bild eines auf einer sekundären optischen Achse stehenden Objektes.

**Lösung:** Das Objekt im Punkte  $P_0$ , das beliebig zur sekundären Achse geneigt sein soll, sei  $P_0 Q_0$  (Fig. 22). Man verlängere  $Q_0 P_0$  bis die  $S$ -Ebene im Punkte  $E$  durchstoßen wird. Da der Punkt  $E$  sich selbst konjugiert ist, so muß die zu  $E Q_0$  konjugierte Gerade ebenfalls durch  $E$ , außerdem aber auch durch den zu  $P_0$  konjugierten Punkt  $P_0'$  gehen. Wo nun die letztere Gerade von der durch  $S$  von  $Q_0$  aus gezogenen Geraden geschnitten wird, muß der Punkt  $Q_0'$  liegen. Die Strecke  $P_0' Q_0'$  ist also das Bild von  $P_0 Q_0$ .

**Aufgabe 35.** Konstruiere das Bild, wie in der vorigen Aufgabe für den Fall, daß das Objekt  $P_0 Q_0$  der Linsenebene ( $S$ -Ebene) parallel ist.

**Lösung.** Da in diesem Falle die verlängerte Gerade  $P_0 Q_0$  der  $S$ -Ebene parallel läuft (Fig. 23), so muß dies auch mit der zu ihr konjugierten Geraden der Fall sein. Die letztere wird von der verlängerten Geraden  $Q_0 S$  im Punkte  $Q_0'$  getroffen und  $Q_0' P_0'$  ist das Bild von  $Q_0 P_0$ . In diesem besonderen Falle ist also auch das Bild parallel zur  $S$ -Ebene. Objekt und Bild liegen also in achsensenkrechten Ebenen. Das Verhältnis von Objektgröße ist also auch gleich dem Verhältnis des Abstandes dieser beiden achsensenkrechten Ebenen vom Punkte  $S$ .

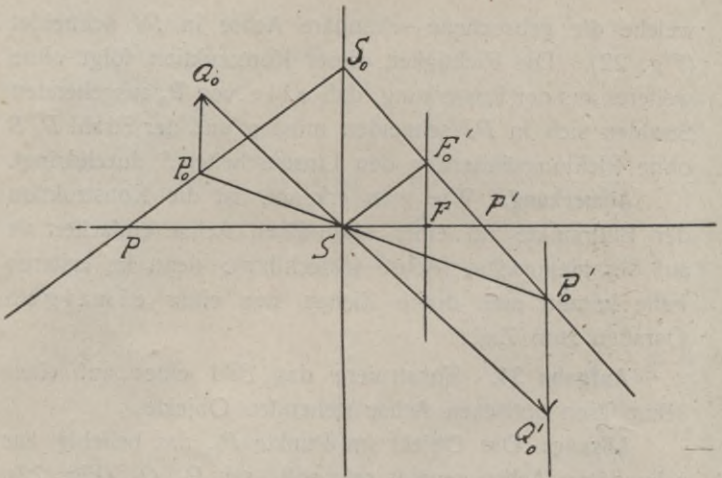


Fig. 23.

**Erklärung.** Die Lehre von den sekundären Achsen ist grundlegend für die Theorie der optischen und ophthalmologischen Instrumente. Ein Anwendungsbeispiel liefert bereits, wie oben bemerkt, das Sehen des menschlichen Auges durch ein Brillenglas.

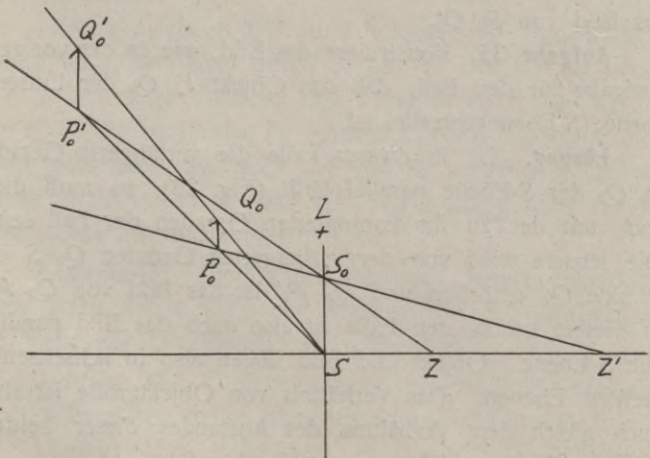


Fig. 24

Das Auge rollt um einen etwa 25 mm hinter dem Brillenscheitel gelegenen Punkt  $Z$ , den man den Drehpunkt des Auges nennt. Die Sehrichtung des Auges ist also beständigen Änderungen unterworfen, geht jedoch beständig durch den Punkt  $Z$ . Das Sehen geschieht also beständig längs einer Reihe von sekundären Achsen, die sich in  $Z$  schneiden.

**Aufgabe 36.** Konstruiere das Bild eines zur Linsenebene parallelen Objektes  $P_0 Q_0$ , welches ein schief durch eine Sammellinse blickendes Auge sieht.

**Lösung:** In Fig. 24 sei  $Z$  der Augendrehpunkt, der rechts von der Linse liegt. Man zeichnet zunächst die durch  $Z$  gehende sekundäre Achse  $Z S_0$ , die von der Linse in Richtung  $S_0 P_0$  gebrochen wird und von einem Punkte  $Z'$  herzukommen scheint. (Weil die Brechung durch eine Sammellinse hindurch erfolgt, wird die Divergenz des Strahles  $Z S_0$  vermindert.) Befinde sich nun auf der sekundären Achse das Objekt  $P_0 Q_0$  und konstruiert man nach den Angaben der vorigen Aufgabe das Bild  $P_0' Q_0'$ , so befindet sich dies auf der verlängerten Achse  $Z S_0$ . Das Auge, welches in Richtung  $Z S_0$  in die Linse hineinblickt, sieht also das Objekt  $P_0 Q_0$  virtuell, vergrößert und nach oben verschoben. Damit das Auge das Objekt scharf sieht, darf die Strecke  $P_0' Z$  nicht kleiner als der (vom Drehpunkt des Auges aus gerechnete) Nahpunktstand des Auges sein.

**Aufgabe 37.** Konstruiere das Bild eines zur Linsenebene parallelen Objektes  $P_0 Q_0$ , welches ein schief durch eine Zerstreuungslinse blickendes Auge sieht.

**Lösung:** Die Lösung entspricht, wie die Fig. 25 zeigt, wesentlich der Lösung der vorigen Aufgabe. Auch die Bezugszeichen haben in beiden Fällen analoge Bedeutung. Die vom Drehpunkt  $Z$  des Auges gezogene sekundäre Achse  $Z S_0$  wird jedoch durch die Linse  $\underline{L}$  jetzt im Sinne einer Zerstreuung der Strahlen nach oben in Richtung

$S_0 P_0$  gebrochen und der zu  $Z$  konjugierte Punkt  $Z'$  liegt der Linse näher als der Drehpunkt  $Z$ . Das Auge sieht nun das Objekt  $P_0 Q_0$  in Richtung  $Z S_0 P_0'$  virtuell von der Größe  $P_0' Q_0'$ . Das Bild erscheint aufrecht und verkleinert und kann von dem Auge nur scharf gesehen werden, wenn  $P_0' Z$  größer wie der Nahpunktsabstand ist.

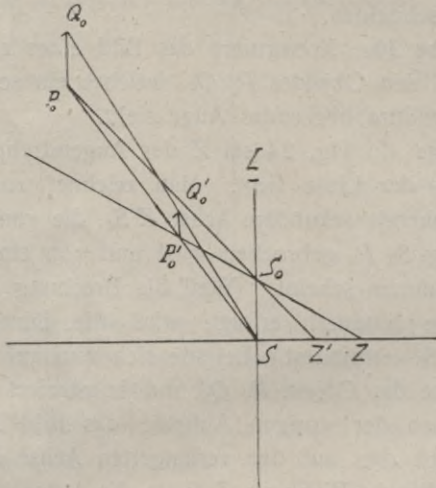


Fig. 25.

**§ 5. Mehrere unendlich dünne im Kontakt befindliche Linsen.**

**Aufgabe 38.** Berechne die Lage des Brennpunktes und die Brennweite  $f$  zweier unendlich dünner, einander unendlich nahe gerückter (im Kontakt befindlicher) Linsen von den Einzelbrennweiten  $f_1$  und  $f_2$ .

**Lösung.** Zwei unendlich dünne, einander unendlich nahe (in Berührung) gebrachte Linsen sind optisch wie eine einzige dünne Linse aufzufassen, deren Brennweite  $f$  bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad \dots \dots \dots 4)$$

die beiden Scheitel  $S_1$  und  $S_2$  fallen in einen einzigen



gemeinsamen Scheitel  $S$  zusammen, und es stellt  $SF = SF' = f$  wie im Falle einer einzigen Linse die Gesamtbrennweite dar, wo  $F$  und  $F'$  die Brennpunkte der Combination beider Linsen sind. Für die Berechnung des Bildortes und der Bildgröße gelten die Gleichungen 2) und 3) in Aufgabe 19 uneingeschränkt.

**Aufgabe 39.** Berechne die Brennweite einer Combination gemäß Aufgabe 38 für zwei Sammellinsen (z. B. Brillengläser von 20 cm und 30 cm Brennweite).

**Lösung:** Hier ist  $f_1 = 20$  und  $f_2 = 30$ . Also wird:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{50}{600} = \frac{1}{12}$$

woraus  $f = 12$  cm folgt.

**Aufgabe 40.** Berechne die Gesamtbrennweite, wenn eine Sammellinse von 15 cm Brennweite mit einer Zerstreuungslinse von 10 cm verbunden wird.

**Lösung:** Hier ist  $f_1 = 15$  und  $f_2 = -10$ . Also ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{30}$$

woraus  $f = -30$  cm folgt.

Die Verbindung wirkt wie eine Zerstreuungslinse von  $-30$  cm Brennweite.

**Aufgabe 41.** Berechne die Brennweite einer Combination von 4 unendlich dünnen Linsen im verschwindenden Abstand von einander, deren Einzelbrennweiten der Reihe nach  $-12$  cm,  $+10$  cm,  $+15$  cm,  $-20$  cm sind.

**Lösung:** Die Gl. 4 (Aufgabe 38) kann man ohne weiteres auf mehr als zwei Linsen ausdehnen. Man erhält dann für die Brennweite der Combination

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

oder  $f = +30$  cm.

§ 6. Die Durchdringungsprobleme.

**Erklärung:** Ein körperliches (physisches) Objekt kann man aus großer Ferne nur bis an die Linse selbst heranführen, wie wir dies bisher immer vorausgesetzt haben. Fassen wir als Objekt  $PQ$  jedoch das von einer Linse entworfene reelle Bild auf, so können wir dies jedoch gewissermaßen durch die Linse hindurch führen. Das Objekt kommt dann allerdings garnicht an der ihm eigentlich zukommenden Stelle zustande, sondern die Strahlen fallen nur so auf die Linse, als ob sie sich zu Punkten im Objekt  $PQ$  vereinigen wollten, und werden tatsächlich an einer anderen Stelle zu dem Bilde  $P'Q'$  vereinigt. In diesem Falle ist das Objekt also virtuell. Aufgaben dieser Art, die für die praktische Optik eine große Wichtigkeit haben, wollen wir Durchdringungsprobleme nennen.

**Aufgabe 42.** Zeichne das von einer Sammellinse  $L$  erzeugte Bild eines virtuellen Objektes.

**Lösung:** In Fig. 26 sei  $PQ$  das virtuelle Objekt, das wir uns also von einer links von der Fig. 26 befindlichen, nicht gezeichneten Sammellinse erzeugt

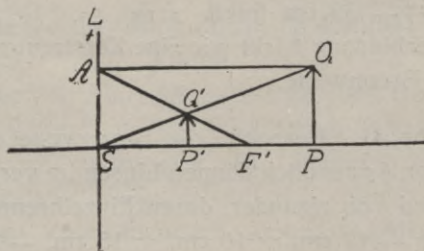


Fig. 26.

denken können. Bemerkte sei noch einmal, daß also  $PQ$  an der Stelle gezeichnet ist, wo es sich befände, wenn gar keine Durchdringung stattfände. Das Bild  $PQ$  kommt jedoch nicht zustande, weil die Linse  $L$  mit dem Scheitel  $S$  und dem hinteren Brennpunkt  $F'$  in den

Strahlengang davor geschaltet ist. Man verfährt nun ganz analog, wie im Falle der Aufgaben 3 und 4 in § 2 d. h. man zieht von  $Q$  eine Achsenparallele  $QA$  zur Linsenebene und verbindet  $A$  mit dem hinteren Brennpunkt  $F'$ . Wo die letztere Gerade die Gerade  $QS$  schneidet, ist der Punkt  $Q'$ , das Achsenlot  $Q'P'$  stellt das gesuchte Bild dar. Es ist reell, verkleinert und dem Objekt  $PQ$  gleichgerichtet.

**Aufgabe 43.** Zeichne das von einer Zerstreuungslinse  $L$  erzeugte Bild eines virtuellen Objektes.

**Lösung:** Die Konstruktion ist ganz analog der vorigen Aufgabe. Nur ist zu beachten, daß der zur Konstruktion benutzte bildseitige Brennpunkt  $F'$  jetzt links von der Linse  $L$  liegt. Es sind hier verschiedene Fälle zu unterscheiden, von denen wir zwei gemäß Fig. 27 und 28 darstellen wollen.

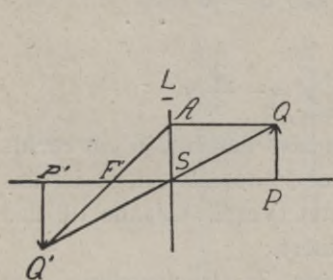


Fig. 27.

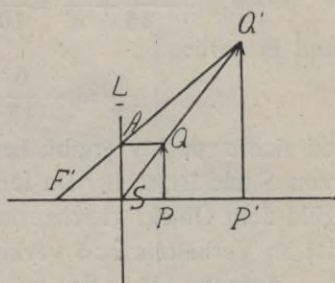


Fig. 28.

Man zieht in beiden Fällen wieder  $QA$  achsenparallel und verbindet  $A$  mit  $F'$ . Wo die letztere Gerade die Gerade  $QS$  resp. deren Verlängerung schneidet, liegt der Bildpunkt  $Q'$ . Das Bild  $Q'P'$  ist im Falle der Fig. 27 virtuell und umgekehrt, im Falle der Fig. 28 reell und gleichgerichtet. Dieser Unterschied rührt ersichtlich daher, daß im ersteren Falle die Strecke  $SP$  größer, im zweiten Falle kleiner als die Brennweite  $SF'$  ist.

**Erklärung:** Um Lage und Größe des Bildes für virtuelle Objekte zu berechnen, beachte man, daß jetzt die Objektentfernung  $a$  vom Linsenscheitel, also die Strecke  $PS$  negativ zu setzen ist, da  $P$  rechts vom Scheitel  $S$  liegt. (Vergl. Aufg. 19).

**Aufgabe 44.** Es sei eine Sammellinse von  $f = 10$  cm gegeben. Ein virtuelles Objekt liege 15 cm rechts von derselben. Berechne Lage und Größe des entstehenden Objektes.

**Lösung:** In den Gleichungen der Aufgabe 19

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

und  $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$

ist zu setzen  $a = -15$  und  $f = 10$ . Man erhält:

$$-\frac{1}{15} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{10} \text{ also } a' = 6 \text{ cm}$$

und es wird:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{6}{15} \quad y' = -\frac{2}{5}y$$

da sich  $a'$  positiv ergibt, liegt also das Bild 6 cm rechts von  $S$  und ist reell. Da ferner  $y'$  negativ ist, so ist das Bild dem Objekt gleichgerichtet (Vergl. Aufgabe 19) und ist im Verhältnis 2 : 5 verkleinert.

**Aufgabe 45.** Es sei eine Zerstreuungslinse von  $f = -10$  cm gegeben. Das virtuelle Objekt liege 8 cm rechts von der Linse. Bestimme Ort und Größe des Bildes!

**Lösung:** In den obigen Gleichungen ist zu setzen  $f = -10$  cm und  $a = -8$ , und man hat:

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{10} \text{ also: } \frac{1}{a'} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$$

woraus  $a' = 40$  cm folgt. Ferner ist:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{40}{8} = -5$$

Das Bild liegt also 40 cm rechts von  $S$ , ist reell, dem Objekt gleichgerichtet und 5 mal so groß wie daß Objekt. Die Zerstreuungslinse hat also hier die Eigenschaft, stark vergrößerte reelle Bilder zu erzeugen. Diese Eigenschaft der Zerstreuungslinse findet bei dem sogenannten Teleobjektiv Verwendung.

### § 7. Konvergenzverhältnis und Konstruktion der Bilder mittels konjugierter Ebenen.

**Erklärung:** Gemäß Aufgabe 27 ist in zwei achsenkrechten konjugierten Ebenen, welche durch die Achsenpunkte  $P$  und  $P'$  gehen, der Maßstab  $\beta$  der ähnlichen Abbildung gegeben durch

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

wo  $y$  ein achsenkrechtes Objekt in  $P$  und  $y'$  sein Bild in  $P'$  ist. Ein durch  $P$  gehender Lichtstrahl  $PA$  (Fig. 29)

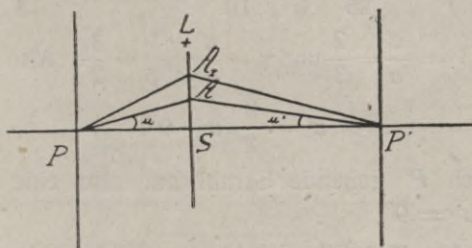


Fig. 29.

möge mit der Achse den Winkel  $u$  bilden. Nach der Brechung durch die Linse geht er durch  $P'$  und bildet dort den Achsenwinkel  $u'$ . Dann nennt man den Bruch

$$\gamma = \frac{u'}{u} \quad ^1)$$

<sup>1)</sup> Diese Gleichung gilt nur für kleine Winkel  $u$  und  $u'$ , um die es sich in der Tat fast immer handelt. Für verhältnismäßig große Winkel ist zu setzen

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$$

das Konvergenzverhältnis  $\gamma$ . Dasselbe ist

$$\gamma = \frac{1}{\beta} = \frac{a}{a'}$$

$\gamma$  hat denselben Wert für alle durch  $P$  und  $P'$  gehenden Strahlen, z. B. auch für den Strahl  $PA_1P'$  in Fig. 29. Jedem konjugierten Ebenenpaar gehört also ein bestimmter Wert von  $\beta$  und ein zugehöriger Wert von

$$\gamma = \frac{1}{\beta} \text{ an.}$$

**Aufgabe 46.** Vor einer Sammellinse von  $f = 10$  cm, in der Entfernung  $a = 25$  cm von  $S$  befinde sich ein Objektpunkt  $P$ , durch den ein Strahl unter der Achsenneigung  $u = 6^\circ$  hindurchgeht. Unter welcher Achsenneigung  $u'$  geht dieser Strahl durch  $P'$ ?

**Lösung:** Zunächst findet man aus der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \text{ oder } \frac{1}{25} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{10} \text{ den Wert } a' = \frac{50}{3} \text{ cm. Dem-}$$

nach ist  $\beta = \frac{a'}{a} = \frac{2}{3}$  und  $\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2}$ . Also ist:

$$u' = \frac{3}{2} u = 9^\circ.$$

Der durch  $P'$  gehende Strahl hat also eine Achsenneigung  $u' = 9^\circ$ .

**Aufgabe 47.** Ein Strahl durchdringt im Objekt-raum eine achsensenkrechte Ebene ( $P$ -Ebene) in der Entfernung  $y$  von der Achse. In welcher Entfernung  $y'$  von der Achse durchdringt der Strahl die konjugierte Ebene ( $P'$ -Ebene).

**Lösung:** Wegen der ähnlichen Abbildung in den beiden konjugierten Ebenen und weil die beiden Durchdringungspunkte zu einander konjugiert sind, müssen die Entfernungen der letzteren von den Achsenpunkten  $P$  und  $P'$  im Verhältnis des Maßstabs  $\beta$  der ähnlichen Abbildung stehen, der in den beiden konjugierten

Ebenen herrscht. Es muß also:

$$\frac{y'}{y} = \beta \text{ oder } y' = \beta \cdot y$$

sein. Man kann diesen Satz auch aussprechen: Die Schnitthöhen eines Strahles in konjugierten Ebenen vor und nach der Brechung stehen im Verhältnis des Maßstabes der Abbildung in diesen Ebenen.

**Aufgabe 48.** Konstruiere Ort und Größe des Bildes von einem gegebenen achsensenkrechten Objekt  $PQ$ , wenn nicht, wie bisher, der Ort der Linse und deren Brennweite, sondern zwei konjugierte achsensenkrechte Ebenen, deren Maßstab und der hintere Brennpunkt  $F'$  gegeben sind.

**Lösung:** In Fig. 30 seien die durch  $B$  und  $B'$  gelegten konjugierten Ebenen, sowie der hintere Brennpunkt  $F'$

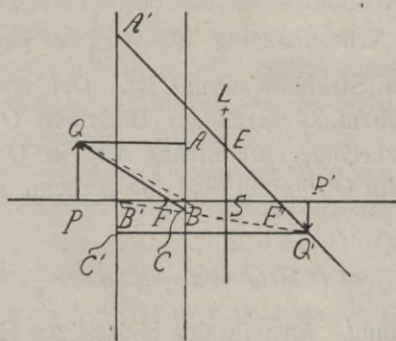


Fig. 30.

gegeben. Die  $B$ -Ebene gehört dem Objektraum, die  $B'$ -Ebene dem Bildraum an. Als Maßstab wollen wir bei der Konstruktion  $\beta = 3$  annehmen. Um nun das Bild von  $PQ$  zu finden, ziehen wir von  $Q$  aus eine Achsenparallele, die die  $B$ -Ebene in  $A$  trifft und suchen nun in der  $B'$ -Ebene den zu  $A$  konjugierten Punkt  $A'$ . Da der Maßstab  $\beta = 3$  ist, so muß also  $A'B' = 3 \times AB$  sein,

wie aus der vorigen Aufgabe folgt, womit der Punkt  $A'$  bestimmt ist. Da nun der Strahl  $QA$  im Objektraum achsenparallel ist, so muß er nach der Brechung durch  $F'$  gehen, ist also durch die Gerade  $A'F'$  gegeben. Auf diesem Strahl muß also  $Q'$  jedenfalls liegen. Da wir nun  $\beta$  in der  $B$ - und  $B'$ -Ebene kennen, so ist uns damit auch  $\gamma = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3}$  gegeben, d. h. ein unter einem beliebigen Winkel  $u$  durch  $B$  im Objektraum gehender Strahl muß im Bildraume durch den Punkt  $B'$  mit einem Achsenwinkel  $u'$  gehen, so daß man hat

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{1}{3}$$

Zieht man also den Strahl  $QB$  (in Fig. 30 gestrichelt) und nennt den Winkel  $\sphericalangle QBP = u$ , so muß der konjugierte durch  $B'$  gehende Strahl (in Fig. 30 ebenfalls gestrichelt) unter einer Achsenneigung  $u' = \frac{1}{3}u$  verlaufen, wodurch dieser Strahl bestimmt ist. Der letztere Strahl muß oben ebenfalls durch den Bildpunkt  $Q'$  gehen und also den (verlängerten) Strahl  $A'F'$  in  $Q'$  schneiden. Das Achsenlot  $Q'P'$  stellt also das gesuchte Bild dar. Es ist also

$$\sphericalangle P'B'Q' = u' = \gamma \cdot u = \frac{u}{3}.$$

**Anmerkung.** Anstelle des bildseitigen Brennpunktes  $F'$  konnte auch der objektseitige Brennpunkt  $F$  gegeben sein. Man hätte gemäß Fig. 30 den ersten bestimmenden Strahl dann auf folgende Weise gefunden: Man zieht den Strahl  $QF$ , bis er die  $B$ -Ebene in  $C$  schneidet, sucht den zu  $C$  konjugierten Punkt  $C'$  in der  $B'$ -Ebene, der dadurch bestimmt ist, daß  $B'C'$  dreimal so groß als  $BC$  ist. Der zu  $QF$  konjugierte Strahl im Bildraum muß achsenparallel verlaufen, ist als durch eine von  $C'$  aus-



gehende achsenparallele Gerade gegeben. Auf der letzteren muß der Punkt  $Q'$  liegen. Der zweite bestimmende Strahl wird wie in der letzten Aufgabe mittels des Konvergenzverhältnisses gefunden, ist also durch die gestrichelten Geraden der Fig. 30 dargestellt.

**Erklärung.** Die letzte Aufgabe hat für eine dünne Linse keinen praktischen Nutzen, sie zeigt aber, wie man die Konstruktion des Bildes mit Hilfe konjugierter Ebenen und der Brennpunkte durchführen kann, es löst also dieses Problem gewissermaßen los von den besonderen Eigenschaften einer dünnen Linse. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, haben wir durch die Lösung der Aufgabe ein Mittel gefunden, die für dünne Linsen gefundenen Gesetze sofort auf ein System beliebig vieler Linsen zu übertragen.

Die zur Konstruktion benutzten konjugierten Ebenen ( $B$ - und  $B'$ -Ebenen) waren unserer freien Wahl überlassen. Es liegt nun nahe, ein solches Ebenenpaar auszuwählen, bei dem der Maßstab  $\beta$  einen besonders einfachen Wert annimmt. Wählt man z. B.  $\beta = -1$ , so heißt dies  $y' = -y$ . Objekt und Bild sind also in den konjugierten Ebenen gleich groß und gleichgerichtet. Die Abbildung in der  $B'$ -Ebene ist also der Objektfigur in der  $B$ -Ebene kongruent. Ein solches Ebenenpaar nennt man Hauptebenen. Wie wir bereits wissen, trifft dies bei einer unendlich dünnen Linse ein, wenn die  $B$ - und  $B'$ -Ebene beide in der Linsenebene zusammenfallen.

Nebenbei sei bemerkt, daß ein Blick auf die Figur 30 lehrt, daß man tatsächlich zu demselben Punkt  $Q'$  gelangt wäre, wenn man die Konstruktion in der allgemein üblichen Weise ausgeführt hätte, indem man  $QE$  bis zur Linsenebene gezogen hätte und dann den Schnittpunkt der Strahlen  $EF'$  und  $QS$  bestimmt hätte.

## Cap. II. Der Strahlengang im paraxialen Gebiet für beliebig viele Linsen und für ein beliebiges zentriertes Linsensystem.

### § 8. Bestimmung des Bildes für den Fall eines Systems von Linsen oder brechenden Flächen.

**Erklärung:** Die Konstruktion der Bilder geschieht für eine beliebige Anzahl auf eine Achse zentrierter Linsen, auch von beliebiger Dicke, mittels zweier gegebener konjugierter Ebenen nach wesentlich denselben Gesetzen, wie wir dies zufolge Aufgabe 48 für eine unendlich dünne Linse gesehen haben. Es sind jedoch die beiden Fälle zu unterscheiden, je nachdem das erste und letzte Medium gleiche oder verschiedene Brechungsexponenten haben. Der erste Fall liegt vor bei allen optischen Systemen und optischen Instrumenten, die sich in der Luft befinden (Brillengläser, Lupen, photographische Objektive, Fernrohre, gewöhnliche Mikroskope u. s. w.)

Der zweite Fall tritt bei optischen Instrumenten verhältnismäßig selten ein, z. B. bei den sogenannten Immersionssystemen der Mikroskope, bei denen das Objekt (z. B. ein Bazillus) in Wasser, Oel oder einer anderen Flüssigkeit eingebettet ist. Ferner würde dieser Fall vorliegen, wenn man das Objektiv einer Kamera oder eines Fernrohres in Wasser eintauchte, um Objekte im Wasser zu photographieren oder vergrößert zu betrachten. Vor allem aber ist der Brechungsexponent  $n$  im Objektraume von demjenigen  $n'$  des Bildraumes verschieden bei dem wichtigsten optischen Instrument, nämlich dem menschlichen Auge. Hier wird nämlich das von einem äußeren Objekt erzeugte Bild im sogenannten Glaskörper erzeugt, einer durchsichtigen gallertartigen Substanz, die nahezu den Brechungsexponenten des Wassers ( $n' = \frac{4}{3}$ ) hat.

Der grundlegende Unterschied zwischen diesen Fällen liegt im Verhalten des Konvergenzverhältnisses in konjugierten Punkten.

Ist nämlich  $\beta$  das Vergrößerungsverhältnis in zwei konjugierten Ebenen, so ist das zugehörige Konvergenzverhältnis  $\gamma$  allgemein

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$$

das für den Fall gleicher Brechungsexponenten im Objekt- und Bildraum ( $n = n'$ ) den Wert

$$\gamma = \frac{1}{\beta}$$

annimmt, den wir oben schon benutzt haben.

**Aufgabe 49.** Von einem beliebigen auf einer Achse zentrierten Linsensysteme, das sich in Luft befindet, sind zwei konjugierte Ebenen mit dem Maßstab  $\frac{5}{3}$  und der hintere Brennpunkt  $F'$  gegeben. Konstruiere das zu einem gegebenen Objekt  $PQ$  gehörige Bild.

**Lösung:** In Fig. 31 seien die konjugierten  $B$ - und  $B'$ -Ebenen gegeben, sowie der bildseitige Brennpunkt  $F'$ . Von dem Endpunkt  $Q$  des gegebenen Objektes  $PQ$  ziehe man achsenparallel  $QA$  bis zur  $B$ -Ebene und suche den

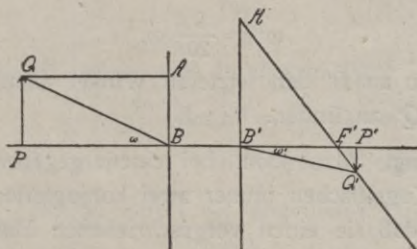


Fig. 31.

zu  $A$  konjugierten Punkt  $A'$  auf der  $B'$ -Ebene. Weil  $\beta$  in diesen Ebenen den Wert  $\frac{5}{3}$  hat, muß  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{3}$  also  $A'B' = \frac{5}{3} \cdot AB$  sein. Durch  $A'$  und  $F'$  lege man den

ersten bestimmenden Strahl. Ferner ziehe man  $QB$ , wodurch der Winkel  $(QB P^1) = \omega$  bestimmt ist und trage in  $B'$  den Winkel  $\omega'$  an, sodaß  $\gamma = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{3}{5}$ , also  $\omega' = \frac{3}{5}\omega$  ist. Der freie Schenkel des Winkels  $\omega'$  schneidet die verlängerte Gerade  $A'F'$  in  $Q'$ , so daß das Achsenlot  $P'Q'$  das gesuchte Bild ist.

**Aufgabe 50.** Wie ist die Konstruktion gemäß Aufgabe 49 abzuändern, wenn es sich um das System des menschlichen Auges handelt, bei welchem im Bildraum der Brechungsexponent  $n' = \frac{4}{3}$  herrscht.

**Lösung:** In der Gleichung für das Konvergenzverhältnis

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$$

ist jetzt zu setzen, da der Objektraum mit Luft ( $n = 1$ ) ausgefüllt ist:

$$n = 1 \quad n' = \frac{4}{3} \quad \beta = \frac{5}{3}$$

und man erhält:

$$\gamma = \frac{9}{20}$$

oder gemäß Fig. 31, da das Konvergenzverhältnis in den Punkten  $B$  und  $B'$  durch  $\frac{\omega'}{\omega}$  dargestellt ist:

$$\omega' = \frac{9}{20} \cdot \omega.$$

Man hat also an  $B'$  den letzteren Winkel anzutragen, um den Punkt  $Q'$  zu finden.

**Erklärung.** Man kann bei einem gegebenen System zentrierter Kugelflächen immer zwei konjugierte Ebenen so bestimmen, daß sie einen vorgeschriebenen Maßstab oder ein vorgeschriebenes Konvergenzverhältnis haben. Die Feststellung der Lage dieser Ebenen kann bei sehr zusammengesetzten Systemen unter Umständen umständlich

<sup>1)</sup> Die Winkel  $\omega$  und  $\omega'$  entsprechen den Winkeln  $u$  und  $u'$  in Aufgabe 48.

sein. Für eine Reihe besonders häufig vorkommender Fälle werden wir diese Lösung später bringen. Für eine einfache dünne Linse hat man z. B.

$$\beta = \frac{a'}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

hieraus folgt:

$$a = \frac{1 + \beta}{\beta} \cdot f \text{ und } a' = (1 + \beta) \cdot f$$

wodurch die Lage der konjugierten Ebenen mit dem gegebenen Maßstab  $\beta$  bestimmt ist.

**Aufgabe 51.** Bestimme aus der Gleichung für das Konvergenzverhältnis diejenigen konjugierten Ebenenpaare, welche sich durch besonders einfache Eigenschaften auszeichnen.

**Lösung:** 1) Setzt man in der Gleichung

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$\beta = 1$ , so daß also Objekt und Bild gleichgroß und gleichgerichtet sind<sup>1)</sup>, so erhält man ein Ebenenpaar, das man als **Hauptebenen** bezeichnet. Die Schnittpunkte der Achse mit diesen Ebenen nennt man **Hauptpunkte H und H'**.

Gehen in Fig. 31 z. B. die Punkte  $B$  und  $B'$  in  $H$  und  $H'$  über, dann müßte auch  $BA = B'A'$  werden.

Die Gleichung für  $\gamma$  liefert in diesem Fall:

$$\gamma = \frac{n}{n'}$$

In Fig. 31 würde also in diesem Falle

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \text{ oder } \omega' = \frac{n}{n'} \cdot \omega \text{ sein.}$$

2) Wählt man ein konjugiertes Ebenenpaar so aus, daß  $\beta = \frac{n}{n'}$  ist, so liefert die allgemeine Gleichung für  $\gamma$

$$\gamma = 1.$$

Solche Ebenen nennt man **Knotenebenen** und die

<sup>1)</sup> Bei der Zählweise, die wir bei einer unendlich dünnen Linse angewandt haben, müßten wir  $\beta = -1$  setzen, weil  $\beta = +1$  auf gleichgroße und umgekehrte Bilder hinweist.

Punkte, in denen sie von der Achse durchdrungen werden, **Knotenpunkte  $K$  und  $K'$** .

Da  $\gamma = 1$  identisch ist mit  $\frac{\omega'}{\omega} = 1$  d. h.  $\omega' = \omega$ , so wird also ein durch  $K$  im Objektraum gehender Strahl nach der Brechung durch das System so gebrochen, daß er parallel zum einfallenden Strahl im Bildraum durch  $K'$  geht.

3) Ist der Brechungsindex des Bildraums gleich dem des Objektraums ( $n' = n$ ), so wird ersichtlich  $\beta = 1$  und  $\gamma = 1$  Hauptpunkte und Knotenpunkte fallen zusammen und die vereinigten Punktpaare zeigen die Eigenschaften sowohl der Hauptpunkte wie der Knotenpunkte. (Knotenpunkteigenschaft der Hauptpunkte.)

**Aufgabe 52.** Definiere die Eigenschaften der Brennweiten eines Systems mittels der Haupt- und Knotenpunkte.

**Lösung:** In Fig. 32 sind die Hauptpunkte  $H$  und  $H'$  und die Knotenpunkte  $K$  und  $K'$  eines beliebigen zentrierten Systems auf einer Achse dargestellt. Die Brechungsindizes im Objekt- und Bildraum seien  $n$  und  $n'$ .

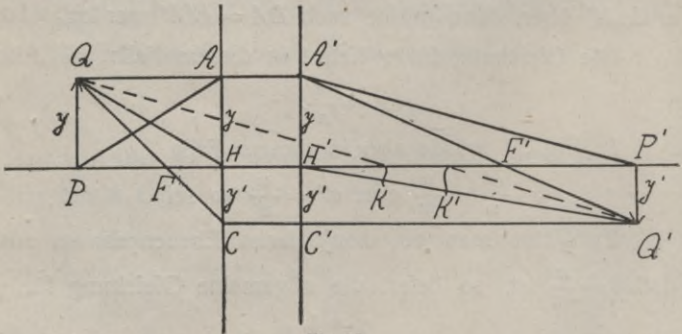


Fig. 32.

Als vordere Brennweite  $f$  bezeichnet man den Abstand des vorderen Brennpunktes  $F$  vom vorderen Hauptpunkt  $H$ , also

$$FH = f.$$

Als hintere Brennweite bezeichnet man den Abstand des hinteren Brennpunktes  $F'$  vom hinteren Hauptpunkt  $H'$ , also

$$F' H' = f'.$$

Außerdem ist:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

Ferner ist der Abstand des vorderen Brennpunktes  $F$  vom vorderen Knotenpunkt  $K$  gleich der hinteren Brennweite, also:

$$FK = f'$$

und der Abstand des hinteren Brennpunktes vom hinteren Knotenpunkt gleich der vorderen Brennweite, also

$$F' K' = f.$$

Sind also die Haupt- und Brennpunkte eines Systems gegeben, so sind die Knotenpunkte ohne weiteres bestimmt.

**Aufgabe 53.** Konstruiere das Bild  $P'Q'$  eines gegebenen achsensenkrechten Objektes  $PQ$  mittels der Brenn-, Haupt- und Knotenpunkte.

**Lösung:** Um den Punkt  $Q'$  im Bildraum zu finden, müssen wir wenigstens zwei von  $Q$  ausgehende Strahlen in den Bildraum hinein verfolgen können. Es stehen uns jedoch gemäß Fig. 32 ohne weiteres vier solcher Strahlen zur Verfügung, aus denen wir eine beliebige Auswahl treffen können, nämlich:

1) Der achsenparallele Strahl  $QA$  geht im Bildraum durch  $A'$  und  $F'$  ( $A' H' = A H$ ).

2) Der Strahl  $QFC$  geht im Bildraum durch  $C'$  achsenparallel ( $C' H' = C H$ ).

3) Der Strahl  $QK$  geht sich selbst parallel durch den Punkt  $K'$  im Bildraum.

4) Der Strahl  $QH$ , der mit der Achse den Winkel  $\omega$  bildet, geht im Bildraum durch  $H'$  unter der Achsenneigung  $\omega' = \frac{n}{n'} \omega$ .<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Für endliche Werte oder Winkel nimmt die Gleichung die Form an  $\text{tg } \omega' = \frac{n}{n'} \text{tg } \omega$ .

**Aufgabe 54.** Konstruiere das durch ein zentriertes System entworfene Bild eines Objektes, wenn die Brechungs-

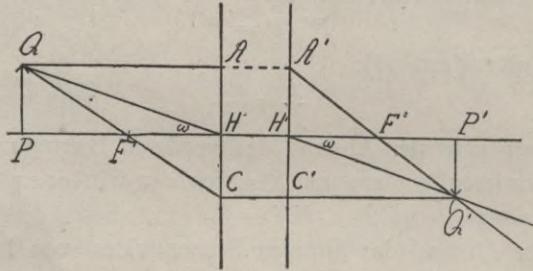


Fig. 33.

exponenten im Objekt- und Bildraum einander gleich sind ( $n = n'$ ).

**Lösung:** Jetzt fallen die Haupt- und Knotenpunkte zusammen. Es ist  $FH = F'H'$ , also:

$$f = f'$$

Der Strahl  $QH$  geht im Bildraum sich selbst parallel durch  $H'$ , wodurch die Konstruktion von  $Q'$  leicht erfolgt (Fig. 33).

**Aufgabe 55.** Zeichne und berechne für ein beliebiges zentriertes System das Bild eines unendlich fernen Gegenstandes, der unter dem Achsenwinkel  $\omega$  erscheint.

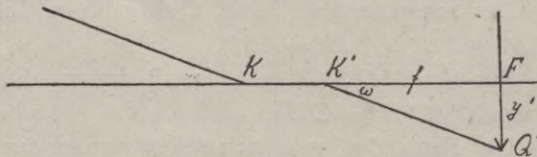


Fig. 34.

**Lösung:** In Fig. 34 sei  $\infty K$  ein von dem äußersten Punkte eines fernen Objektes herkommender Strahl, der durch den vorderen Knotenpunkt  $K'$  unter der Achsenneigung  $\omega$  geht. Derselbe verläuft im Bildraum sich selbst parallel und schneidet die  $F'$ -Ebene in  $Q'$ , sodaß  $Q'F' = y'$  die Größe des Bildes in der hinteren Fokalebene ist.



Aus dem Dreieck  $K' F' Q'$  (Fig. 34) hat man sofort, wenn  $F' Q' = y'$  gesetzt wird, da  $K' F' = f$  ist

$$y' = \omega \cdot f. ^1)$$

Das Bild eines entfernten Objektes ist also gleich der vorderen Brennweite des Systems multipliziert mit dem objektseitigen Gesichtswinkel

**Erklärung.** Zur Berechnung von Ort und Größe des Bildes bedarf man gewisser fester Punkte auf der Achse (Fixpunkte), von denen aus man die Entfernungen der Punkte  $P$  und  $P'$  rechnet. Wir haben uns als Fixpunkte bei der Konstruktion bisher zweier konjugierter Punkte bedient (Hauptpunkte, Knotenpunkte, Punkte  $B$  und  $B'$  in Fig. 31). Neben diesen konjugierten Punkten sind auch die Brennpunkte  $F$  und  $F'$  als Fixpunkte in Gebrauch, insbesondere bei der Abbe'schen Schule.

**Aufgabe 56.** Entwickle aus der Fig. 32 die auf die Brennpunkte bezogenen Abbildungsbeziehungen.

**Lösung:** Wir setzen in Fig. 32:

$$PF = x \quad P'F' = x'.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken  $FHC$  und  $FQP$  folgt, da  $PQ = y$ ,  $HC = y'$ ,  $FP = x$  und  $FH = f$  ist:

$$I) \quad \frac{y'}{y} = \frac{f}{x}$$

Analog folgt aus den ähnlichen Dreiecken  $F'H'A'$  und  $F'P'Q'$ :

$$II) \quad \frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'}$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke I) und II) folgt:

$$III) \quad x \cdot x' = f \cdot f'.$$

Sind also  $x$ ,  $y$ ,  $f$  und  $f'$  gegeben, so liefern diese drei Gleichungen  $x'$  und  $y'$ .

**Aufgabe 57.** Entwickle die auf die Hauptpunkte bezogenen Abbildungsbeziehungen.

---

1) Für endliche Winkel ist;  $y' = f \cdot \operatorname{tg} \omega$ .

**Lösung:** Wir setzen gemäß Fig. 32:

$$PH = a \text{ und } P'H' = a'$$

wo also  $a$  und  $a'$  zu einander konjugierte Schnittweiten im Objekt- und Bildraum sind.

Dann ist offenbar:

$$x = a - f \text{ und } x' = a' - f'$$

Gl. III) der vorigen Aufgabe liefert:

$$(a - f) \cdot (a' - f') = f \cdot f'$$

oder nach einigen Umformungen

$$I) \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$$

Da ferner (vergl. Aufgabe 51) für die Hauptpunkte  $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'}$  ist, und für kleine Winkel  $\omega$  und  $\omega'$  aus den Dreiecken  $PQH$  und  $P'Q'H'$  der Fig. 31 folgt:

$$\omega = \frac{y}{a} \text{ und } \omega' = \frac{y'}{a'}$$

so erhält man sofort:

$$II) \quad \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a}$$

**Aufgabe 58.** Wie vereinfachen sich die Abbildungsbeziehungen, wenn die Brechungsexponenten im Objekt- und Bildraum einander gleich sind?

**Lösung:** Die Gleichungen I) und II) der vorigen Aufgabe liefern, wenn man  $n = n'$  setzt:

$$I) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

$$II) \quad \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$$

Die Form dieser Gleichungen ist übereinstimmend mit der, die wir für unendlich dünne Linsen aufgestellt haben.

**Aufgabe 59.** Gib die Abbildungsbeziehungen an, wenn als Fixpunkte zwei beliebige konjugierte Ebenen mit dem Maßstab  $B$  benutzt werden.

**Lösung:** Setzt man in Fig. 31, wo die Fixpunkte  $B$  und  $B'$  zwei beliebige konjugierte Punkte sind,

$$PB = p \quad P'B' = p'$$

so ist:

$$I) \quad \frac{f}{p} \cdot \frac{1}{B} + \frac{f'}{p'} \cdot B = 1$$

und II)

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{B}$$

wo  $B$  also der Maßstab der ähnlichen Abbildung in der  $B$ - und  $B'$ -Ebene ist, also z. B. durch das Verhältnis konjugierter achsensenkrechter Strecken z. B.

$$B = \frac{B' A'}{B A}$$

in Fig. 31 gegeben ist.

Die Herleitung der Gleichungen I) und II) kann ebenfalls an Hand der Konstruktion erfolgen. (Vergl. z. B. Gleichen: Theorie der modernen opt. Instr. 1911, Seite 70—72.)

**Aufgabe 60.** Wie konstruiert und berechnet man das Bild, welches eine einzige brechende Fläche entwirft?

**Lösung:** Eine einzelne brechende Fläche, welche zwei Medien mit den Brechungssexponenten  $n$  und  $n'$  trennt, stellt den einfachsten Fall eines Systems dar, wie es in den Aufgaben 56 und 57 erläutert ist.

Im Scheitel  $S$  (Fig. 35) fallen die beiden Hauptpunkte, im Mittelpunkt  $M$  die bei-

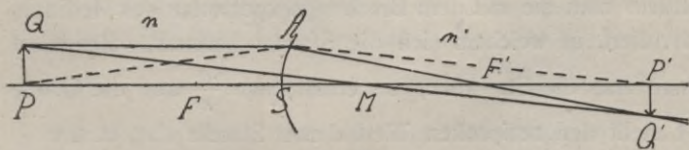


Fig. 35.

den Knotenpunkte zusammen. Sind  $F$  und  $F'$  vorderer und hinterer Brennpunkt, so sind

$$FS = f \quad \text{und} \quad F'S = f'$$

die beiden Brennweiten.

Die Abbildungsbeziehungen der Aufgaben 56 und 57 gelten uneingeschränkt.

Setzt man den Kugelradius  $SM = r$ , so hat man außerdem:

$$I) \quad f = \frac{n \cdot r}{n' - n} \quad f' = \frac{n' \cdot r}{n' - n}$$

und infolgedessen auch:

$$II) \quad \frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n' - n}{r}$$

Man konstruiert das Bild  $P'Q'$  des Objekts  $PQ$ , indem man gemäß Fig. 35  $QA$  achsenparallel bis zur Fläche zieht und einen Strahl durch  $A$  und  $F'$  legt. Wo dieser von einem durch  $Q$  und  $M$  gezogenen zweiten Strahl getroffen wird, befindet sich der Bildpunkt  $Q'$ .

### § 9. Die Brechkraft und das Gullstrand'sche System der Vergenzen.

**Erklärung:** Gullstrand hat eine Reihe von Bezeichnungen eingeführt, die sich auf das Hauptpunktsystem beziehen und die eine besonders einfache Schreibweise der Grundgleichungen gestatten. Dementsprechend setzen wir:

$$\frac{n}{a} = A \quad \frac{n}{a'} = A' \quad \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = D$$

und nennen  $A$  und  $A'$  die reduzierte objektseitige resp. bildseitige Vergenz<sup>1)</sup>, während  $D$  als Brechkraft bezeichnet wird.

Nach Gullstrand wird nämlich eine Strecke reduziert, indem man sie mit dem Brechungsexponenten des Mediums dividiert, in welchem sich die Strecke befindet. Reduziert man also die Strecke  $a$ , so erhält man  $\frac{a}{n}$  und die Größe  $A$  stellt den reziproken Wert dieser Strecke dar, u. s. w.

Drückt man die Strecken  $a$ ,  $a'$ ,  $f$ ,  $f'$  in Metern aus, so sind die Werte von  $A$ ,  $A'$  und  $D$  in Dioptrien (dptr.) gemessen.

<sup>1)</sup> Gullstrand braucht den Ausdruck „Divergenz“, die Einführung der Reziproken findet sich übrigens in der Ophthalmologie seit langem. Gullstrand gebührt jedoch das Verdienst der Aufstellung eines lückenlosen Systems.

**Aufgabe 61.** Wie lauten die allgemeinen auf die Hauptpunkte bezogenen Abbildungsbeziehungen, wenn man Vergenzen einführt, für ein beliebiges System mit den Brechungsexponenten  $n$  und  $n'$  im Objekt- und Bildraum?

**Lösung:** Die Gl. 1 in Aufg. 57 kann man schreiben:

$$\frac{n}{a} \cdot \frac{f}{n} + \frac{n'}{a'} \cdot \frac{f'}{n'} = 1$$

Wegen  $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'} = \frac{1}{D}$  erhält man:

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = D$$

oder zufolge der obigen Erklärung:

$$I) \quad A + A' = D$$

Die Gleichung für den Maßstab der ähnlichen Abbildung in den konjugierten  $P$ - und  $P'$ -Ebenen wird zufolge Gleichung II) in Aufg. 57:

$$II) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{A}{A'} \text{ oder } y \cdot A = y' \cdot A'$$

Die Gleichung I) und II) sind also äußerlich unabhängig von den Brechungsexponenten.

Die Brechkraft eines in Luft befindlichen Systems ( $n = n' = 1$ ;  $f = f'$ ) ist hiernach:

$$III) \quad D = \frac{1}{f}$$

und die Brechkraft einer einzelnen brechenden Fläche wird nach Gl. I) in Aufg. 60, wenn man

die Ausdrücke  $D = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$  bildet

$$IV) \quad D = \frac{n' - n}{r}$$

In Worten lautet diese wichtige Beziehung:

Man erhält die Brechkraft einer Fläche, wenn man die Differenz der Brechungsexponenten hinter und vor der Fläche durch den in Metern ausgedrückten Radius dividiert.

### § 10. Die Konstruktion der Hauptpunkte in Sonderfällen

**Erklärung:** Wir kennen die Lage der Hauptpunkte bisher nur in zwei Fällen, nämlich bei einer einzelnen

brechenden Fläche und bei einer unendlich dünnen Linse. In beiden Fällen fallen die Punkte  $H$  und  $H'$  in den Scheitel  $S$  zusammen. Der Punkt  $S$  ist also der sich selbst konjugierte vereinigte Hauptpunkt.

Wenn es uns nun gelingt, für die Kombination zweier brechenden Flächen im gegebenen endlichen Abstände die Lage der Hauptpunkte zu ermitteln, so könnten wir auf diesem Wege der Zusammensetzung fortschreitend die Lage der Hauptpunkte für beliebig viele Flächen, d. h. für ein beliebiges System finden. Dasselbe gilt für mehrere unendlich dünne Linsen, deren Betrachtung praktisch besonders wichtig ist, weil wir in vielen Fällen in erster Annäherung die Dicke der Linsen vernachlässigen können.

Die folgende Aufgabe führt zur Lösung dieses Problems.

**Aufgabe 62.** Suche denjenigen Punkt (Kernpunkt  $T$ ) zwischen zwei Systemen, der (nach rechts und links hin) durch die beiden Systeme abgebildet zu ein und demselben Maßstab führt, dessen Abbilder also die Hauptpunkte des zusammengesetzten Systems sind.

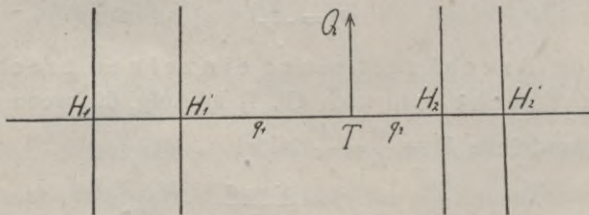


Fig. 36.

**Lösung:** In Fig. 36 sind zwei getrennte Systeme I und II mit den zugehörigen Hauptpunkten  $H_1, H'_1$  und  $H_2, H'_2$  dargestellt.

Im Raum zwischen den beiden Systemen befinde sich ein Punkt  $T$  auf der Achse und in ihm ein Objekt  $TQ$ . Bilden wir dieses Objekt einmal nach links durch das System I, das andere mal nach rechts durch das System II

ab, so erhalten wir zwei Bilder, welche notwendig zu einander konjugiert in Bezug auf das ganze System sind. Diese Bilder müssen notwendig gleich groß und gleich gerichtet sein, wenn der Maßstab der Abbildung in beiden Fällen der gleiche ist, d. h. jene Bilder müssen an den Stellen der Hauptebenen des ganzen Systems liegen. Fassen wir nun den Raum zwischen I und II in beiden Fällen als Objektraum auf und unterscheiden die Abbildungen nach links und rechts durch Indices 1 u. 2 von einander, so liefern die Gleichungen I und II der Aufg. 61 sofort:

$$\beta_1 = \frac{A^1}{D_1 - A_1} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{A_2}{D_2 - A_2}$$

da  $\beta_1 = \beta_2$  sein soll, so folgt durch Gleichsetzung:

$$\frac{D_1 - A_1}{A_1} = \frac{D_2 - A_2}{A_2} \quad \text{oder} \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Setzen wir den Brechungsindex im Raum zwischen I und II gleich  $N$  und setzen ferner:  $H_1' T = q_1$   $H_2 T = q_2$ , so ist  $A_1 = \frac{N}{q_1}$   $A_2 = \frac{N}{q_2}$  und man hat:

$$1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

Der Kernpunkt  $T$  zwischen zwei Systemen liegt also so, daß er die Strecke  $H_1' H_2$  im umgekehrten Verhältnis der Brechkraft teilt.

Nach der obigen Erklärung ist damit das Problem der Aufsuchung der Hauptpunkte eines Systems grundsätzlich gelöst.

**Aufgabe 63.** Konstruiere die Hauptpunkte zweier dünnen Linsen mit der Brennweite  $f_1$  und  $f_2$  im Abstände  $d$ .

**Lösung:** In Fig. 37 seien  $S_1$  und  $S_2$  die beiden Scheitel und  $F_1$  und  $F_2$  der vordere Brennpunkt der ersten und der hintere der zweiten Linse, die wir beide als sammelnd voraussetzen. Am einfachsten verfährt man folgendermaßen. Man legt eine sekundäre Achse durch  $F_1$ , welche die erste Linse in  $A_1$  trifft, zwischen den Linsen achsenparallel ver-

läuft bis  $A_2$  und alsdann im Bildraum durch  $F_2$  geht.  $F_1 A_1$  und  $F_2 A_2$  schneiden sich in  $T_0$ . Das Lot von  $T_0$  auf die Achse liefert den Kernpunkt  $T$ ; denn aus ähnlichen Dreiecken folgt sofort, daß sich die Strecken  $A_1 Q$  und

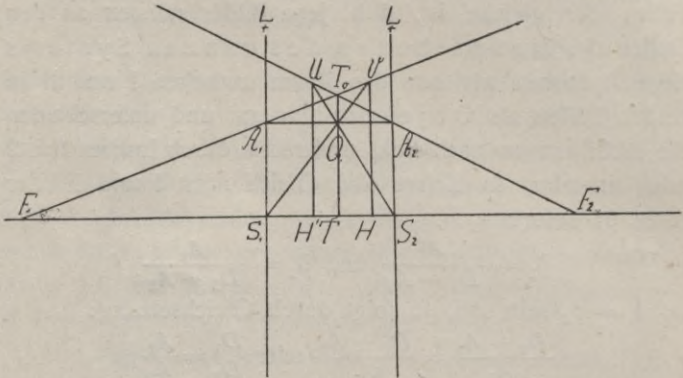


Fig. 37.

$A_2 Q$  oder was dasselbe ist, die Strecken  $S_1 T = q_1$  und  $S_2 T = q_2$  wie die Strecken  $F_1 S_1$  zu  $F_2 S_2$  d. h. wie  $f_1$  zu  $f_2$  und demnach umgekehrt wie die Brechkräfte verhalten. (Vergl. Aufg. 63). Nach der Lehre von den sekundären Achsen (Vergl. Aufg. 32) kann man in  $T$  befindliche achsensenkrechte Objekte  $TQ$  nach beiden Seiten hin abbilden, indem man von  $Q$  aus durch  $S_1$  und  $S_2$  gerade Linien legt. Wo diese die Verlängerungen  $F_1 A_1$  resp.  $F_2 A_2$  schneiden, liegen die zu  $Q$  konjugierten Bildpunkte  $V$  und  $U$ . Lote von  $V$  und  $U$  auf die Achse führen also zu den Hauptpunkten  $H$  und  $H^1$  der Kombination der beiden Linsen  $L_1$  und  $L_2$ .

**Aufgabe 64.** Konstruiere den Kernpunkt einer Linse von endlicher Dicke.

**Lösung:** In Fig. 38 ist eine Linse von endlicher Dicke im Hauptschnitt mit den Scheiteln  $S_1$  und  $S_2$  und den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  gezeichnet. Man ziehe von  $M_1$  und  $M_2$  aus zwei beliebige einander parallele Radien  $M_1 A_1$  und  $M_1 A$ . Die Verbindungslinie  $A_1 A_2$  schneide



die Achse in  $T$ , dann sind die Dreiecke  $M_1 A_1 T$  und  $M_2 A_2 T$  einander ähnlich und es ist

$$\frac{A_1 M_1}{T M_1} = \frac{A_2 M_2}{T M_2}$$

Setzt man  $S_1 T = q_1$  und  $S_2 T = q_2$  so ist aus der Fig. 38:  $T M_1 = r_1 - q_1$  und  $T M_2 = r_2 - q_2$ , wenn  $r_1$  und  $r_2$  die beiden Radien der Linsen (ihrem absoluten Werte nach) sind.

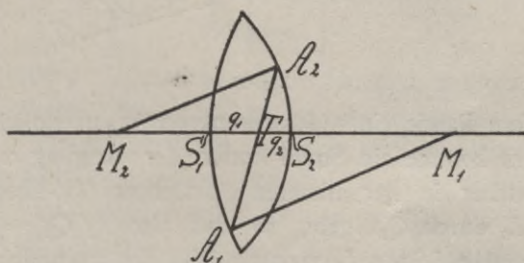


Fig. 38.

Die obige Proportion ergibt also:

$$\frac{r_1}{r_1 - q_1} = \frac{r_2}{r_2 - q_2} \text{ oder } \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Nun sind die Brechkraften  $D_1$  und  $D_2$  der ersten und zweiten Fläche, wenn  $n$  der Brechungsexponent der Linse ist:

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} \text{ und } D_2 = \frac{n-1}{r_2}$$

folglich hat man auch

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

womit bewiesen ist, dass  $T$  der Kernpunkt der Linse ist.

Der Kernpunkt einer Linse wird in der Litteratur gewöhnlich als optischer Mittelpunkt bezeichnet. Bildet man den Kernpunkt gemäß Aufgabe 60 durch die beiden Linsenflächen hindurch ab, so erhält man die Hauptpunkte  $H$  und  $H^1$  der ganzen Linse.

**Aufgabe 65.** Beweise, daß die Brechkraft  $D$  zweier dünnen Linsen im Abstand  $d$  gegeben ist durch

$$D = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2,$$

wo  $D_1$  und  $D_2$  die Brechkraften der Einzellinsen sind.

**Lösung:** In Fig. 39 sind zwei dünne Sammellinsen  $L_1$  und  $L_2$  gezeichnet mit den Scheiteln  $S_1$  und  $S_2$ , sodaß  $S_1 S_2 = d$  ist.

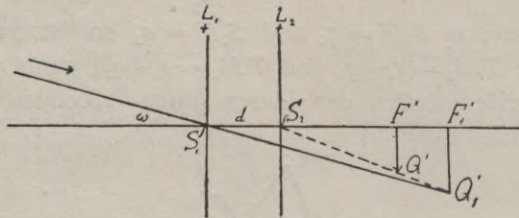


Fig. 39.

Vom Rande eines (achsensenkrechten) unendlich fernen Objektes komme ein Strahl unter der Neigung  $\omega$  durch  $S_1$ , welcher in der hinteren Fokalebene ( $F_1'$ -Ebene) der Linse  $L_1$  durch  $Q_1'$  geht, so daß also  $F_1' Q_1' = y_1'$  das durch die Linse  $L_1$  erzeugte Bild des unendlich fernen Objektes ist, durch Einschaltung der Linse  $L_2$ , wird dieses Bild nach  $F'$  von der Größe  $F' Q' = y'$  verlegt, wo  $F'$  der Brennpunkt der Kombination ( $L_1, L_2$ ) ist. Dann ist nach Aufgabe 55

$$f = \frac{y'}{\omega} \quad \dots \dots \dots 1)$$

die Brennweite der Kombination.

Bezeichnet man nun die beiden Brennweiten der Einzellinsen mit  $f_1$  und  $f_2$  und setzt für einen Augenblick:  $S_2 F_1' = a$  und  $S_2 F' = a'$ , so hat man

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{y_1'}{y'} = \frac{a}{a'} \quad a = f_1 - d$$

und  $y_1' = \omega \cdot f_1$ .

In der ersten dieser Gleichungen mußte  $a$  negativ gesetzt werden, weil bei der rückwärtigen Abbildung von  $y_1'$  durch Linse  $L_2$  hindurch das abzubildende Objekt rechts von der Linse  $L_2$  liegt.

Aus den letzten vier Gleichungen erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{\omega}{y'} = \frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 \cdot f_2}$$

und unter Berücksichtigung von 1)

$$\text{II) } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Setzt man  $\frac{1}{f_1} = D_1$        $\frac{1}{f_2} = D_2$ , so wird

$$\text{III) } D = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2.$$

### § 11. Die Bedeutung der Vorzeichen in der geometrischen Optik. Das anschauliche und das rationelle System der Zählung.

**Erklärung:** Wenn man an irgendeine geometrische Konstruktion — insbesondere an eine geometrisch optische — algebraische Rechnungen knüpft, indem man Strecken mit Buchstaben bezeichnet, so tritt, wenn man dann die Buchstaben durch Zahlen ersetzt, häufig der Fall ein, daß sich negative Werte für die gesuchte Strecke ergeben. Dies erscheint dem Anfänger un bequem, wenn nicht störend; tatsächlich weist dies Verhalten aber auf einen fast „wunderbaren“ Zusammenhang zwischen Raum und Zahl hin, ohne den die mathematische Naturbetrachtung niemals die Bedeutung gewonnen hätte, die sie tatsächlich besitzt. Wie wir schon bei den Aufgaben über dünne Linsen gesehen haben, bedeutet ein negativer Wert von  $a'$ , daß das Bild links von der Linse liegt, und ein negativer Wert von  $y'$  besagt, daß das Bild aufrecht steht.

Wenn man nun mehrere dünne Linsen oder einzelne Flächen in vorgeschriebenen Abständen hat, und unter Anwendung immer derselben Abbildungsformeln von Fläche zu Fläche resp. von Linse zu Linse weiter rechnet, so erhält man zum Schluß einen positiven oder negativen Wert für die gesuchte Größe, und man muß sich nun klarmachen, welche Bedeutung das betreffende Vorzeichen hat. Ist man hierzu nicht imstande, so ist man den schwersten Irrtümern ausgesetzt. Da nun bei fast allen optischen und ophthalmologischen Instrumenten

derartige Verbindungen mehrerer Linsen auftreten, so ist die Frage nach der Bedeutung der Vorzeichen für die konstruierende Optik von der allergrößten Bedeutung. So mancher, der mit Lust und Liebe sich den so reizvollen Problemen der geometrischen Optik zuwandte, ist schließlich durch diese Verhältnisse abgeschreckt. Ein hervorragender Augenarzt und Ophthalmologe äußerte einmal, daß an der „Tücke der Vorzeichen“ viele seiner Bemühungen zur Konstruktion optischer Anordnungen gescheitert seien. Wir wollen uns deshalb mit diesem Gegenstande näher beschäftigen und verweisen gleichzeitig auf die Arbeit von v. Rohr „Ueber die Nomenklatur optischer Systeme“. Zentralz. f. O. u. M. 1916, Heft 15.

Als Leitsatz für die weiteren Betrachtungen stellen wir auf:

Hat man einen Strahlengang durch eine Mehrzahl von Linsen oder Flächen konstruiert, so kann man, ohne Irrtümern zu verfallen, sämtliche Strecken als positiv annehmen, wenn man algebraische Rechnungen daran knüpfen will. Die vorliegende Figur gilt dann als *Normalfigur*. Ein *negatives* Vorzeichen einer Strecke, das sich bei der Ausrechnung ergibt, weist dann darauf hin, daß der Endpunkt der betreffenden Strecke vom Ausgangspunkt dieser Strecke aus gerechnet, in entgegengesetzter Richtung liegt als bei der *Normalfigur*.

Es ist klar, daß man sich zum leichteren gegenseitigen Verständnis bei der allgemeinen Behandlung geometrisch-optischer Aufgaben auf bestimmte Normalfiguren einigen müßte. Diese Einigung ist jedoch nicht vollständig erfolgt, und wird wohl nie geschehen, weil verschiedene Normalfiguren für denselben optischen Vorgang je nach Geschmack und Bedürfnis verschiedene Nachteile und Vorteile haben.

Wir haben bisher bei den auftretenden Fixpunkten (Scheitel einer dünnen Linse, oder einer einzelnen Fläche, Hauptpunkte und Brennpunkte eines Systems) als Normalfigur eine solche angenommen, in der bei einer Lichtrichtung von links nach rechts, das Objekt links und das Bild rechts von dem zugehörigen Fixpunkt liegt, wobei das achsensenkrechte Objekt als umgekehrtes Bild abgebildet wird.

Es entspricht dies einer Reihe von Vorgängen, die sich besonders häufig darbieten, nämlich, wenn ein Sammelssystem von einem äußeren Objekt ein reelles Bild entwirft (Photographische Kamera, Projektion, menschliches Auge). Die Entfernung des reellen Objektes vom Fixpunkt ist positiv. Man nennt eine solche Zählweise das anschauliche System der Zählung (A. S.).

Als Nachteil dieser Zählweise kann man geltend machen, daß man im Objekt- und Bildraum nach verschiedenen Richtungen rechnet, nämlich einmal entgegen der Lichtrichtung, das andere Mal im Sinne derselben und daß Objekt und Bild bei gleichem Vorzeichen verschieden gerichtet sind.

Eine gewisse Schwierigkeit besteht ferner in Folgendem:

Wenn man die Normalfigur des anschaulichen Systems (A. S.) auf die Brechung zweier hintereinander geschalteter sammelnder Systeme anwendet, (etwa zweier dünner Linsen oder zweier einzelner brechenden Flächen), so muß man die allgemeine Darstellung konsequenter Weise so wählen, daß das erste System von einem reellen Objekt ein umgekehrtes Bild entwirft, und das zweite System, indem man das Bild als Objekt auffaßt, hiervon ein neues umgekehrtes Bild entwirft, das nun dem ursprünglichen Objekt gleichgerichtet ist. Ein positiver Wert von  $\beta = \frac{y'}{y}$  be-

zogen auf das kombinierte System, weist also auf gleichgerichtete Bilder hin. Durch  $\beta = 1$  wären also die Hauptebenen definiert, während z. B. für eine einzige dünne Linse oder eine einzelne brechende Fläche diese Ebenen durch  $\beta = -1$  festgelegt sind, wie wir oben gesehen haben. Fügt man in analoger Weise ein drittes System hinzu, so wechselt der Maßstab  $\beta$  wieder sein Vorzeichen usw.

Man kann also, ohne auf die Anzahl der Brechungen Rücksicht zu nehmen, gar keine allgemeinen Gesetze für das anschauliche System aufstellen.

Alle diese Schwierigkeiten fallen weg, wenn man die Schnittweiten im Objekt- und Bildraum in derselben Richtung rechnet, und zwar hat man sich seit langem in der rechnenden Optik dahin geeinigt, daß eine Strecke positiv ist, wenn sie sich vom Fixpunkt aus im Sinne der Lichtbewegung erstreckt, negativ, wenn der entgegengesetzte Fall vorliegt.

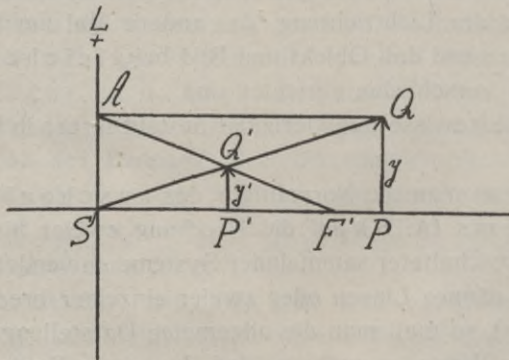


Fig. 40.

Fig. 40 zeigt z. B. für diesen Fall die Normalfigur. Dort sind für den Fixpunkt S alle Strecken positiv. Das Objekt PQ liegt rechts von der Linse L, ist also virtuell, wie wir dies bei den Durchdringungsproblemen bereits gesehen haben (Vgl. § 6.). Das Bild P'Q' ist

dem Objekt  $PQ$  gleichgerichtet, worauf jetzt ein positiver Wert von  $\beta$  hinweist. Dieses System der Zählung nennt man das rationale (R. S.).

(Vgl. v. Rohr: Zur Terminologie für praktische Optiker: Zentralz. f. O. und M. 1916 Nr. 14.)

**Aufgabe 66.** Entwickle die Abbildungsbeziehungen einer dünnen Linse im (R. S.) aus der Normalfigur 40.

**Lösung:** Die Konstruktion des Bildes folgt nach den früheren Regeln, indem man  $QA$  achsenparallel und  $QS$  durch den Scheitel  $S$  legt. Wo die letztere Gerade von der Geraden  $AF'$  geschnitten wird, ist der Bildpunkt  $Q'$ . Man setze (Fig. 40):

$$SP = a \quad SP' = a' \quad SF' = f \quad PQ = y \quad P'Q' = y'$$

Dann ist aus den ähnlichen Dreiecken  $QPS$  und  $Q'P'S$  sofort:

$$I) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken  $ASF'$  und  $Q'P'F'$  ist ferner, da  $AS = y$  ist:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f - a'}{f}.$$

Demnach ist:

$$\frac{a'}{a} = \frac{f - a'}{f} \quad \text{oder}$$

$$II) \quad \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f}.$$

(Vergl. auch Aufgabe 65).

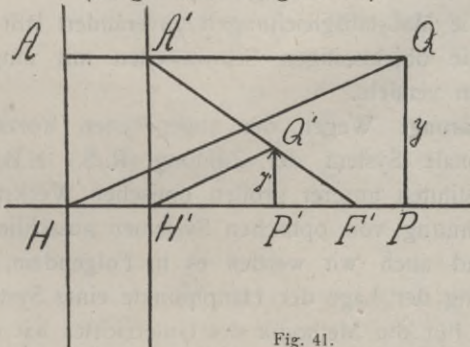


Fig. 41.

**Aufgabe 67.** Konstruiere die Normalfigur im (R. S.) für den Fall eines beiderseits von Luft umgebenen Systems, wo also das Objekt rechts vom System liegt und demnach virtuell ist.

**Lösung:** Vom Objektpunkt  $Q$  (Fig. 41) zieht man eine Achsenparallele, welche die beiden Hauptebenen in  $A$  und  $A'$  schneidet, und verbindet  $A'$  mit  $F'$ . Man zieht dann  $QH$  und hierzu parallel eine Gerade durch  $H'$ . Wo diese die Gerade  $A'F'$  schneidet, liegt der Bildpunkt  $Q'$ .

**Aufgabe 68.** Entwickle die Abbildungsbeziehungen im (R. S.) aus der Normalfigur 41 ( $n = n'$ ).

**Lösung:** Man setze:  $HP = a$ ;  $H'P' = a'$ ;  $H'F' = f$ . Ferner ist  $AH = A'H' = y$ . Aus den ähnlichen Dreiecken  $HQP$  und  $H'Q'P'$  folgt sofort:

$$1) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}.$$

Ferner ist aus den ähnlichen Dreiecken  $F'A'H'$  und  $F'Q'P'$ :

$$\frac{y}{y'} = \frac{f}{f - a'}$$

woraus wieder folgt:

$$II) \quad \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f}.$$

**Anmerkung.** Weitere Betrachtungen dieser Art führen zu dem Resultat, daß man von den sämtlichen oben gegebenen Beziehungen des anschaulichen Systems der Zählung (A. S.) zu dem (R. S.) übergeht, wenn man

- 1) die Maßstabgleichungen unverändert läßt
- 2) die objektseitigen Schnittweiten mit umgekehrten Vorzeichen versieht.

**Erklärung:** Wegen der angegebenen Vorzüge wird das rationale System der Zählung (R. S.) z. B. in den Recheninstituten unserer großen optischen Werkstätten zur Durchrechnung von optischen Systemen ausschließlich benutzt, und auch wir werden es in Folgendem, z. B. zur Berechnung der Lage der Hauptpunkte eines Systems, verwenden. Für die Methodik des Unterrichtes hat es jedoch



den großen Nachteil, daß man einem vor einem System oder einer Linse liegenden Punkte sofort eine negative Entfernung zuschreiben muß. Das wichtigste Mittel für den Anfänger, sich über die Wirkung eines Linsensystems Klarheit zu verschaffen, ist die Konstruktion. Knüpft man dann hieran eine algebraische Rechnung, so wird die Anwendung der (R. S.) häufig als Zwang empfunden, der die anschauliche Vorstellung erschwert. Wir werden deshalb in den typischen Figuren für den Strahlengang von Linsenkombinationen und optischen Instrumenten in der Regel die Strecken als positiv annehmen, wie sie sich als Resultat der Konstruktion ergeben. Was wir an Gesetzmäßigkeit verlieren, gewinnen wir reichlich an Anschaulichkeit. Durch Gullstrand, v. Rohr und Hess ist übrigens die rationelle Zählweise auch in die ophthalmologische Optik eingeführt.

**Aufgabe 69.** Wie lauten die allgemeinen Abbildungsbeziehungen im (R. S.) und zwar sowohl auf die Hauptpunkte, als auch auf beliebige konjugierte Punkte bezogen?

Für die Hauptpunkte erhält man gemäß Aufgabe 61 unter Berücksichtigung der obigen Erklärung:

$$I) \quad A' = D + A$$

$$II) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{A}{A'}$$

Die auf beliebige konjugierte Punkte bezogenen Gleichungen werden gemäß Aufgabe 59, wenn die Vergrößerungen

$$\frac{n}{p} = P \quad \frac{n'}{p'} = P'$$

einführt:

$$III) \quad P' = \frac{D}{B} + \frac{P}{B^2}$$

$$IV) \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{1}{B}$$

§ 12. Berechnung von Brechkraft und Lage der Hauptpunkte bei Linsen von endlicher Dicke.

**Aufgabe 70.** Wie lauten die Beziehungen im (R. S.) für die Kombination zweier Systeme mit den Hauptpunkten  $H_1$  und  $H'_1$  und  $H_2$  und  $H'_2$  (Vergl. z. B. Fig. 36), wenn man die Entfernung  $H'_1 H_2$ , nachdem man sie mit dem im Medium zwischen den beiden Systemen herrschenden Brechungsexponenten dividiert (reduziert) hat, mit  $\delta$  bezeichnet.

**Lösung:** Man hat in der Schreibweise der Gullstrand-schen Vergenzen

$$I) \quad h = \frac{\delta \cdot D_2}{D}$$

$$II) \quad h' = -\frac{\delta \cdot D_1}{D}$$

wo  $D$  die Brechkraft der Kombination ist und den Wert hat:

$$III) \quad D = D_1 + D_2 - \delta \cdot D_1 \cdot D_2.$$

In diesen Gleichungen stellen  $D_1$  und  $D_2$  die Brechkraften der Einzelsysteme dar, während  $h$  und  $h'$  die reduzierten Entfernungen des vorderen und hinteren Hauptpunktes des ganzen Systems darstellen und zwar bezogen auf die Punkte  $H_1$  und  $H'_2$ .\*)

**Aufgabe 71.** Wie vereinfacht sich das in der vorigen Aufgabe angegebene Problem, wenn man es auf eine einfache in Luft befindliche Linse von der Dicke  $d$  und dem Brechungsexponenten  $n$  anwendet?

**Lösung:** Die beiden Einzelsysteme sind jetzt einzelne brechende Flächen mit den Scheiteln  $S_1$  und  $S_2$ . Die Hauptpunkte  $H_1$  und  $H'_1$  fallen mit  $S_1$ , die Hauptpunkte  $H_2$  und  $H'_2$  mit  $S_2$  zusammen; ferner ist  $\delta = \frac{d}{n}$  und  $h$

\*) Der Beweis der Gl. III läßt sich führen, wie der Beweis in Aufg. 65, wenn man an Stelle der Punkte  $S_1$  und  $S_2$  die Hauptpunkte der beiden Systeme einführt. Die Gleichungen I und II erhält man durch Abbildung des Kernpunktes durch die beiden Systeme (Aufgabe 62).

und  $h'$  werden die einfachen (nicht reduzierten) Abstände von  $S_1$  resp.  $S_2$ .

Man hat also:

$$I) \quad h = \frac{d \cdot D_2}{n D} \quad (\text{von } S_1 \text{ aus})$$

$$II) \quad h' = -\frac{d \cdot D_1}{n D} \quad (\text{von } S_2 \text{ aus})$$

$$III) \quad D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 \cdot D_2.$$

Die Größen  $D_1$  und  $D_2$  bedeuten jetzt die Brechkräfte der einzelnen Flächen, die gemäß Gl. IV in Aufgabe 61 zu bilden sind.

**Aufgabe 72.** Man berechne die Brechkraft und die Lage der Hauptpunkte einer Bikonvexlinse von  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = -16$  cm und  $d = 2$  cm, wenn  $n = 1,5$  ist.

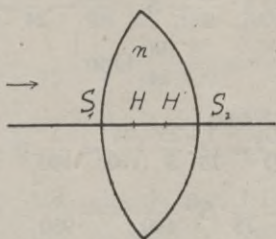


Fig. 42.

**Lösung:** Gemäß Fig. 42 bilde man zunächst  $D_1$ . Zu dem Zwecke durchdringt man die 1. Fläche in Lichtrichtung und bildet die Differenz des Brechungsindex hinter und vor der Fläche, erhält also  $n-1$ . Diese Größe dividiert man durch den Radius der vorderen Fläche  $r_1$  in Metern ausgedrückt.

Man erhält also:

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} = \frac{1,5-1}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ Dptr.}$$

Man bildet dann  $D_2$ , indem man die 2. Fläche der Linse ebenfalls in Lichtrichtung durchdringt und die

Differenz des Brechungsindex hinter und vor der Fläche bildet, erhält also  $1 - n$ . Diese Größe dividiert man durch den ebenfalls in Metern ausgedrückten Radius der 2. Linsenfläche, der negativ zu setzen ist, weil die betreffende Fläche dem ankommenden Lichte die hohle Seite entgegenstellt. Man erhält demnach:

$$D_2 = \frac{1 - n}{-r_2} = \frac{n - 1}{r_2} = \frac{1/2}{4/25} = \frac{25}{8} \text{ Dptr.}$$

Um die Gesamtbrechkraft der Linse zu erhalten, hat man noch den Quotienten  $\delta = \frac{d}{n} = \frac{0,02 \cdot 2}{3} = \frac{1}{75} \text{ m}$  zu bilden.

Man hat nun zur Bestimmung der Brechkraft:

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 - \frac{d}{n} \cdot D_1 \cdot D_2 \\ &= 5 + \frac{25}{8} - \frac{1}{75} \cdot 5 \cdot \frac{25}{8} = 5 + \frac{25}{8} - \frac{5}{24} = \frac{120}{24} + \frac{75}{24} - \frac{5}{24} \\ &= \frac{190}{24} \text{ Dptr.} \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} h &= \frac{d \cdot D_2}{n \cdot D} = \frac{1}{75} \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{24}{190} = \frac{1}{190} \text{ m} = \frac{10}{19} \text{ cm} \\ h' &= -\frac{d \cdot D_1}{n \cdot D} = -\frac{1}{75} \cdot 5 \cdot \frac{24}{190} = -\frac{8}{950} = -\frac{4}{475} = -\frac{16}{19} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Da wir im (R. S.) rechnen, so liegt  $H \frac{10}{19} \text{ cm}$  rechts von  $S_1$  und  $H' \frac{16}{19} \text{ cm}$  links von  $S_2$  (wie dies Fig. 42 zeigt).

**Aufgabe 73.** Man berechne die Brechkraft und die Lage der Hauptpunkte einer Bikonkavlinse von  $r_1 = -10 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 16 \text{ cm}$  und  $d = 2 \text{ cm}$ , wenn  $n = 1,5$  ist.

**Lösung:** Gemäß Aufgabe 72 bilde man zunächst  $D_1$  und  $D_2$ .

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{n - 1}{-r_1} = -5 \text{ Dptr.} \\ D_2 &= \frac{1 - n}{r_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} = -\frac{25}{8} \text{ Dptr.} \end{aligned}$$

Der Quotient  $\frac{d}{n}$  beträgt (wie in Aufgabe 72)  $\frac{1}{75} \text{ m}$ .

Die Brechkraft der Linse ist bestimmt durch die Formel:

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} \cdot D_1 \cdot D_2$$

$$= -5 - \frac{25}{8} - \frac{1}{75} \cdot 5 \cdot \frac{25}{8} = -\frac{200}{24} \text{ Dptr.}$$

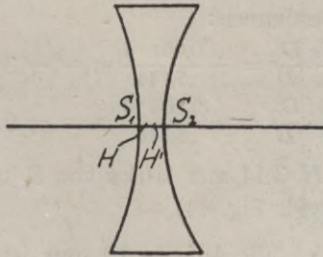


Fig. 43.

Ferner ist:

$$h = \frac{d \cdot D_2}{n \cdot D} = \frac{1}{75} \cdot -\frac{25}{8} \cdot -\frac{24}{200} = \frac{1}{200} \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

$$h' = -\frac{d \cdot D_1}{n \cdot D} = -\frac{1}{75} \cdot -5 \cdot -\frac{24}{200} = -\frac{1}{125} \text{ m} = -\frac{4}{5} \text{ cm}$$

$H$  liegt also  $\frac{1}{2}$  cm rechts  $S_1$  und  $H'$   $\frac{4}{5}$  cm links von  $S_2$  (vgl. Fig. 43).

**Aufgabe 74.** Mit einem nach Dioptrien geteilten Sphärometer, wie ihn Augenärzte und Optiker zu ge-

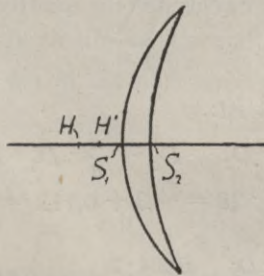


Fig. 44.

brauchen pflegen, hat man für einen positiven Meniskus gefunden  $D_1 = 9$  Dptr. und  $D_2 = -4$  Dptr. Mittels eines Dickentasters hat man  $d = 6$  mm festgestellt. Wie groß ist die Brechkraft  $D$  und wo liegen die Hauptpunkte?

Die Brechkraft  $D$  erhält man sofort aus folgender Formel:

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} \cdot D_1 \cdot D_2$$

$$= 5 + 0,004 \cdot 36 = 5 + 0,144 = 5,144 \text{ Dptr.}$$

Die Lage der Hauptpunkte läßt sich sofort aus folgenden Formeln bestimmen:

$$h = \frac{d}{n} \cdot \frac{D_2}{D} = -\frac{0,004 \cdot 4}{5,144} \text{ m} = -3,11 \text{ mm}$$

$$h' = -\frac{d}{n} \cdot \frac{D_1}{D} = -\frac{0,004 \cdot 9}{5,144} \text{ m} = -6,99 \text{ mm}$$

Also liegt  $H$  3,11 mm links von  $S_1$  und  $H'$  6,99 mm links von  $S_2$  (vgl. Fig. 44).

**Aufgabe 75.** Wie Aufgabe 72, nur ist jetzt die Brechkraft und die Lage der Hauptpunkte eines negativen Meniskus zu bestimmen, wenn  $D_1 = 4$ ,  $D_2 = -7$  und  $d = 6$  mm ist.

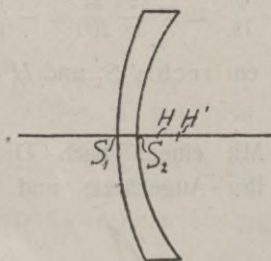


Fig. 45.

Die Brechkraft ist:

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} \cdot D_1 \cdot D_2$$

$$= -3 + 0,004 \cdot 28 = -3 + 0,112 = -2,888 \text{ Dptr.}$$

Ferner ist:

$$h = \frac{d \cdot D_2}{n \cdot D} = \frac{0,004 \cdot 7}{2,888} \text{ m} = 9,69 \text{ mm}$$

$$h' = -\frac{d \cdot D_1}{n \cdot D} = -\frac{0,004 \cdot 4}{2,888} \text{ m} = 5,54 \text{ mm}$$

Also liegt  $H$  9,69 mm rechts von  $S_1$  und  $H'$  5,54 mm rechts von  $S_2$  (Fig. 45).

**Aufgabe 76.** Wie groß ist die Brechkraft einer Planlinse und wo liegen die Hauptpunkte, wenn die Planfläche hinten liegt?

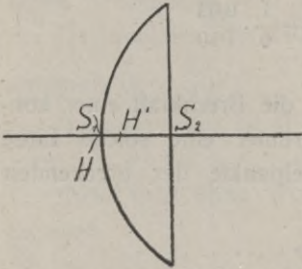


Fig. 46.

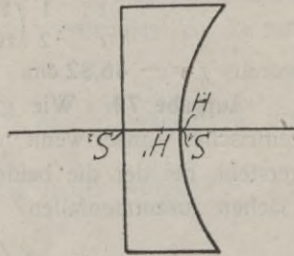


Fig. 47.

**Lösung:** Da eine Planfläche die Brechkraft Null hat, so ist also in den allgemeinen Formeln  $D_2 = 0$  zu setzen und man erhält

$$D = D_1 \quad h = 0 \quad h' = -\frac{d}{n}.$$

Die Brechkraft der Linse ist gleich der der Vorderfläche und  $H'$  liegt um  $\frac{d}{n}$  von  $S_2$  nach links hin entfernt. Figur 46 und 47 zeigt die Lage der Hauptpunkte bei einer plankonvexen und einer plankonkaven Linse.

**Aufgabe 77.** Drücke die Brechkraft oder Brennweite einer dicken Linse durch die Radien und die Dicke aus.

**Lösung:** Man hat in die allgemeine Gleichung für  $D$

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} \quad \text{und} \quad D_2 = -\frac{n-1}{r_2}$$

einzusetzen und erhält:

$$1) \quad \frac{1}{f} = D = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_1 \cdot r_2}.$$

Sind  $r_1$  und  $r_2$  positiv, so liegt ein positiver oder negativer Meniskus vor, ist  $r_2$  negativ, so handelt es sich um eine Bilinse; doch kann man die letzteren Unterschiede strenggenommen nur machen, wenn  $d$  im Verhältnis zu  $r_1$  und  $r_2$  klein ist.

**Aufgabe 78.** Wie groß ist  $f$  für  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = 7$  cm,  $d = 3$  mm = 0,03 cm?

**Lösung:** Aus 1) der Aufgabe 77 folgt für  $n = \frac{3}{2}$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{0,03}{7 \cdot 10}$$

woraus  $f = -46,82$  cm.

**Aufgabe 79.** Wie groß ist die Brechkraft einer konzentrischen Linse, wenn man hierunter eine solche Linse versteht, bei der die beiden Mittelpunkte der brechenden Flächen zusammenfallen?

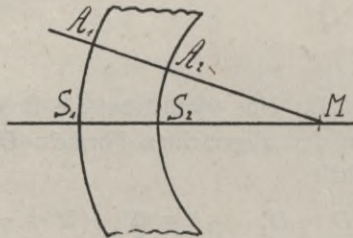


Fig. 48.

**Lösung:** Hier ist gemäß Fig. 48  $S_1M - S_2M = S_1S_2$ , wenn  $S_1$  und  $S_2$  auf derselben Seite von  $M$  liegen, oder  $r_1 - r_2 = d$ , und Gl. 1) in Aufgabe 77 liefert nach einigen Umformungen:

$$1) \quad D = \frac{n-1}{n} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r_1 \cdot r_2}$$

Die Brechkraft einer solchen Linse ist also stets negativ und wird Null, wenn  $d$  zu Null wird.

**Erklärung:** Legt man durch  $M$  beliebige sekundäre Achsen, so schneiden diese, wie z. B. die Gerade  $A_1A_2M$  in Fig. 48, die brechenden Flächen senkrecht, genau wie die Hauptachse  $S_1S_2H$ . Denken wir uns in  $M$  den Drehpunkt eines Auges, welches um diesen Punkt rollt, so findet dieses nach allen Richtungen dieselben Abbildungsverhältnisse vor.<sup>1)</sup> Eine solche Linse wäre also ein ge-

<sup>1)</sup> Insbesondere ist auch in Richtung der sekundären Achse kein Astigmatismus vorhanden.



radezu ideales Brillenglas für Kurzsichtige, wenn die Dicke des Glases nicht so unbequem groß wäre.

**Aufgabe 80.** Wie groß ist die Dicke eines konzentrischen Brillenglases von  $-4$  Dptr., wenn man den Abstand des Drehpunktes des Auges vom Brillenglas zu 28 mm annimmt ( $n = \frac{3}{2}$ )?

**Lösung:** Hier ist (Fig. 48)  $S_2 M = r_2 = 0,028$  m, und man hat:  $r_1 = d + r_2 = d + 0,028$ .

Setzt man diese Werte in Gl. 1) der Aufgabe 79 ein, so wird

$$\begin{aligned} -4 &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{0,028 \cdot (d + 0,028)} \\ &= 0,007 \text{ m} = 7 \text{ mm.} \end{aligned}$$

**Erklärung:** Unter einer „Nulllinse“ versteht man einen Meniskus mit gleichen Radien.

**Aufgabe 81.** Wie groß ist die Brechkraft einer Nulllinse?

**Lösung:** Man setze in Gl. 1) der Aufgabe 77

$$\text{und hat} \quad D = \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r^2} = \frac{1}{f}$$

Für  $d = 0$  erhält man eine unendlich dünne Kugelschale ohne optische Wirkung (ohne Fokus).

Setzt man z. B.  $n = \frac{3}{2}$ ,  $d = 3$  cm,  $r = 8$  cm, so erhält man  $f = 128$  cm.

**Anmerkung:** Die Nulllinsen liefern bei geeigneter Blendenstellung, wenn man das Licht auf die hohle Seite fallen läßt, ein ausgezeichnetes astigmatisch geebnetes Gesichtsfeld. Eine symmetrische Zusammenstellung zweier gleicher Nulllinsen kann als die Urform des bekannten Doppelanastigmaten aufgefaßt werden. (v. Hoegh.)

**Aufgabe 82.** Wie groß ist die Brechkraft einer Vollkugel?

**Lösung:** Gleichung 1) der Aufgabe 77 liefert, wenn man jetzt  $r_1 = r$ ,  $r_2 = -r$  und  $d = 2r$  setzt:

$$D = \frac{(n-1)2}{r} - \frac{2(n-1)^2}{n \cdot r} \text{ oder } D = \frac{2(n-1)}{n \cdot r}.$$

Für  $n = \frac{3}{2}$  wird  $D = \frac{2}{3r}$  oder  $f = \frac{3r}{2}$ . Da die Hauptpunkte hier ersichtlich in dem Mittelpunkt zusammenfallen, so liegt also der Brennpunkt um  $\frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}$  von der Kugel entfernt.

**Aufgabe 83.** Wie groß ist die Brechkraft  $\Delta$  einer Linse vom Brechungsexponenten  $N$ , die beiderseits von einem Medium vom Brechungsexponenten  $n$  umgeben ist.

**Lösung:** Sind wieder  $r_1, r_2$  und  $d$  die bestimmenden Stücke der Linse, so sind jetzt die beiden Flächenbrechkraft  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ .

$$\Delta_1 = \frac{N-n}{r_1} \text{ und } \Delta_2 = \frac{n-N}{r_2},$$

wenn man die Meniskenform voraussetzt, während die entsprechenden Brechkraft in Luft wären:

$$D_1 = \frac{N-1}{r_1} \text{ und } D_2 = \frac{1-N}{r_2}.$$

Man erhält also, wenn man

$$\frac{N-n}{N-1} = \lambda$$

setzt:

$$\Delta_1 = D_1 \cdot \lambda \text{ und } \Delta_2 = D_2 \cdot \lambda.$$

Diese Werte sind in die allgemeine Gleichung:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 - \frac{d}{N} \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

einzusetzen, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Für den Fall einer unendlich dünnen Linse ( $d = 0$ ) hat man einfach:

$$\Delta = D_1 \cdot \lambda + D_2 \cdot \lambda = (D_1 + D_2) \lambda = D \cdot \lambda,$$

wo  $D$  die Brechkraft der Linse in Luft ist.

Taucht man z. B. ein Brillenglas von der Brechkraft  $D$  ( $N = \frac{3}{2}$ ) in Wasser ein ( $n = \frac{4}{3}$ ), so wird

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{3}$$

also ist  $\frac{\Delta}{D} = \frac{1}{3}$ .

Die Brechkraft sinkt also auf den dritten Teil herab.

### Kap. III. Die Strahlenbegrenzung.

#### § 13. Die Eintritts- und Austrittspupille.

**Aufgabe 84.** Zwischen zwei in Luft befindlichen Systemen sei eine Blende angebracht. Konstruiere die von den beiden Teilsystemen nach links und rechts (nach dem Objektraum und dem Bildraum zu) entworfenen Blendenbilder.

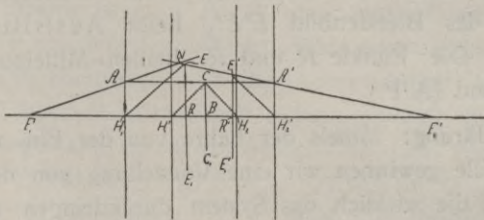


Fig. 49.

**Lösung:** Gemäß Fig. 49 haben die beiden Teilsysteme I und II die Hauptpunkte  $H_1$  und  $H'_1$  einerseits und  $H_2$  und  $H'_2$  andererseits, der vordere Brennpunkt des ersten Systems sei  $F_1$ , der hintere des zweiten werde mit  $F'_2$  bezeichnet. Man kann sich vorstellen, es handle sich um ein aus den beiden Teilen I und II bestehendes photographisches Objektiv. In dem Luftraum zwischen beiden Systemen befinde sich die Blende  $CB C_1$ , (etwa eine Irisblende) mit dem Mittelpunkt  $B$  und dem Durchmesser  $CC_1$ . Um deren nach links und rechts hin entworfene Bilder zu finden, ziehe man in bekannter Weise durch  $C$  eine Achsenparallele, die die  $H_1$ -Ebene in  $A$  und die  $H'_2$ -Ebene in  $A'$  treffe und verbinde diese Schnittpunkte bezüglich mit  $F_1$

und  $F'_2$ . Man hat dann die durch  $C$  gehende sekundäre Achse  $F_1 A A' F'_2$ , mit deren Hilfe die Konstruktion leicht gelingt. Man verbinde nämlich  $C$  mit  $H'_1$  und mit  $H_2$  und lege zu diesen Verbindungslinien Parallelen durch  $H_1$  resp.  $H'_2$ , welche die Verlängerungen von  $F_1 A$  resp.  $F'_2 A'$  in  $E$  und  $E'$  schneiden. Dann sind  $E$  und  $E'$  die beiden durch die Teilsysteme entworfenen Bilder von  $C$ . Fällt man dann noch die Achsenlote  $ER$  und  $E'R'$  und verlängert sie um sich selbst bis  $E_1$  resp.  $E'_1$ , so sind  $EE_1$  und  $E'E'_1$  die beiden gesuchten Blendenbilder. Dieselben sind virtuell, man sieht sie, wenn man das ganze System gegen einen hellen Hintergrund (Taghimmel) hält, als leuchtende Scheiben im System gewissermaßen schweben. Die Blende  $CC_1$  nennt man auch die wirksame Blende, das Bild  $EE_1$  im Objektraum heißt Eintrittspupille (E. P.), das Blendenbild  $E'E'_1$  heißt Austrittspupille (A. P.). Die Punkte  $R$  und  $R'$  heißen Mittelpunkte der (E. P.) und (A. P.).

**Erklärung:** Mittels der Lehre von der Ein- und Austrittspupille gewinnen wir eine Vorstellung von denjenigen Strahlen, die wirklich das System durchdringen und sich in den Bildpunkten vereinigen. Die Fläche der (E. P.) ist die Basis aller von den Objektpunkten auf das System fallenden Strahlenkegel, während die (A. P.) die Basis aller aus dem System austretenden Kegel ist. Die Mittelpunkte  $R$  und  $R'$  der (E. P.) und (A. P.) sind zueinander konjugiert, ebenso ihre Durchmesser ( $EE_1$  u.  $E'E'_1$  in Fig. 49). Die  $R$ - und die  $R'$ -Ebene sind also zu einander konjugiert. Setzen wir die Durchmesser  $EE_1 = 2\rho$  und  $E'E'_1 = 2\rho'$ , so ist also der Maßstab in diesen Ebenen gegeben durch

$$B = \frac{2\rho'}{2\rho} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Strahlen, die von Objektpunkten nach  $R$  hingehen und also durch  $R'$  gehend das System verlassen, heißen Hauptstrahlen.

**Aufgabe 85.** Zeichne den Gang der Hauptstrahlen.

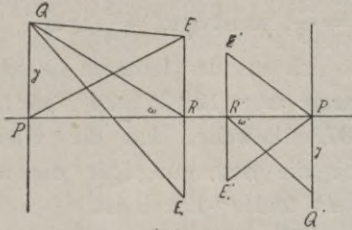


Fig. 50.

**Lösung:** In Fig. 50 sind unter Weglassung aller übrigen Konstruktionselemente nur die (E. P.) und die (A. P.) des Systems gezeichnet mit den Mittelpunkten  $R$  und  $R'$  und den Durchmessern  $EE_1$  und  $E'E'_1$ . Der Achsenpunkt  $P$  entsendet den Strahlenkegel  $PEE_1$  in das System, der als Strahlenkegel  $E'E'_1P'$  das System verläßt und sich in  $P'$  zu dem konjugierten Bildpunkt vereinigt. Der zugehörige Hauptstrahl ist die Achse selbst. Von dem senkrecht über  $P$  befindlichen Achsenpunkt  $Q$  dringt der Strahlenkegel  $QEE_1$  in das System ein und verläßt dasselbe als Strahlenkegel  $E'E'_1Q'$ , um sich in  $Q'$  zu einem Bildpunkt zu vereinigen. Der zugehörige Hauptstrahl ist  $QR$ , der im Bildraum als  $R'Q'$  verläuft. Die Hauptstrahlen bilden also gewissermaßen die Achsen der einfallenden und austretenden Strahlenkegel. Jeder Hauptstrahl ist von einem kegelförmigen Bündel abbildender Strahlen umgeben.

§ 14. Die Pupillen und die Orthoskopie.

**Aufgabe 86.** Berechne die Neigung der bildseitigen Hauptstrahlen zur Achse.

**Lösung;** Ein Hauptstrahl  $QR$  resp.  $Q'R'$  bilde im Objekt resp. Bildraum die Winkel  $\omega$  resp.  $\omega'$  mit der Achse (Fig. 50). Ist dann der Maßstab in den Pupillenebenen  $B$ , so ist gemäß Aufgabe 48 das Konvergenzverhältnis in diesen Ebenen gegeben durch:

$$\Upsilon = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B} \dots \dots \dots 1)$$

Befindet sich das System in Luft, so ist  $n = n'$ . Ist ferner z. B.  $B = \frac{4}{5}$ , so ist  $\operatorname{tg} \omega' = \frac{5}{4} \operatorname{tg} \omega$ . Für  $\omega = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$  ergibt sich aus der letzteren Gleichung z. B. für  $\omega'$  der Reihe nach:  $\omega' = 12^\circ 25', 24^\circ, 35^\circ 50'$ .

**Aufgabe 87.** Beweise, daß die Gleichung 1) der vorigen Aufgabe die Bedingung für die ähnliche Abbildung in der  $P$ - und  $P'$ -Ebene ist.

**Lösung:** Aus Fig. 50 folgt, wenn man  $PR = p$  und  $P'R' = p'$  setzt:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{p} \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{y'}{p'}$$

Also wird Gl. 1):

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{B} = \frac{P'}{P} \cdot \frac{1}{B}$$

Nach Aufgabe 59 ist aber die rechte Seite der Maßstab der ähnlichen Abbildung in der  $P$ - und  $P'$ -Ebene. Also ist  $\frac{y'}{y}$  tatsächlich konstant und gleich dem Maßstab der ähnlichen Abbildung.

Die Gl. 1) der Aufgabe 86 heißt die Bedingung für die Orthoskopie.

**Aufgabe 88.** Wie kann man die Bedingung für die Orthoskopie in geometrischer Form darstellen?

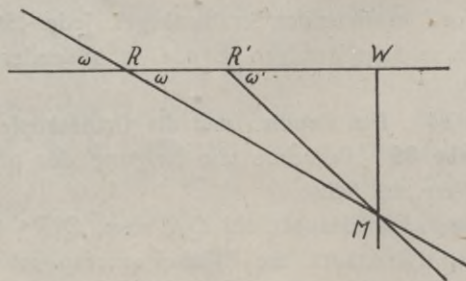


Fig. 51.

**Lösung:** In Fig. 51 seien durch  $R$  und  $R'$  die Mittelpunkte der (E. P.) und (A. P.) dargestellt. Ein unter der Achsenneigung  $\omega$  durch  $R$  einfallender Hauptstrahl ver-

lasse das System durch  $R'$  gehend unter der Neigung  $\omega'$ . Man verlängere den einfallenden Hauptstrahl, bis er den austretenden in  $M$  schneidet und falle von  $M$  das Achsenlot  $MW$ . Dann ist:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{WM}{RW} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{WM}{R'W}$$

also wird

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{RW}{R'W} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B} \quad \dots \quad I$$

Da die Größe  $B$ , der Maßstab in den Pupillenebenen, für das System eine Konstante ist, so ist also auch das Verhältnis  $\frac{RW}{R'W}$  konstant und unabhängig von der Größe der Winkel  $\omega$  und  $\omega'$ , d. h. der Punkt  $W$  ist ebenso wie  $R$  und  $R'$  ein fester Punkt auf der Achse. Legen wir durch  $W$  eine achsensenkrechte Ebene, die wir als Koinzidenzebene bezeichnen, so haben wir den Satz:

Ein System ist orthoskopisch, wenn die Schnittpunkte sämtlicher ein- und austretenden Hauptstrahlen in einer achsensenkrechten Ebene liegen (Koinzidenzebene).

**Aufgabe 89.** Berechne die Lage der orthoskopischen Koinzidenzebene, wenn  $n = n'$  und  $B = \frac{4}{5}$  ist und der Pupillenabstand  $RR' = 3$  cm gegeben ist.

**Lösung:** Setzt man für einen Augenblick in Fig. 51  $WR = u$  und  $WR' = v$ , so ist also

$$u - v = 3$$

und

$$\frac{u}{v} = \frac{5}{4}$$

woraus  $v = 12$  cm folgt. Der Punkt  $W$  in Fig. 51 liegt also 12 cm rechts von  $R'$ .

**Anmerkung.** Man erkennt ohne weiteres, daß die Koinzidenzebene ins Unendliche rückt, wenn die Winkel  $\omega$  den Winkeln  $\omega'$  bezüglich gleich sind. Dies tritt ein, wenn die Punkte  $R$  und  $R'$  mit den Knotenpunkten des Systems zusammenfallen. Bei Systemen in Luft z. B. photographi-

schen Doppelobjektiven, wo also die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammenfallen, tritt dies ein, wenn die wirksame Blende (Fig. 49) im Kernpunkt (Vergl. Aufg. 62) der Kombination steht. Dann fallen die Pupillenmittelpunkte mit den Hauptpunkten des Systems zusammen ( $B=1$ ). Sind die beiden Teilsysteme einander kongruent (wie z. B. bei dem bekannten Doppelanastigmaten), so liegt der Kernpunkt und damit auch der Mittelpunkt der wirksamen Blende im Symmetriepunkt des ganzen Systems.

**Aufgabe 90.** Bestimme den Gesichtsfeldwinkel eines Systems mittels der (E. P.) und (A. P.)

**Lösung:** Man denke sich von einer achsensenkrechten Objektebene (P-Ebene) Hauptstrahlen unter immer größeren Neigungen nach  $R$  hingehend gezeichnet, Dann wird man schließlich zu einem Hauptstrahl gelangen, der gerade noch das System durchdringt, Dieser Strahl der objektseitig den Winkel  $\Omega$ , bildseitig den Winkel  $\Omega'$  mit der Achse bildet, bestimmt den objektseitigen resp. bildseitigen halben Gesichtsfeldwinkel  $\Omega$  resp.  $\Omega'$  (Fig. 52).

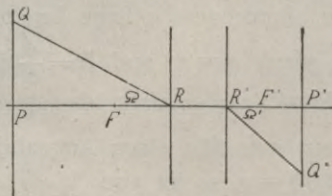


Fig. 52.

Dieser Strahl muß irgendwo im System durch den Rand einer Blende oder einer Linsenfassung gehen, welche die weitere Ausdehnung des Gesichtsfeldes verhindert. Bildet man diesen Blendenrand nach dem Objekt- und Bildraum hin durch die vorgelagerten Systemteile hindurch ab, so entstehen zwei Blendenbilder, durch deren Rand der Grenzstrahl ebenfalls hindurchgehen muß. Diese Blendenbilder hat man Eintritts- und Austrittsluke genannt.



Für gewöhnlich ist die das Gesichtsfeld begrenzende Blende kreisförmig; dann stellen in Fig. 52  $PQ$  und  $P'Q'$  die Radien des objektseitigen und bildseitigen Gesichtsfeldes dar, d. h. derjenigen Teile der  $P$ - resp.  $P'$ -Ebene dar, welche durch das System hindurch zur Abbildung gelangen. Da die Gesichtsfeldwinkel  $\Omega$  und  $\Omega'$  spezielle Werte der Winkel  $\omega$  und  $\omega'$  darstellen, so gilt natürlich auch die Gl. 1) der Aufg. 88 für  $\Omega$  und  $\Omega'$  und man hat:

$$1) \quad \frac{\operatorname{tg} \Omega'}{\operatorname{tg} \Omega} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B}$$

**Erklärung:** Wie wir später noch sehen werden, hängen von den Pupillen eines Systems dessen wichtigste optische Eigenschaften ab (Gesichtsfeld, Helligkeit, Perspektive, Tiefe und in vielen Fällen auch die Vergrößerung). Die Pupillenn Mittelpunkte  $R$  und  $R'$  sind deshalb die natürlichen Fixpunkte, denen gegenüber die Hauptpunkte  $H$  und  $H'$  als künstliche Fixpunkte gelten müssen. Die letzteren haben die Eigenschaft, dass sich die Abbildungsverhältnisse in konjugierten Ebenen etwas einfacher gestalten, mit den wichtigsten Eigenschaften der optischen Instrumente haben sie direkt keinen Zusammenhang.

Die auf die Pupillenn Mittelpunkte bezogenen Abbildungsgleichungen sind in Aufg. 59 gegeben.

In Folgendem bedeuten also  $B$  immer das Vergrößerungsverhältnis in den Pupillen und  $p$  und  $p'$  die Abstände konjugierter Ebenen von den Pupillenn Mittelpunkten  $R$  und  $R'$ .

**Aufgabe 91.** Wie groß sind bei einem in Luft befindlichen System, z. B. einem photographischen Objektiv von der Brennweite  $f$ , die Abstände der Pupillenn mitteln von den Brennpunkten ( $B = \frac{4}{5}$ ,  $f = 20$  cm).

**Lösung:** Setzt man in den Gleichungen der Aufg. 59  $n = n' = 1$  und einerseits  $p = \infty$ , andererseits  $p' = \infty$ , so erhält man für die gesuchten bildseitigen resp. objekt-

seitigen Brennpunktswerte (also für die Strecken  $R'F'$  resp.  $RF$  in Fig. 52) die Werte  $B \cdot f$  resp.  $\frac{f}{B}$  d. h. für die oben gegebenen Zahlen  $20 \cdot \frac{4}{5} = 16$  resp.  $20 \cdot \frac{5}{4} = 25$  cm.

**Aufgabe 92.** Mit dem Objektiv gemäß der vorigen Aufgabe soll eine Aufnahme in gleicher Größe gemacht werden. Wo befinden sich Objekt und Bild?

**Lösung:** In den Gleichungen der Aufg. 59 ist zu setzen  $y' = y$ , also  $\beta = 1$  und man hat:

$$\frac{p'}{p} = B$$

und außerdem  $\frac{1}{p \cdot B} + \frac{B}{p'} = \frac{1}{f}$

Hieraus folgt:  $p = f \left(1 + \frac{1}{B}\right)$  und  $p' = f(1 + B)$ .

Für die obigen Zahlen hat man:  $p = 45$  cm und  $p' = 36$  cm als Abstände von Objekt und Bild von den Pupillenmitten.

**Aufgabe 93.** Wie findet man die (E. P.) und (A. P.) eines Systems?

**Lösung:** Man sucht die wirksame Blende und bildet diese, wie oben ausgeführt, nach der Objekt- resp. Bildseite durch die vorgelagerten Systemteile ab. In vielen Fällen, z. B. meist bei photographischen Objektiven, besteht gar kein Zweifel darüber, welche Blende die wirksame ist. Allgemein gibt es jedoch nur den folgenden, unter Umständen sehr mühseligen Weg zur Auffindung der wirksamen Blende. Man bildet sämtliche im System vorhandenen Blenden in der oben angegebenen Weise nach der Objektseite hin ab. Dann ist diejenige Blende die wirksame, deren Blendenbild von  $P$  aus unter dem kleinsten Winkel  $2u$  erscheint. Liegt der Punkt  $P$  im Unendlichen, soll also die unendlich ferne Objektebene abgebildet werden, so ist einfach das kleinste Blendenbild maßgebend.

Zu diesen Sätzen führt die Ueberlegung, daß nur die von  $P$  aus nach dem Rande des kleinsten Blendenbildes hinzielenden Strahlen das System ungestört durch andere Blenden oder Blendenbilder durchlaufen können.

**Erklärung:** Bei den bisher dargestellten Fällen war die (A. P.) virtuell. Bei manchen Instrumenten (zusammengesetzten Mikroskopen, terrestrischen Fernrohren, Prismenfeldstechern) ist die (A. P.) reell. Das Auge stellt sich dann zweckmäßig so, daß sein Drehpunkt mit dem Mittelpunkt  $R'$  der (A. P.) zusammenfällt. Infolge der Rollung wird dem Auge alsdann das ganze Gesichtsfeld zugänglich. Bei noch anderen Systemen ist gar keine ausgesprochene wirksame Blende vorhanden, sondern, indem das Auge in das betr. System hineinschaut, muß der Augendrehpunkt  $Z$  als Mittelpunkt der (A. P.) aufgefaßt werden (Vergl. Aufgabe 36 u. 37). Als Durchmesser der (A. P.) kann man dann den Durchmesser der Augenpupille annehmen. (Sehen durch Brillengläser oder durch ein holländisches Fernrohr).

**Aufgabe 94.** Zeichne den Gang der Hauptstrahlen für den Fall, daß ein Auge in eine dünne Sammellinse (Lupe) hineinschaut.

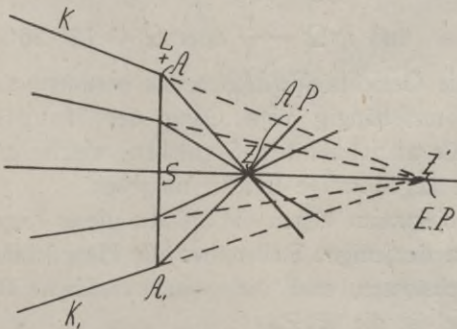


Fig. 53.

**Lösung:** In Fig. 53 sei  $L$  die Linse mit dem Scheitel  $S$  und den Brennpunkten  $F$  und  $F'$ . Der Augendrehpunkt sei  $Z$ , der jetzt als Mittelpunkt der (A. P.) aufzufassen ist.

Es sei ferner  $Z'$  das virtuelle Bild von  $Z$ , das also als Mittelpunkt der (E. P.) aufzufassen ist. Alle objektseitigen Hauptstrahlen konvergieren nach  $Z'$  hin und gehen bildseitig (links von  $L$ ) durch  $Z$ .

Die äußersten objektseitigen Hauptstrahlen wie  $KA$  und  $K_1A_1$ , die bildseitig als Strahlen  $AZ$  resp.  $A_1Z$  verlaufen, begrenzen objektseitig und bildseitig das Gesichtsfeld. Die zugehörigen halben Gesichtsfeldwinkel sind

$$\sphericalangle AZS = \Omega' \text{ und } \sphericalangle AZ'S = \Omega.$$

Wählen wir z. B.  $f = 8$  cm und  $SZ = 3$  cm, so folgt  $SZ'$  aus der Gleichung:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{SZ'} = \frac{1}{8} \text{ oder } SZ' = 4,8 \text{ cm.}$$

Das Vergrößerungsverhältnis in der Pupille ist  $B = \frac{3}{4,8} = \frac{5}{8}$  und die Gl. 1) der Aufg. 90 ergibt

$$\frac{\operatorname{tg} \Omega'}{\operatorname{tg} \Omega} = \frac{5}{8}$$

was man auch aus Fig. 53 unmittelbar ablesen konnte.

Setzt man die halbe Oeffnung der Linse  $SA = 1$  cm, so hat man übrigens aus der Figur 53

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{AS}{SZ'} = \frac{1}{4,8} \text{ oder } \Omega = 11^\circ 46'$$

$$\text{und } \operatorname{tg} \Omega' = \frac{1}{3} \text{ oder } \Omega' = 18^\circ 26'$$

wodurch die Gesichtsfeldwinkel selbst bestimmt sind.

Ganz unabhängig vom Gang der Hauptstrahlen verlaufen die abbildenden Strahlen, welche die Hauptstrahlen als kegelförmige Bündel umgeben.

Im Objektraum liegen die Spitzen dieser Kegel in der P-Ebene an denjenigen Stellen, wo die Hauptstrahlen diese Ebene durchstossen, und die gemeinschaftliche Basis aller dieser Kegel ist die (E. P.)

Ganz analog liegen die Verhältnisse im Bildraum bezüglich der Hauptstrahlen und der (A. P.).

Bei der vorliegenden Aufgabe muß natürlich die P-Ebene eine solche Lage haben, daß deren (virtuelles) Bild

vom Auge scharf gesehen werden kann, d. h. es muß mindestens um den Nahpunktsabstand von  $Z$  entfernt sein.

## Kap. IV. Der endliche Strahlengang.

### § 15. Brechung an ebenen Begrenzungsflächen.

**Erklärung:** Ein Lichtstrahl wird an der Grenze zweier (einfach brechender) Medien nach folgenden Gesetzen von seiner Richtung abgelenkt:

1.) Der einfallende Strahl, das Flächenlot (auch Einfallslot genannt) und der gebrochene Strahl liegen in ein und derselben Ebene. (Einfallsebene = Brechungsebene).

2.) Wenn man unter Einfallswinkel  $i$  und Brechungswinkel  $i'$  die beiden Winkel versteht, welche der Strahl vor und nach der Brechung mit den beiden Richtungen des Flächenlotes bildet, so ist

$$n \sin i = n' \sin i'$$

wo  $n$  und  $n'$  die Brechungsexponenten des ersten und zweiten Mediums sind. Diese Gleichung heißt das Brechungsgesetz (Fig. 54a).

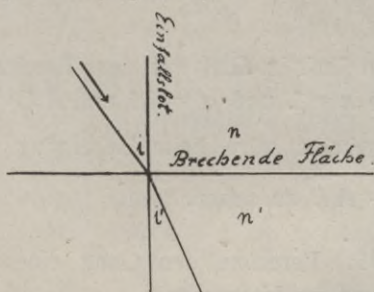


Fig. 54a.

Da nach diesem Gesetz  $i' = 0$  wird, wenn  $i = 0$  ist, so wird ein senkrecht auf eine Trennungsfäche fallender Strahl nicht von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt.

Man konstruiert, wenn  $n, n'$  und  $i$  gegeben sind (nach Reusch) den gebrochenen Strahl auf folgende Weise:

In Fig. 54b ist  $LL_1$  die Trennungsfäche,  $NN$  das Einfallslot und  $PA$  der einfallende Strahl. Man verlängere

$PA$  um ein beliebiges Stück  $AB$  und lege durch  $B$  eine Parallele zum Einfallslot. Dann schlage man um  $A$  mit dem Radius  $AC = \frac{n'}{n} AB$  einen Kreis, der die Parallele in  $C$  schneidet, dann ist  $AC$  der gebrochene Strahl. Beim

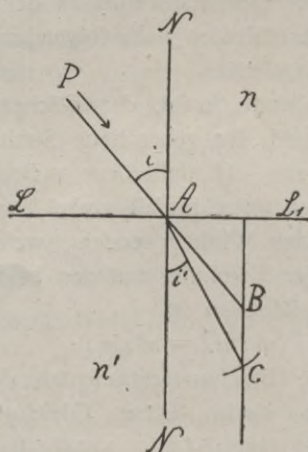


Fig. 54b.

Uebergang von Luft in Glas mit dem Brechungsexponenten 1,5 ist also  $n = 1$  und  $n' = 1,5$  und  $AC = 1,5 \cdot AB = \frac{3}{2} AB$ . Umgekehrt wäre beim Uebergang von Glas in Luft  $AC = \frac{2}{3} AB$  zu setzen.

**Aufgabe 95.** Berechne den Gang eines Lichtstrahls durch ein Prisma im Hauptschnitt.

**Lösung:** In Fig. 55 sei der Hauptschnitt eines Prismas dargestellt, d. h. ein Schnitt der senkrecht zur brechenden Kante des Prismas gerichtet ist, der also die Papierebene im Punkte  $S$  senkrecht durchdringt. Der Gang des Strahls ist durch die gebrochene Gerade  $ABCD$  dargestellt. Die Einfallslotte in  $B$  und  $C$  schneiden sich in  $E$  und bilden dort einen Winkel  $\sigma$ , der gleich dem brechenden Winkel  $\sigma$

des Prismas bei  $S$  ist. \*) Einfallswinkel und Brechungswinkel sind bei  $B$  und  $C$  bezüglich  $i$  und  $i'$  resp.  $i_1$  und  $i_1'$ . Dann ist, wenn das von Luft umgebene Prisma den Brechungsexponenten  $n$  hat, gemäß Fig. 55

$$\sin i = n \sin i' \quad \dots \dots \dots 1)$$

$$n \sin i_1 = \sin i_1' \quad \dots \dots \dots 2)$$

$$\sigma = i' + i_1 \quad \dots \dots \dots 3)$$

und

$$w = i + i_1' - \sigma \quad \dots \dots \dots 4)$$

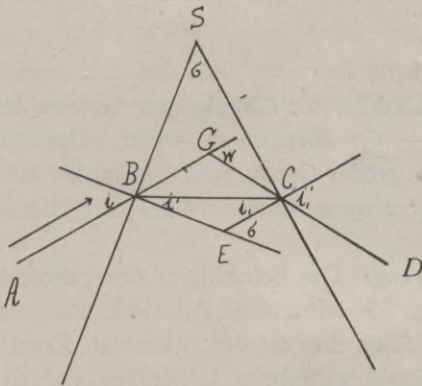


Fig. 55.

wo  $w$  der Winkel (bei  $G$  in Fig. 55) ist, den der einfallende Strahl mit dem austretenden bildet.

Wählt man z. B.:  $n = \frac{3}{2}$ ,  $\sigma = 30^\circ$ ,  $i = 20^\circ$ , so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\sin i' = \frac{\sin i}{n} = \frac{2 \sin 20^\circ}{3} \quad \text{und} \quad i' = 13^\circ 10,8'$$

$$\text{Ferner} \quad i_1 = \sigma - i' = 30^\circ - 13^\circ 10,8' = 16^\circ 49,2'$$

$$\sin i_1' = n \sin i_1 = \frac{3}{2} \cdot \sin 16^\circ 49,2' \quad \text{oder} \quad i_1' = 25^\circ 43,5'$$

$$\text{Schließlich ist:} \quad w = i + i_1' - \sigma = 45^\circ 43,5' - 30^\circ = 15^\circ 43,5'$$

Die durch das Prisma erzeugte Ablenkung beträgt also:  
 $w = 15^\circ 43,5'$

\*) Nach dem bekannten Satz: Zwei Lote auf den Schenkeln eines Winkels, bilden miteinander einen Winkel, der dem ursprünglichen Winkel gleich ist.

**Aufgabe 96.** Forme die Gleichungen I—IV der vorigen Aufgabe um für den Fall des symmetrischen Durchganges des Strahles.

**Lösung:** In Fig. 55 wird jetzt  $BS = CS$  und  $i = i_1'$ ,  $i' = i_1$ . Man erhält:

$$\sigma = 2 i', \quad w = 2 i - \sigma, \quad \sin i = n \sin i'.$$

Durch Elimination von  $i$  und  $i'$  folgt:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{w + \sigma}{2}\right)}{\sin\frac{\sigma}{2}} \quad 1)$$

Man kann beweisen, daß bei symmetrischem Durchgang des Strahles, die Ablenkung  $w$  des Strahles die kleinste mögliche — ein Minimum — ist. Da sich nun  $w$  und  $\sigma$  mit sehr großer Genauigkeit bestimmen lassen, so liefert Gl. 1) ein ausgezeichnetes Mittel zur Bestimmung der Größe  $n$ .

**Erklärung:** Die Betrachtung des gebrochenen Strahles gemäß Fig. 55 lehrt, daß  $i'$  kleiner als  $i$  und  $i_1'$  größer  $i_1$  ist. Es führt dies zu der bekannten Regel:

Ein Strahl wird beim Uebergang ins dichtere Medium zum Einfallslot, beim Uebergang ins dünnere Medium vom Einfallslot weg gebrochen. Da  $i_1'$  größer als  $i_1$  ist, so kann unter Umständen der Fall eintreten, daß  $i_1' = 90^\circ$  ist, der aus dem Prisma austretende Strahl geht dann streifend an der Seite des Prismas entlang. Den zugehörigen Winkel  $i_1$  nennt man den Winkel der totalen Reflexion.

Wird der Winkel  $i_1$  noch größer als der letztere Winkel, so gibt es keinen austretenden zugehörigen Strahl, der Strahl wird vielmehr an der inneren Fläche des Prismas reflektiert.\*)

\*) Das Reflexionsgesetz lautet: Der einfallende Strahl und der reflektierte Strahl bilden mit dem Einfallslot gleiche Winkel, wobei diese beiden Strahlen mit dem Einfallslot in ein und derselben Ebene liegen.





Nun ist bekanntlich in jedem rechtwinkligen Dreieck der Sinus eines Winkels gleich der gegenüberliegenden Kathode, dividiert durch die Hypotenuse. In Fig. 57 ist

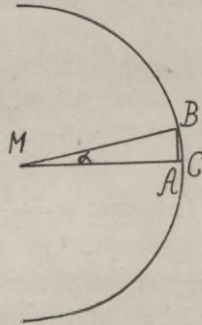


Fig. 57.

also der Sinus des Winkels  $BMC$  durch die Strecke  $BA$  gegeben, da  $MB = 1$  ist. Man sieht nun, daß das Lot  $BA$  mit dem kleinen Bogen  $BC$  zusammenzufallen strebt, wenn der Winkel  $BMC$  sehr klein wird. Man hat also den wichtigen Satz:

Der Sinus eines sehr kleinen Winkels kann gleich dem zugehörigen Bogen gesetzt werden.

Der Bogen, der zu einem Winkel  $\alpha$  gehört, wird sehr häufig auch als Winkel im Bogenmaß bezeichnet und ebenfalls durch das Zeichen  $\alpha$  dargestellt. Durch diese Doppelbezeichnung können für den Anfänger gewisse Schwierigkeiten entstehen. Wir wollen deshalb den üblichen in Graden gemessenen Winkel mit  $\alpha^{\circ}$  bezeichnen.

**Aufgabe 99.** Wie groß ist der Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß, wenn der Winkel  $\alpha^{\circ}$  im Gradmaß gegeben ist?

**Lösung:** Wie ein Blick auf die Fig. 57 lehrt, gehört zu einem Winkel  $\alpha^{\circ}$  von  $180^{\circ}$  der halbe Umfang eines Kreises vom Radius 1, d. h. die bekannte Zahl  $\pi = 3,1416$ . Einem Winkel von  $1^{\circ}$  entspricht also ein Bogen von  $\frac{\pi}{180} = 0,01745$ .

Man hat also einen in Graden gegebenen Winkel mit der Zahl 0,01745 zu multiplizieren, um den Wert des Winkels im Bogenmaß zu erhalten.

Ist  $\alpha^0 = 7^0$  gegeben, so ist im Bogenmaß  $\alpha = 7 \cdot 0,01745 = 0,12215$ .

Ist  $\alpha^0 = 1'$  (eine Minute) gegeben, so ist im Bogenmaß:  $\alpha = \frac{0,01745}{60} = 0,000291$ .

Ein Winkel von einer Minute beträgt also im Bogenmaß 0,000291.

**Aufgabe 100.** Wie verhält sich  $\operatorname{tg} \alpha$  für sehr kleine Winkel?

**Lösung:** Wie ein Blick auf die Fig. 57 lehrt, strebt mit kleiner werdendem Winkel  $\alpha$  die Strecke  $MA$  gleich der Strecke  $MC$  d. h. gleich Eins zu werden. Da nun

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BA}{MA}$$

ist, und für sehr kleine Winkel  $MA$  der Eins gleich gesetzt werden kann, so wird  $\operatorname{tg} \alpha = BA$  d. h. strebt ebenso wie  $\sin \alpha$  mit dem Bogen zusammenzufallen. Man hat also für sehr kleine Winkel:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha.$$

**Aufgabe 101.** Wie rechnet man mit kleinen Winkeln?

**Lösung:** Gemäß Fig. 57 gehen die Gleichungen:

$$\sin \alpha = \frac{BA}{MB} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BA}{MA}$$

für kleine Werte von  $\alpha$  über in:

$$\alpha = \frac{BC}{MB} = \frac{BC}{MC}.$$

Es ist also auch  $MB$  gleich  $MA$  zu setzen, also das schmale rechtwinklige Dreieck  $MBA$  als gleichschenkelig aufzufassen.

Man hat also den Satz:

In einem schmalen rechtwinkligen Dreieck ist der kleine Winkel (im Bogenmaß) gleich der

gegenüberliegenden Seite, dividiert durch die Entfernung dieser Seite von der Spitze des kleinen Winkels (**Satz über kleine Winkel**).

Dieser Satz ist von grundsätzlicher Wichtigkeit für die geometrische Optik.

**Aufgabe 102.** Wie heißt das Brechungsgesetz für kleine Winkel?

**Lösung:** Aus dem Brechungsgesetz  
$$n \sin i = n' \sin i'$$

folgt sofort, wenn  $i$  und  $i'$  klein sind:

$$n i = n' i' \dots \dots \dots 1)$$

**Aufgabe 103.** Berechne die Ablenkung eines Prismas mit kleinem brechenden Winkel.

**Lösung:** Ist der brechende Winkel  $\sigma$  eines Prismas klein und geht der Strahl symmetrisch oder nahezu symmetrisch durch das schmale Prisma, so ist nach Aufg. 96 Gl. I, wenn man dort die Sinusse durch die Winkel im Bogenmaß ersetzt:

$$n = \frac{\omega + \sigma}{\sigma}$$

oder:

$$\omega = \sigma (n - 1) \dots \dots \dots 1)$$

Setzt man  $n = \frac{3}{2}$ , so wird  $\omega = \frac{\sigma}{2}$ .

### § 17. Die sphärische Aberration.

**Erklärung:** Nach dem Satz über kleine Winkel (Aufgabe 101) in Verbindung mit dem Brechungsgesetz gemäß Aufgabe 95, kann man in einfacher Weise die Abbildungsbeziehungen achsennaher Strahlen in zentrierten Systemen herleiten, die wir bisher für den idealen Strahlengang erörtert haben.

Man wird dann zu dem Schluß geführt, daß der „ideale Strahlengang“ in optischen Systemen nur für in unmittelbarer Nähe der Achse verlaufende Strahlen gilt (im sogenannten paraxialen Gebiet). Bei größeren Neigungen der Strahlen weicht der Strahlengang erheblich von dem idealen ab. (Wahrer oder endlicher Strahlengang.)

Mit der vollständigen Darstellung des wahren Strahlenganges auf mathematischem Wege (Theorie der Aberrationen im allgemeinsten Sinne des Wortes) haben sich eine große Reihe hervorragender Mathematiker beschäftigt.

Für die praktische Optik sind besonders eine Reihe von Regeln allgemeinen Charakters wichtig, die sich aus dem fast chaotischen Durcheinander von Beziehungen des wahren Strahlenganges aussondern lassen. Zugleich mit diesen Regeln werden wir auch die Gründe kennen lernen, weshalb es unmöglich ist, den im paraxialen Gebiet herrschenden Strahlengang auf einen endlichen Raum auszudehnen.

**Aufgabe 104.** Berechne den an einer Kugelfläche gebrochenen Strahl (bei endlicher Strahlenneigung).

**Lösung:** In Fig. 58 ist eine brechende Kugelfläche mit dem Radius  $r$ , dem Mittelpunkt  $M$  und dem Scheitel  $S$  dargestellt. Vom Punkt  $P$  der Achse gehe der Strahl  $PA$  aus. Man zeichne in  $A$  das Einfallslot  $MAN$ , das mit dem Radius  $MA$  zusammenfällt. Bei  $A$  wird der Strahl

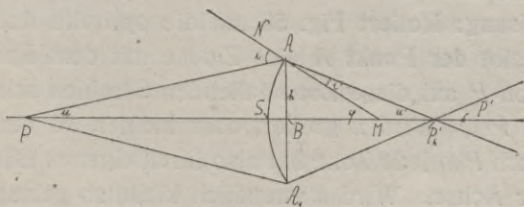


Fig. 58.

in Richtung  $P_h'$  gebrochen, so daß Einfalls- und Brechungswinkel  $i$  und  $i'$  entstehen.

Außer dem Brechungsexponenten und dem Radius  $r$  der Kugel muß noch die Einfallshöhe  $AB = h$  und die Lage des Objektpunktes  $P$  gegeben sein; dann kann man die Lage des Bildpunktes  $P_h'$  trigonometrisch berechnen. Wir wollen dies der Einfachheit wegen nur für den Fall eines unendlich fernen Objektpunktes durchführen, also die Lage des Brennpunktes der Fläche feststellen. Im letzteren Falle hat man, wenn man links Luft und rechts den Brechungsexponenten  $n$  annimmt, aus Fig. 58

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{h}{r} \\ i &= \varphi \\ \sin i' &= \frac{\sin i}{n} = \frac{h}{n \cdot r} \\ u' &= i - i' \\ M P_{h'} &= \frac{r \sin i'}{\sin u'} \end{aligned}$$

und schließlich  $SP_{h'} = r + MP_{h'}$ .

Setzen wir  $n = \frac{3}{2}$ ,  $r = 10$  cm,  $h = 5$  cm, so wird  $\sin i = \frac{h}{r} = \frac{1}{2}$  also  $i = 30^\circ$ . Ferner ist  $\sin i' = \frac{1}{3}$  und demnach  $i' = 19^\circ 28,3'$ .

Dann folgt  $u' = i - i' = 10^\circ 31,7'$  und

$$M P_{h'} = r \cdot \frac{\sin 19^\circ 28,3'}{\sin 10^\circ 31,7'} = 18,242.$$

Schließlich wird  $SP_{h'} = r + M P_{h'} = 28,243$ .

**Aufgabe 105.** Definiere den Begriff der sphärischen Aberration.

**Lösung:** Rotiert Fig. 58 um die optische Achse, so beschreibt der Punkt  $A$  eine Zone mit dem Radius  $h$ . Alle von  $P$  auf diese Zone fallenden Strahlen schneiden sich in  $P'_h$ . Wird  $h$  größer, oder kleiner, so verändert sich auch  $P'_h$ , jede Zone hat also ihren eigenen Bildpunkt auf der Achse. Wird  $h$  unendlich klein, so gelangt man ins paraxiale Gebiet und  $P'_h$  geht in den gewöhnlichen Bildpunkt  $P'$  über, der nach den früher gegebenen Formeln berechnet wird. Die Differenz der Strecke  $SP' - SP'_h = P'_h P'$  nennt man die der Zone  $h$  entsprechende sphärische Aberration.

Im Falle unseres Zahlenbeispiels war  $P'$  der bildseitige Brennpunkt und man hat im paraxialen Gebiet (Vgl. Aufg. 60)

$$SP' = \frac{n r}{n - 1} = 3 r = 30$$

\*) Die allgemeinste Formulierung dieser Gesetze verdanken wir Gullstrand.

so daß die Aberration  $P'hP' = 1,575$  cm beträgt. Die Abbildung ist also weit von dem idealen Strahlengang entfernt.

Wenn es durch Kombination mehrerer Linsen gelingt, für eine dem Rande naheliegende Zone den definitiven Bildpunkt  $P'h$  mit  $P'$  zusammenfallen zu lassen, so nennt man das System sphärisch korrigiert. Streng genommen ist allerdings die Korrektion nur für eine Zone erreicht, aber häufig gelingt es, die Abweichung von anderen Zonen (die Zwischenfehler) so klein zu halten, daß praktisch die von  $P$  ausgehenden Strahlen als in einem Punkte  $P'$  nach der Brechung zusammenlaufend angesehen werden können. Diese Art von Korrektion findet sich z. B. bei den modernen photographischen Objektiven\*) sowie bei Mikroskopobjektiven, überhaupt bei Systemen, deren Oeffnungen im Verhältnis zur Brennweite relativ groß sind, und wird mit Hilfe der trigonometrischen Triangulation gewissermaßen durch systematische Versuche (Tatonement) ausgeübt.

Eine andere, schon über 100 Jahre alte Methode, besteht darin, daß man eine Beziehung zwischen den Konstanten des Systems (Brechungsexponenten, Radien, Dicken) aufsucht, derart, daß dadurch die sphärische Aberration eines Achsenpunktes aufgehoben wird für Strahlen außerhalb des paraxialen Gebietes, die aber immerhin doch noch in der Nähe der Achse\*\*) verlaufen.

\*) Vergl. z. B. v. Rohr: „Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs.“

\*\*) Ist  $u$  die Achsenneigung eines Strahles, so ist bekanntlich

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

Ist  $u$  so klein, daß man 4te Potenzen der Größe  $u$  vernachlässigen kann, so verläuft der Strahl im Seidel'schen Gebiet.

Wir wollen dieses zwar nicht „parachiale“ aber doch achsengenäherte Gebiet, als „Seidelsches Gebiet“ bezeichnen, weil sich der Astronom Seidel um die mathematische Formulierung dieser Beziehungen besondere Verdienste erworben hat. Die praktische Anwendung beschränkt sich hauptsächlich auf die Berechnung von Fernrohrprojektiven, bei denen, wenigstens bei stärkeren Vergrößerungen, die Strahlenneigungen geringe Werte haben.

**Aufgabe 106.** Gib diejenigen Fälle an, in denen die sphärische Aberration für einen Achsenpunkt vollständig aufgehoben ist bei beliebiger Oeffnung des Systems.

**Lösung:** Schon Cartesius hat im Jahre 1637 eine (von der Kugelgestalt abweichende) Fläche angegeben, welche durch Brechung alle von einem Achsenpunkte ausgehenden Strahlen wieder streng in einem Achsenpunkte vereinigt. (Cartesianische Fläche).

Sei in Fig. 59 mit  $E_1$  diese Fläche bezeichnet, welche etwa Luft und Glas von einander trennt, so werden alle von dem Objektpunkt  $P$  auf der Achse ausgehende Strahlen ohne Aberration in  $P'$  vereinigt. Legt man dann eine Kugelfläche um  $P'$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $S_2 P'$ ,

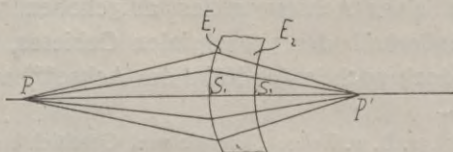


Fig. 59.

so kann man diese Fläche  $E_2$  als die Hinterfläche einer Linse mit der Dicke  $S_1 S_2$  auffassen. Alle von  $E_1$  ausgehenden gebrochenen Strahlen durchdringen die Fläche  $E_2$  senkrecht und werden also aus ihrer ursprünglichen Richtung nicht mehr abgelenkt.



Der zwischen den Flächen  $E_1$  und  $E_2$  liegende, mit Glas erfüllte Raum stellt also eine aberrationsfreie Linse dar. Liegt der Punkt  $P$  im Unendlichen, so gibt es zwei Spezialfälle Cartesianischer Linsen, bei denen die Cartesianische Fläche das eine Mal in ein Ellipsoid, das andere Mal in ein Hyperboloid übergeht.\*)

Daß die aberrationsfreien Linsen in der modernen konstruierenden Optik keine sehr große Bedeutung gewonnen haben, hängt nicht nur mit der technischen Schwierigkeit der Herstellung solcher Flächen zusammen, sondern damit, daß sie eine andere, für die optische Abbildung besonders wichtige Bedingung, die sogenannte Sinusbedingung, nicht erfüllen, worüber weiter unten gesprochen werden wird.

### § 18. Die Sinusbedingung und die aplanatische Abbildung.

**Erklärung:** Hat man durch ein System von Linsen (eventuell unter Zuhilfenahme nicht sphärischer Flächen) erreicht, daß ein Achsenpunkt  $P$  vollständig aberrationslos in dem konjugierten Bildpunkt  $P'$  abgebildet wird, und bildet man nun ein in der achsensenkrechten  $P$ -Ebene befindliches Objekt in der  $P'$ -Ebene ab, so kann man die Erfahrung machen, daß diese Abbildung sehr mangelhaft ist trotz der Aufhebung der sphärischen Aberration im Achsenpunkte  $P'$ .

Es ist das große Verdienst Abbes, gezeigt zu haben, daß noch eine zweite Bedingung erfüllt sein muß, damit außer dem Achsenpunkt  $P$  auch dessen Umgebung (streng genommen die unendlich nahe Umgebung) in der  $P$ -Ebene zur

---

\*) Ueber die Berechnung solcher Linsen vergl. z. B. Gleichen: „Die Theorie der modernen optischen Instrumente.“ Stuttgart 1911, Seite 314 u. f.

aberrationslosen Abbildung in der  $P'$ -Ebene gelangt. Diese zweite Forderung heißt die Sinusbedingung.

**Aufgabe 107.** Formuliere die Sinusbedingung.

**Lösung:** In Fig. 60 sei  $L$  ein Linsensystem, das so aufgebaut ist, daß der Achsenpunkt  $P$  aberrationslos im Punkt  $P'$  abgebildet wird. Das Objekt  $y$  in der  $P$ -Ebene werde in der  $P'$ -Ebene von der Größe  $y'$  abgebildet, so daß also

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

der Maßstab der Abbildung in diesen beiden Ebenen ist. Von  $P$  gehe unter der Neigung  $u$  ein Strahl aus, der nach der Brechung durch das System in Richtung  $BP'$  unter der Neigung  $u'$  durch den Bildpunkt  $P'$  geht.

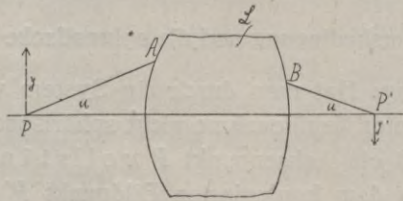


Fig. 60.

Wenn man noch im Objekt- und Bildraum verschiedene Brechungsexponenten  $n$  und  $n'$  voraussetzt, so hat man, wie oben gezeigt,

im paraxialen Gebiet  $\frac{u'}{u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$  . . . . . I

bei idealem Strahlengang  $\frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$ , . . . . . II

wobei im letzteren Falle endlich große Winkel  $u$  und  $u'$  in Frage kommen,

und nach der Sinusbedingung  $\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$ . . . . . III

Es muß also der Sinusbedingung zufolge das Verhältnis der Größen  $\sin u'$  und  $\sin u$  für beliebig große

Neigungen und für ein und dasselbe konjugierte Ebenenpaar beständig denselben Wert haben. \*)

Für sehr kleine Winkel  $u$  und  $u'$  gehen die Gleichungen II und III in die Gleichung I über, unter einander aber stehen sie in einem unlösbaren Widerspruch.

Also bereits das Bestreben, auch nur ein sehr kleines achsensenkrechtcs Objekt aberrationslos abzubilden, führt zu einem Widerspruch mit den oben erläuterten Gesetzen des idealen Strahlenganges.

**Erklärung:** Man kann übrigens die Sinusbedingung auch rein geometrisch definieren.

Während, wie wir oben sahen, beim idealen Strahlengang die Schnittpunkte aller von  $P$  ausgehenden und nach der Brechung nach  $P'$  hinzielenden Strahlen in einer achsensenkrechten Ebene liegen, müssen sich der Sinusbedingung zufolge der einfallende und der zugehörige austretende Strahl in einer Kugelfläche schneiden, die sich in einem Hauptschnitt (Schnitt durch die optische Achse) natürlich als Kreis darstellt, den wir als Sinuskreis bezeichnen wollen.

**Aufgabe 108.** Konstruiere den Sinuskreis für ein konjugiertes Ebenenpaar mit dem Maßstab  $\beta = \frac{y'}{y}$ .

**Lösung:** In Fig. 61 sei  $PQ = y$  ein sehr kleines achsensenkrechtcs Objekt, das durch ein nicht gezeichnetes System als  $P'Q'$  im Bildraum abgebildet werde. Unter der Voraussetzung, daß  $n = n'$  ist, errichte man das Lot  $P'Q'' = P'Q'$  und verbinde  $Q'$  und  $Q''$  mit  $Q$ . Diese Geraden schneiden die Achse in den Punkten  $A$  und  $B$ . Ein Kreis über  $AB$  als Durchmesser ist der Sinuskreis, auf dem also alle Schnittpunkte der in das System eintretenden und daraus austretenden Strahlen liegen müssen (wie z. B.  $PC$  und  $CP'$  in Fig. 61),

\*) Ueber den Beweis der Sinusbedingung vergl. z. B. Gleichen: „Vorlesungen über photographische Optik.“ Leipzig 1905.

damit die Sinusbedingung erfüllt ist, d. h. damit das ganze kleine Objekt  $PQ$  (und nicht nur der Punkt  $P$  selbst) aberrationslos durch das System als Bild  $P'Q'$  abgebildet wird.

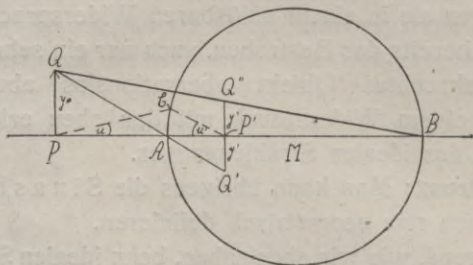


Fig. 61.

Zum Beweise hat man aus ähnlichen Dreiecken (Fig. 61)

$$\frac{y}{y'} = \frac{AP}{AP'} = \frac{BP}{BP'}$$

daraus folgt, daß die Strecke  $PP'$  innen und außen durch die Punkte  $A$  und  $B$  in demselben Verhältnis geteilt ist.

In der bekannten Terminologie der Geometrie heißt dies, daß die vier Punkte  $PAP'B$  harmonische Punkte sind. Der Kreis über  $AB$  ist der sogenannte Apollonische Kreis.

Dieser Kreis hat bekanntlich folgende Eigenschaft:

Verbindet man irgend einen Punkt  $C$  der Peripherie mit dem Punkte  $P$  und  $P'$ , so ist:

$$\frac{PC}{P'C} = \frac{PA}{P'A} = \frac{y}{y'}$$

Nun ist nach dem bekannten Sinussatz der Trigonometrie

$$\frac{PC}{P'C} = \frac{\sin u'}{\sin u}$$

und die letzte Gleichung liefert:

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{\beta}$$

Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die Sinusbedingung für den Fall  $n = n'$ .

Sind  $n$  und  $n'$  von einander verschieden, so hat man bei der Konstruktion statt der Strecken  $y$  und  $y'$  die Strecken  $ny$  und  $n'y'$  zu verwenden.

Es ist bemerkenswert, daß ein so grundlegend wichtiger und allgemeiner Satz, wie die Abbesche Sinusbedingung sich auf so außerordentlich einfache Weise darstellen läßt.

**Erklärung:** Konjugierte Punkte wie  $P$  und  $P'$  in Fig. 61, die ohne Aberration abgebildet werden und außerdem die Sinusbedingung erfüllen, sind von Abbe als aplanatische Punkte bezeichnet worden. Leider wird immer noch von manchen Autoren das Wort „aplanatisch“ im Sinne von „frei von sphärischer Aberration“ gebraucht, was streng vermieden werden sollte.

**Aufgabe 109.** Was versteht man unter orthoskopischen Punkten?

**Lösung:** Bei Linsensystemen unter Berücksichtigung endlichen Strahlenganges versteht man unter orthoskopischen Punkten nach Abbe solche aberrationsfreien Punkte, welche die Tangentenbedingung gemäß Gl. I der Aufgabe 88 erfüllen.

Indem Abbe die Erfüllung der Sinusbedingung für die zur Abbildung gelangenden Achsenpunkte  $P$  und  $P'$  und die Erfüllung der Tangentenbedingung für die Mittelpunkte  $R$  und  $R'$  der Ein- und Austrittspupille verlangt, gibt er den Konstrukteuren optischer Systeme gewissermaßen das Mittel der Arbeitsteilung an die Hand, um diese Systeme zur höchsten praktischen Vollkommenheit zu bringen. Die Erfüllung der ersteren Bedingung gewährleistet die Aufhebung der Aberration des Bildes, während die zweite die Bedingung für die ähnliche Abbildung in der  $P'$ -Ebene liefert.

**Aufgabe 110.** Konstruiere den gebrochenen Strahl nach Weierstraß.

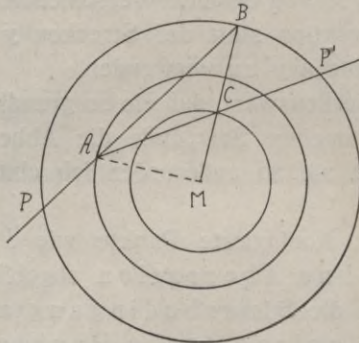


Fig. 62.

**Lösung:** In Fig. 62 stelle ein Kreis um  $M$  mit dem Radius  $MA$  die brechende Fläche im Hauptschnitt dar, auf die ein Strahl  $PA$  falle. Sind links und rechts von der Fläche die Brechungsindizes  $n$  und  $n'$ , so zeichne man um  $M$  als Mittelpunkt zwei weitere Kreise mit den Radien  $\frac{n'}{n} \cdot r$  und  $\frac{n}{n'} \cdot r$  (In Fig. 62 ist  $n = 1$  und  $n' = 1,5$  angenommen.) Verlängert man nun den einfallenden Strahl, bis er den ersten Kreis in  $B$  schneidet, und zieht  $MB$ , wodurch der zweite Kreis in  $C$  geschnitten wird, so liefert  $AC$  die Richtung des gebrochenen Strahles.

Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $MAB$  und  $MAC$ . (Diese haben einen Winkel gemeinsam und die einschließenden Seiten verhalten sich wie  $n$  zu  $n'$ .)

**Aufgabe 111.** Konstruiere die aplanatischen Punkte einer Kugelfläche.

**Lösung:** Die Konstruktion des gebrochenen Strahles von Weierstraß erscheint zwar etwas komplizierter als die von Reusch, sie läßt uns aber eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft der Kugelfläche auf besonders ein-

fache Weise erkennen. In Fig. 63 sind wieder um den brechenden Kreis mit dem Radius  $MA = r$  die beiden Kreise mit den Radien  $\frac{n'}{n}r$  und  $\frac{n}{n'}r$  gelegt wie in Fig. 62. Zieht man nun beliebig viele nach  $B$  hin konvergierende Strahlen (in Fig. 63 sind 4 Strahlen gezeichnet) und konstruiert nach der Regel der vorigen Aufgabe die zugehörigen gebrochenen Strahlen, so sieht man ohne weiteres, daß diese streng nach  $C$  hin konvergieren. Der (virtuelle) Objektpunkt  $B$  wird also aberrationslos in  $C$  abgebildet. Die konjugierten Punkte  $B$  und  $C$  erfüllen

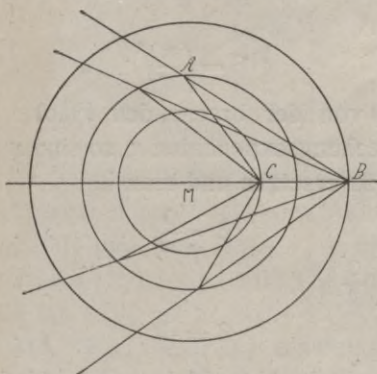


Fig. 63.

aber auch die Sinusbedingung; denn faßt man in Fig. 63  $MCB$  als optische Achse auf, so schneiden  $AB$  und  $AC$  diese Achse unter Winkeln, die wir früher mit  $u$  und  $u'$  bezeichnet haben. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $ABM$  und  $ACM$  folgt, daß diese Winkel entsprechend gleich dem Brechungswinkel  $i'$  resp. dem Einfallswinkel  $i$  bei  $A$  sind.

Da ferner Winkel  $CAM = i'$ ,  $MA = r$  und  $MC = r \cdot \frac{n}{n'}$  ist, so folgt aus dem Dreieck  $ACM$  in Fig. 63 nach dem bekannten Sinussatz der Trigonometrie:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}$$

und also auch

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n'}{n}$$

Das Verhältnis der Achsenneigungen der Strahlen  $AB$  und  $AC$  ist also tatsächlich konstant, wie die Sinusbedingung es fordert. Nach Gl. III der Aufgabe 107 hat diese Konstante den Wert  $\frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$ , während nach obiger Gleichung der Wert dieser Konstanten  $\frac{n'}{n}$  ist. Man muß also haben:

$$\frac{n'}{n} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}$$

oder

$$\beta = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \dots \dots \dots I$$

Ist links von der brechenden Fläche Luft, rechts Glas vom Brechungsexponenten  $n$ , so sind  $n$  und  $n'$  durch eins, resp.  $n$  zu ersetzen und man hat

$$\beta = \frac{1}{n^2} \dots \dots \dots II$$

oder für  $n = \frac{3}{2}$

$$\beta = \frac{4}{9} \dots \dots \dots III$$

Ein achsensenkrecht kleines Objekt bei  $B$  wird also im Verhältnis 4 : 9 verkleinert bei  $C$  abgebildet.

Ein Blick auf die Figuren 62 und 63 lehrt übrigens, daß nicht nur ein kleines achsensenkrecht Objekt, sondern die ganze Kugelfläche mit dem Radius  $MB$  aplanatisch abgebildet wird. Das aplanatische Bild ist die Kugelfläche mit dem Radius  $MC$ .

**Aufgabe 112.** Wie konstruiert man einen aplanatischen Körper?

**Lösung:** Wegen der Umkehrbarkeit der Strahlenmenge kann man in Fig. 63 auch  $C$  als Objekt und  $B$  als dessen Bild auffassen. Denkt man sich nun einen Glaskörper, wie ihn Fig. 64 zeigt, der links von einer Kugel mit dem Radius  $SM = r$  und rechts von einer solchen



mit dem Radius  $\frac{r}{n}$  (wo  $n$  der Brechungsindex des Glases ist) begrenzt ist, so ist dies ein aplanatischer Körper. Bringt man auf dessen rechte Fläche irgend eine Zeichnung oder dgl. an, so erscheint dieselbe einem

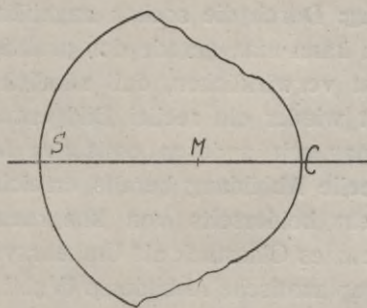


Fig. 64.

von links etwa aus der Entfernung der deutlichen Sehweite in den Körper hineinschauenden Auge im Verhältnis  $1 : n^2$  (für Luft und Glas 4 : 9) vergrößert bei vollkommen aplanatischer Abbildung über das ganze Bildfeld hin.

**Aufgabe 113.** Wie konstruiert man eine aplanatische Linse?

**Lösung:** Denkt man sich in Fig. 63 wieder links von der brechenden Fläche Luft und rechts Glas, und grenzt die Glasmasse nach hinten durch eine um  $C$  geschlagene Kugel ab, so entsteht eine aplanatische Linse, welche die nach  $B$  hin konvergierenden Strahlen aplanatisch in  $C$  vereinigt. Durch die Hinterfläche wird nämlich die aplanatische Abbildung nicht gestört, weil die Strahlen sämtlich diese Fläche senkrecht durchdringen.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, eine aplanatische Linse zu konstruieren, indem man nämlich die Glasmasse gemäß Fig. 63 nach hinten durch eine Kugel­fläche derart abgrenzt, daß der Punkt  $C$  mit dem einen aplanatischen Punkt dieser neuen Fläche zusammenfällt.

Auf diese Weise konnte man ganze Systeme von Kugelflächen unter Wahrung des Aplanatismus erzeugen.

Ueber die verschiedenen möglichen Formen aplanatischer Linsen vrgl. z. B. Gleichen: Theorie der modernen optischen Instrumente: Seite 318—223.

**Anmerkung:** Durch die soeben angeführten aplanatischen Linsen kann man gerade den praktisch wichtigsten Fall nicht verwirklichen, daß nämlich von einem reellen Objekt wieder ein reelles Bild entworfen wird. Jedoch hat man mit anderen optischen Mitteln auch eine solche reelle Abbildung bereits erreicht, insbesondere liefert ein beiderseits von kongruenten Hyperboloiden begrenztes Glasstück als Umkehrsystem für den Maßstab Eins aplanatische Abbildung. (Vgl. l. c. Seite 318 und Seite 323—28.)

### § 19. Kaustik und Koma.

**Erklärung:** Fallen von einem beliebigen im Raume gelegenen Punkt Lichtstrahlen auf ein zentriertes System von Kugelflächen (Linsensystem) von endlicher Oeffnung, so bilden die austretenden Strahlen ein Durcheinander von Strahlen, das einer allgemeinen algebraischen und geometrischen Darstellung bisher noch nicht zugänglich gemacht ist. Man ist immer zu gewissen vereinfachenden Voraussetzungen gezwungen, die aber für die praktische Beherrschung des Strahlenganges genügen. Die relativ allgemeinste Darstellung dieser Verhältnisse verdanken wir den Arbeiten Gullstrands. Im Folgenden wollen wir noch einige der wichtigsten Abbildungsfehler besprechen.

**Aufgabe 114.** Was versteht man unter einer kaustischen Linie oder einer Brennlinie eines Objektpunktes?

**Lösung:** Legt man durch den Objektpunkt  $Q$  und durch die optische Achse des Systems eine Ebene (Hauptschnitt), so verlaufen alle von  $Q$  ausgehenden und

im Hauptschnitt liegenden Strahlen nach der Brechung ebenfalls in der Ebene des Hauptschnittes. Sie schneiden sich jedoch nach der Brechung nicht in einem einzigen Punkt  $Q'$ , sondern, indem sich im allgemeinen immer nur zwei einander benachbarte Strahlen schneiden, bildet der Inbegriff dieser Schnittpunkte eine Linie, welche man die *kaustische Linie* nennt.<sup>1)</sup>

In Fig. 65 ist  $L$  das Linsensystem, die Papierebene der Hauptschnitt,  $Q$  der leuchtende Punkt. Die innerhalb des Winkels  $AQB$  einfallenden Strahlen bilden nach der Brechung die kaustische Linie  $CQ'D$  mit der Spitze  $Q'$  und den beiden Zweigen  $CQ'$  und  $DQ'$ .

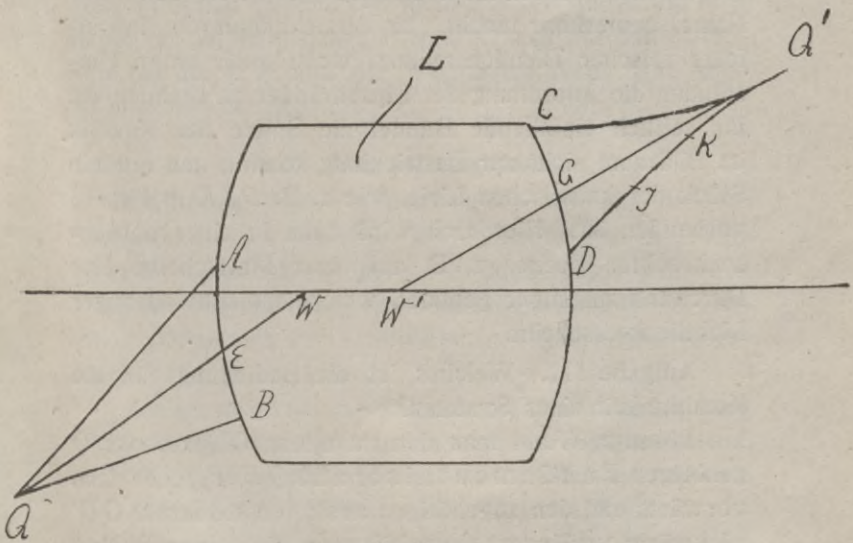


Fig. 65.

**Aufgabe 115.** Welche Eigenschaften hat die Spitze einer kaustischen Linie?

<sup>1)</sup> Man erkennt ohne weiteres den Satz, daß die austretenden Strahlen Tangenten der kaustischen Linie sind. In diesem Sinne spricht man in der Geometrie von einer einhüllenden Linie.

**Lösung:** In der Spitze  $Q'$  (Fig. 65) schneiden sich drei einander benachbarte Strahlen, sie ist also der Punkt größter Lichtintensität der kaustischen Linie und kann in gewissem Sinne als Äquivalent für den Bildpunkt gelten. Von den sämtlichen von  $Q$  ausgehenden Strahlen geht nur einer (streng genommen drei einander unendlich nahe), nämlich  $QE$  nach der Brechung als Strahl  $GQ'$  durch die Spitze  $Q'$ . Dieser (dreifache) Strahl wird **Fundamentalstrahl** genannt.

**Aufgabe 116.** Was versteht man unter Koma?

**Lösung:** Die Koma ist ein Fehler der Strahlenvereinigung, der sich z. B. auf der Mattscheibe einer photographischen Kamera als kometenartiger Fleck (daher der Name) bemerkbar macht. Er entsteht dadurch, daß infolge falscher Blendenstellung, wozu auch unter Umständen die Anordnung der Linsenränder zu rechnen ist, für seitlich einfallende Bündel die Spitze der Kaustik im Bildraum nicht zur Entwicklung kommt, und nur ein Stück der kaustischen Linie, wie z. B.  $DJK$  in Fig. 65 vorhanden ist. Hierdurch wird dann in einer achsen senkrechten Ebene, z. B. auf einer Mattscheibe eine Durchdringungsfigur gebildet, welche als schweifartiger Lichtfleck erscheint.

**Aufgabe 117.** Welches ist die Bedingung für die Komafreiheit eines Systems?

**Lösung:** Wenn man den zu einem Objektpunkt  $Q$  gehörigen **Fundamentalstrahl**  $QE$  (Fig. 65) nach vorwärts und den zugehörigen austretenden Strahl  $GQ'$  rückwärts verlängert, so erhält man die beiden Punkte  $W$  und  $W'$ , die man als **Mittelpunkte der natürlichen Blende** im Bildraum und im Objektraum bezeichnet. Streng genommen gibt es für verschiedene Lagen des Punktes  $Q$  auch zwei verschieden gelegene Punkte  $W$  und  $W'$ . Man kann jedoch nachweisen, daß die Verlagerung dieser Punkte verhältnismäßig gering

für verschiedene Neigung der Fundamentalstrahlen ist, so daß man diese Punkte praktisch als fest annehmen kann.

Fallen nun die Punkte  $W$  und  $W'$  mit der  $E.P.$  und  $A.P.$  des Systems zusammen, so ist Komafreiheit vorhanden. Die Hauptstrahlen fallen dann mit den Fundamentalstrahlen zusammen und die Spitze der kaustischen Linie kommt für alle das System durchdringende Hauptstrahlen zustande.

Bemerkt sei, daß bei symmetrischen Systemen z. B. symmetrischen photographischen Doppelobjektiven die Mittelpunkte der natürlichen Blende mit den Hauptpunkten zusammenfallen. Ferner kann man nachweisen, daß bei dem optischen System des menschlichen Auges die Mittelpunkte der natürlichen Blende nahezu mit den Mittelpunkten der  $E.P.$  und  $A.P.$  zusammenfallen. Das Auge ist also frei von Koma.

### § 20. Der Astigmatismus.

**Erklärung:** Unter Astigmatismus versteht man die Eigenschaft eines (dünnen) Strahlenbündels, in zwei aufeinander senkrechten durch die Bündelachse gehenden Ebenen, verschiedene Abbildungsbeziehungen zu besitzen, wenn man den Strahlengang in diesen Ebenen getrennt für sich betrachtet.

Am meisten tritt die Erscheinung des Astigmatismus bei paraxialen Strahlen in solchen Systemen auf, welche eine oder mehrere torische Flächen enthalten.

**Aufgabe 118.** Definiere eine torische Fläche.

**Lösung:** Eine torische Fläche entsteht, wenn man einen Kreisbogen um eine in seiner Ebene liegende Achse rotieren läßt, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht. In Fig. 66 ist ein Kreisbogen  $AB$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Scheitel  $S$  dargestellt. Faßt man  $SM$  als optische Achse auf, legt durch  $N$  eine Achsen-

senkrechte, um welche man den Kreisbogen  $AB$  rotieren läßt, so beschreibt dieser eine torische Fläche. Der Scheitel  $S$  tritt dabei nach oben und unten aus der Papierebene heraus, einen Kreisbogen  $CD$  mit dem Radius  $SN$  beschreibend. Die Achsensenkrechte durch  $N$  wollen wir als Rotationsachse bezeichnen, im Gegensatz zur optischen Achse  $SMN$ .

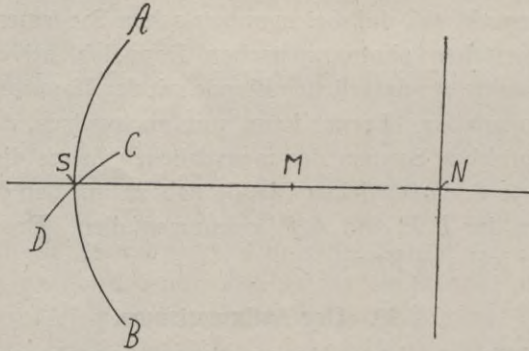


Fig. 66.

Während bei einer Kugel jeder Schnitt durch die Achse ein Hauptschnitt ist, hat eine torische Fläche nur zwei Schnitte, die man als Hauptschnitte bezeichnet, nämlich (Fig. 66) die Papierebene und einen dazu senkrecht stehenden Schnitt. Denken wir uns die Papierebene vertikal, so liegt der zweite Hauptschnitt horizontal. Die beiden Hauptschnitte haben verschiedene Brechkraften entsprechend den verschiedenen Radien  $SM$  und  $SN$ .

**Aufgabe 119.** Wie ist der Gang der durch eine torische Fläche gebrochenen Strahlen?

**Lösung:** Es sei  $P$  ein Objektpunkt auf der Achse der torischen Fläche. Die von  $P$  im Vertikalschnitt (Papier-

ebene) ausgehenden Strahlen vereinigen sich in  $P'_v$  zu einem Bildpunkt, während die im Horizontalschnitt vorlaufenden den Bildpunkt  $P'_h$  bilden. In beiden Schnitten geht die optische Abbildung nach den bekannten Regeln des Verlaufs der Parachsisalstrahlen vor sich.

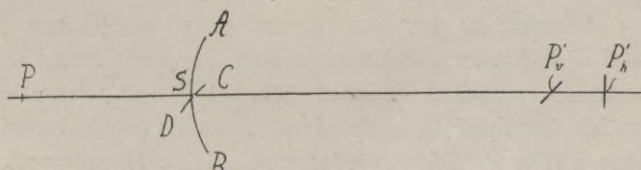


Fig. 67

Stellt man sich nun vor, daß vom Punkte  $P$  ein kegelförmiges Strahlenbündel auf die torische Fläche fällt, so ist die Frage, wie diejenigen Strahlen nach der Brechung verlaufen, welche nicht in einem der beiden Hauptschnitte verlaufen. Diese treffen die optische Achse überhaupt nicht, sondern gehen an ihr vorbei. Nach einem von dem Mathematiker Sturm zuerst angegebenen Satz tritt dabei folgende Erscheinung ein.

Alle Strahlen des Bündels gehen nach der Brechung durch zwei, als Brennlinien bezeichnete kleine Strecken, welche in den Punkten  $P'_v$  und  $P'_h$  zur optischen Achse und zu einander senkrecht stehen, wie dies in Fig. 67 angedeutet ist. Ein Bildpunkt im gewöhnlichen Sinne des Wortes existiert also nicht. Legt man durch das austretende Bündel an beliebigen Stellen zur optischen Achse senkrechte Schnitte, so haben diese im allgemeinen elliptische Gestalt, und bei  $P'_v$  und  $P'_h$  sind sie, wie oben erwähnt, geradlinig. Außerdem existiert zwischen  $P'_v$  und  $P'_h$  ein Schnitt von streng kreisförmiger Gestalt (Kreis der kleinsten Verwirrung).

Bemerkt sei noch, daß die Brennweite bei  $P'_v$  dem Kreisbogen  $CD$  (Fig. 67) des horizontalen Hauptschnittes, und die Brennweite bei  $P'_h$  dem Bogen  $AB$  im Vertikalschnitt gleichgerichtet ist.

**Aufgabe 120.** Wie geschieht die Abbildung von Objekten bei der astigmatischen Brechung?

**Lösung:** In der Fig. 68 sind durch die Bögen  $AB$  und  $CD$  wieder die Hauptschnitte der torischen Fläche angedeutet und es befindet sich bei  $P$  das achsensenkrechte Objekt  $PQ$  in der Papierebene (Vertikalschnitt). Den Punkt  $P$  bilden wieder zwei kleine Brennweiten, wie oben gezeigt, die jetzt in Fig. 68 durch  $\alpha$   $\beta$  und  $\gamma$   $\delta$  bezeichnet sind. Um sich nun eine Vorstellung davon

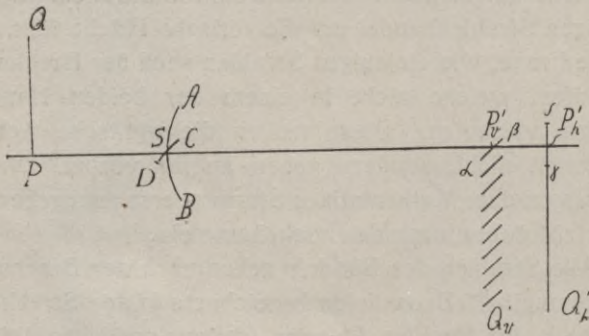


Fig. 68.

zu machen, wie die einzelnen Punkte des Objektes  $PQ$  zur Abbildung gelangen, denke man sich die optische Achse im Objektraum nach oben geneigt, so daß sie nacheinander die verschiedenen Punkte des Objektes  $PQ$  durchstößt. Es entspricht dies gewissermaßen der Bildung einer entsprechenden Anzahl sekundärer Achsen. Im Bildraum neigt sich infolgedessen nach der Darstellung der Fig. 68 die optische Achse (resp. die entstehende



Schar von sekundären Achsen) beständig durch  $S$  gehend nach unten.

Es entstehen also unterhalb  $\alpha\beta$  eine Anzahl neuer Brennlinien, die der ersten Brennlinie  $\alpha\beta$  im wesentlichen parallel sind, so daß also in einer achsensenkrechten durch  $P'_v$  gehenden Ebene als Aequivalent des Bildes ein rechteckiger aus lauter nebeneinander liegenden Brennlinien bestehender Lichtfleck entsteht, der mit dem geradlinigen Objekt  $PQ$  keine Aehnlichkeit mehr hat. Ein ganz anderes Verhalten tritt jedoch bei  $P'_h$ . Die durch die sekundären Achsen gebildeten einzelnen Brennstrecken  $\gamma\delta$  fallen alle in ein und dieselbe Gerade und ihre Gesamtheit bildet wieder eine achsensenkrechte Strecke  $P'_h Q'_h$ , welche dem Objekt  $PQ$  im wesentlichen ähnlich ist.

Wir haben also das Resultat, daß ein achsensenkrecht linienförmiges Objekt im Vertikalschnitt im wesentlichen wieder als achsensenkrecht linienförmiges Objekt im Bildpunkt  $P'_h$  des Horizontalschnittes zur Abbildung gelangt.

Ebenso kann man zeigen, daß ein achsensenkrecht Objekt bei  $P$  im Horizontalschnitt (das also in Fig. 68 senkrecht zur Papierebene steht), nur an der Stelle  $P'_v$  zur ähnlichen Abbildung gelangt.

Besteht also das Objekt bei  $P$  aus einer achsensenkrechten Fläche, die mit vertikalen und horizontalen Strichen bedeckt ist, so gelangen die ersteren bei  $P'_h$ , die anderen bei  $P'_v$  zur Abbildung.

**Erklärung:** Die angegebene Art der astigmatischen Brechung findet auch in jedem System zentrierter Kugelflächen statt, bei welchem eine oder mehrere der Kugelflächen durch torische Flächen ersetzt sind. Ein Spezialfall der torischen Fläche ist die Zylinderfläche. Sie entsteht, wenn einer der beiden Radien der torischen Fläche ( $ABCD$  in Fig. 66) unendlich

groß wird. Der Hauptschnitt, dem der unendlich große Radius angehört, hat die Brechkraft gleich Null. Eine Gerade durch den Scheitel  $S$  in diesem Hauptschnitt wird als Zylinderachse bezeichnet. In der Ophthalmologie spielt der Astigmatismus eine wichtige Rolle, weil die Hornhaut des Auges zuweilen torische Gestalt hat und weil zur Aufhebung des dadurch entstehenden Astigmatismus torische und zylindrische Augengläser dienen. Die geschilderte astigmatische Abbildung kann man als die erste Form des Astigmatismus bezeichnen. Eine zweite Form tritt auf bei dünnen Strahlenbündeln, welche außerhalb des paraxialen Gebietes (unter endlicher Neigung zur Achse) von einer oder mehreren Kugelflächen gebrochen werden.

**Aufgabe 121.** Stelle die zweite Form der astigmatischen Brechung dar.

**Lösung:** Von einem Objektpunkt  $P$  falle ein Strahl  $PA$  auf eine brechende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $M$  (Fig. 69). Wir ziehen die optische Achse  $PM$ , welche

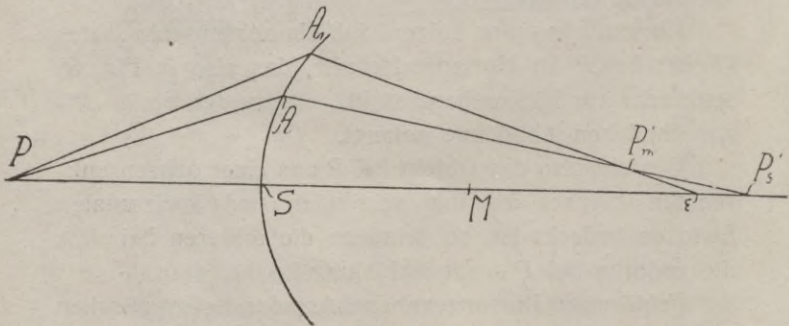


Fig. 69.

die Kugel im Scheitel  $S$  schneidet. Durch die Geraden  $PA$  und  $PM$  ist ein Hauptschnitt bestimmt, der in Fig. 69 mit der Papierebene zusammenfällt; in ihm verläuft auch der gebrochene Strahl, welcher die optische

Achse in  $P's$  schneiden möge. Geht nun von  $P$  ein unendlich dünnes räumliches Strahlenbündel aus in Richtung  $PA$ , so zeigt dasselbe nach der Brechung in Richtung  $AP's$  verlaufend die Erscheinung des Astigmatismus. Faßt man nämlich  $PA$  und  $AP's$  als Achse eines sekundären Bündels oder Leitstrahl auf, so findet man, daß dieser Leitstrahl nur von denjenigen benachbarten Bündelstrahlen nach der Brechung geschnitten wird, die in zwei durch den Leitstrahl gehenden und auf einander senkrechtstehenden Ebenen geschnitten werden, in ähnlicher Weise, wie wir dies bei der Brechung längs der Achse torischer Flächen gesehen haben. Diese beiden Ebenen nennt man Meridionalschnitt und Sagittalschnitt. Der Meridionalschnitt ist die durch den Leitstrahl  $PA$  und die optische Achse  $PM$  gehende Ebene, also in Fig. 69 die Papierebene. In dieser Ebene verläuft also auch die gebrochene Bündelachse  $AP's$ . Verfolgt man einen von  $P$  ausgehenden zu  $PA$  benachbarten Bündelstrahl  $PA$ , so schneidet dieser nach der Brechung die gebrochene Bündelachse in einem Punkt  $P'm$ , welchen man den meridionalen Bildpunkt nennt.

Denkt man sich ferner durch  $PA$  in Fig. 69 eine zur Papierebene senkrecht stehende Ebene, eine sogenannte Sagittalebene gelegt, und verfolgt die in dieser Ebene verlaufenden, der Achse  $PA$  benachbarten Bündelstrahlen, welche also symmetrisch vor und hinter der Papierebene liegen, so schneiden sich diese Strahlen nach der Brechung im Punkte  $P's$ , dem sagittalen Bildpunkt des Bündels. Die Sagittalebene des gebrochenen Bündels geht ersichtlich durch  $AP's$  und steht ebenfalls senkrecht zur Papierebene; aber die Sagittal-

schnitte des einfallenden und gebrochenen Bündels bilden einen Winkel  $PAP's$  mit einander.

Daß  $P's$  tatsächlich der sagittale Bildpunkt ist, erkennt man, wenn man der Fig. 69 eine kleine Drehung um die optische Achse  $PSP's$  erteilt; alsdann tritt der Punkt  $A$  ein wenig vor resp. hinter die Papierebene (nach  $U$  resp.  $V$  in Fig. 70), während der Punkt  $P's$  als der Rotationsachse angehörig festbleibt. Der kleine Kreisbogen  $UV$

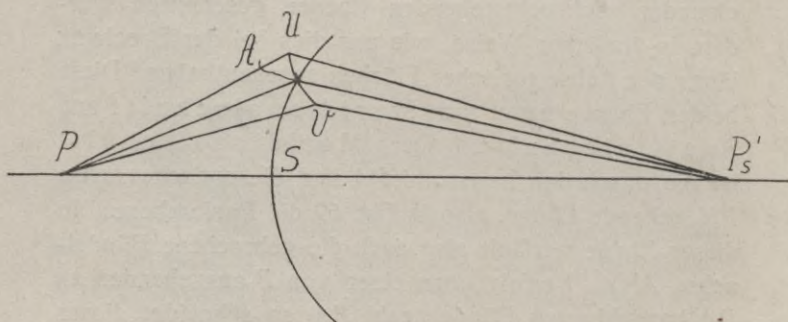


Fig. 70

steht ersichtlich senkrecht auf der Papierebene, nur die schmalen Dreiecke  $PUV$  und  $P'sUV$  gehören der Sagittalebene des einfallenden resp. des gebrochenen Bündels an.

Alle anderen Bündelstrahlen außer den Sagittal- und den Meridionalstrahlen schneiden den Leitstrahl nach der Brechung nicht, bilden aber ebenfalls, wie im Falle der ersten Art des Astigmatismus zwei kleine Brennrecken an den Stellen  $P'm$  und  $P's$ .

**Aufgabe 122.** Gib die Unterschiede zwischen der ersten und zweiten Form des Astigmatismus an.

**Lösung:** Bei der ersten Form, die wir bei torischen Flächen kennen gelernt haben, ist die Strahlenvereinigung in beiden Hauptschnitten grundsätzlich gleichartig;

dies ist bei der zweiten Form nicht der Fall. Im Sagittalschnitt ist nämlich der Strahlengang beiderseits des Leitstrahles symmetrisch, wie ein Blick auf Fig. 70 zeigt. In  $P's$  treffen sich also drei unendlich nahe Strahlen, genau wie im Falle der Brechung an torischen Flächen. Im Meridionalschnitt schneiden sich dagegen im Bildpunkt  $P'm$  nur zwei unendlich nahe Strahlen. Ein dritter dem Leitstrahl unendlich naher Strahl geht nicht streng durch  $P'm$  (Fig. 69), sondern es wird bei  $P'm$  das Stück einer kaustischen Linie gebildet. Die Strahlenvereinigung im Sagittalschnitt ist also von höherer Ordnung als im Meridionalschnitt. Nur wenn der Leitstrahl mit dem **Fundamentalstrahl** zusammenfällt, sind die Strahlenvereinigungen in beiden Hauptschnitten von derselben Ordnung.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß die Brennweite  $P's\varepsilon$  (Fig. 69) bei  $P's$ , welche also von den Meridionalstrahlen erzeugt wird, nicht mehr zum Leitstrahl  $AP's$  senkrecht steht.

Daß die auf der optischen Achse liegende Strecke  $P's\varepsilon$  tatsächlich eine Brennweite des astigmatischen Bündels ist, sieht man, wenn man der Fig. 69 eine kleine Drehung, um die optische Achse  $PSMP's$  erteilt. Als dann bleibt diese Strecke fest, nur der Punkt  $A$  kommt in die Lage von  $U$  resp.  $V$  in Fig. 70. Man erkennt also, daß nicht nur alle meridionalen, sondern überhaupt alle Bündelstrahlen durch die Brennweiten  $P's\varepsilon$  gehen.

**Aufgabe 123.** Konstruiere die beiden astigmatischen Bildpunkte eines unendlich dünnen Strahlenbündels, das von einer Kugelfläche gebrochen wird.

**Lösung:** In Fig. 71 sei ein Schnitt durch eine brechende Kugelfläche mit dem Mittelpunkt  $M$  dargestellt. Vom Objektpunkt  $P$  fällt das unendlich dünne Bündel in Richtung  $PA$  auf die Kugelfläche. Man konstruiere das gebrochene Bündel (etwa nach der Konstruktion

von Weierstrass oder von Reusch). Dasselbe verläuft in Richtung  $AP's$ , wo  $P's$  der Punkt ist, wo die Verlängerung von  $PM$  den gebrochenen Leitstrahl schneidet, dann ist, wie auch schon aus den früheren Betrachtungen hervorgeht,  $P's$  der sagittale Bildpunkt.

Um den meridionalen Bildpunkt  $P'm$  zu finden, fälle man die beiden Lote  $MK$  und  $MK'$  auf die Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Bündels und ein

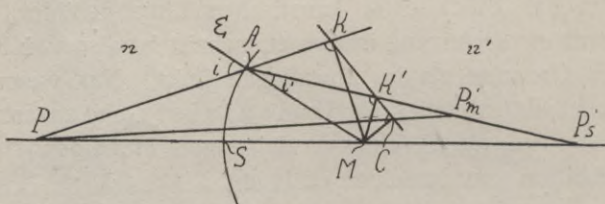


Fig. 71.

drittes Lot  $MC$  auf die durch  $K$  und  $K'$  bestimmte Gerade; dann schneidet die Verlängerung von  $PC$  die gebrochene Bündelachse in dem meridionalen Bildpunkt  $P'm$ . Ueber den Beweis des letzteren Satzes vergl. z. B. Gleichen: Die Hapterscheinungen der Brechung und Reflektion des Lichtes. Leipzig 1889. Seite 32 und f.

**Erklärung:** In den beiden Hauptschnitten eines astigmatischen Bündels verlaufen die Bündelstrahlen ähnlich wie im paraxialen Gebiet eines zentrierten Systems. Es gibt dort Brennweiten und Brechkraft, Abbildung von Objekten, Haupt- und Knotenpunkte usw.

**Aufgabe 124.** Wie lauten die Abbildungsbeziehungen im sagittalen Teil eines astigmatischen Bündels?

**Lösung:** In Fig. 71 seien  $n$  und  $n'$  die Brechungs-exponenten vor und hinter der brechenden Kugelfläche mit dem Radius  $AM = r$ . Seien  $f$  und  $f'$  die objekt- und bildseitigen Brennweiten, so hat man für die Brechkraft  $D_s$

$$1) \quad D_s = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}$$

wo  $i$  und  $i'$  Einfallswinkel- und Brechungswinkel des Leitstrahls sind.

Im Punkte  $A$  (Fig. 71) fallen die beiden Hauptpunkte des sagittalen Bündels zusammen. Die Brennpunkte liegen also um die Strecken  $f$  und  $f'$  von  $A$  entfernt.

Bedienen wir uns des anschaulichen Systems der Zählung (A. S.), wobei also Fig. 71 Normalfigur ist, und setzen  $PA = a$ ,  $P'sA = a'$  und bildet man die reduzierten Vergenzen  $\frac{n}{a} = A$  und  $\frac{n'}{a'} = A'$ , so ist:

$$II) \quad A + A' = D$$

**Aufgabe 125.** Wie lauten die Abbildungsbeziehungen im meridionalen Teil eines astigmatischen Bündels?

**Lösung:** Setzt man in Fig. 71 wieder  $PA = a$  und ferner  $P'mA = a''$  so ist

$$1) \quad \frac{n' \cos i'^2}{a''} + \frac{n \cos i^2}{a} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}$$

wodurch  $a''$  und damit die Lage von  $P'm$  bestimmt ist. Setzt man einmal  $a''$ , das andere Mal  $a$  unendlich groß, so findet man die Lage des objektseitigen und bildseitigen Brennpunktes. Die Brechkraft  $Dm$  ist gegeben durch:

$$II) \quad \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r \cos i' \cdot \cos i'}$$

wodurch auch die Größen  $f$  und  $f'$  bestimmt sind.

Im vorliegenden Falle ist  $A$  nicht der Hauptpunkt.

Die Hauptpunkte des Meridionalschnittes findet man, wenn man die Größe  $f$  und  $f'$  gemäß Gl. II in bekannter Weise von den Brennpunkten aus abträgt.

Bezieht man die Schnittweiten auf die so ermittelten Hauptpunkte, so gelangt man zu einer der Gleichung II der vorigen Aufgabe genau entsprechenden Beziehung.

Bemerkt sei noch, daß die Punkte  $K$  und  $K'$  in

Fig. 71 die beiden Knotenpunkte des Meridionalbündels sind.

**Anmerkung:** Durch die Aufgaben 123 bis 125 ist sowohl konstruktiv wie rechnerisch die Aufgabe gelöst, den Astigmatismus eines unendlich dünnen Strahlenbündels zu bestimmen, das im Hauptschnitt eines zentrierten Linsensystems unter beliebiger Neigung verläuft, da man ja die angegebenen Operationen von Fläche zu Fläche anwenden kann. Auch gilt eine der Gl. II in Aufgabe 124 genau entsprechende Gleichung für beliebig viele Brechungen, wenn man als Fixpunkte die Hauptpunkte des ganzen in Frage kommenden Bündels wählt.

### § 21. Die astigmatischen Bildflächen.

**Aufgabe 126:** Stelle die Abbildung einer Objektebene mittels unendlich dünner astigmatischer Bündel dar.

**Lösung:** Denkt man sich in einem System zentrierter Kugelflächen vom Mittelpunkt der wirksamen Blende aus Strahlen unter verschiedenen endlichen Neigungen zur Achse sowohl nach der Objektseite wie nach der Bildseite hin durchgelegt (durch Konstruktion oder Rechnung), so erhält man ein System von Hauptstrahlen, die (allerdings mit mehr oder weniger Aberrationen behaftet), die Mittelpunkte  $R$  und  $R'$  der  $E. P.$  und  $A. P.$  passieren.

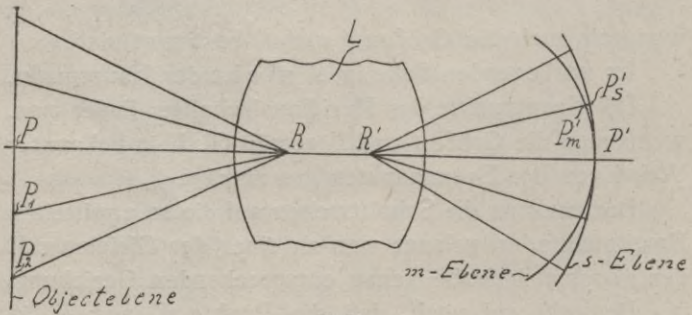


Fig.72.



Auf der Objektseite werden diese Hauptstrahlen die achsensenkrechte Ebene ( $P$ -Ebene), die zur Abbildung gebracht werden soll, in einer Reihe von Punkten  $P, P_1, P_2$  usw. durchstoßen (Fig. 72). Faßt man nun diese Punkte als Objektpunkte auf und bildet sie durch unendlich dünne Bündel nach dem Bildraum hin ab, so entsprechen jedem Objektpunkt zwei astigmatische Bildpunkte. So gehören z. B. zum Objektpunkt  $P_1$  die beiden Bildpunkte  $P'_m$  und  $P'_s$  im Zuge des Hauptstrahls  $P_1RR, P'_mP'_s$ . Auf diese Weise kann man sich alle Punkte der  $P$ -Ebene zur Abbildung gebracht denken und erhält als Bild derselben zwei getrennte Flächen, die man als  $m$ - und  $s$ -Flächen bezeichnen kann. Die erstere stellt den Inbegriff aller meridionalen, die andere den aller sagittalen Bildpunkte dar. Die Aufgabe der konstruierenden Optik ist nun (z. B. bei der Berechnung photographischer Objektive, punktuell abbildender Brillengläser usw.), diese astigmatischen Bildflächen möglichst zum Zusammenfallen zu bringen. Gelingt es außerdem, die zusammenfallenden astigmatischen Flächen zu achsensenkrechten Ebenen zu gestalten, so spricht man von einem *astigmatisch geebneten* Bildfeld. Bei unseren modernen photographischen Objektiven ist dieses Ziel zum großen Teil praktisch erreicht.

**Aufgabe 127.** Welche Gesetze kennt man über die Krümmung der astigmatischen Bildflächen?

**Lösung:** Die Krümmung der astigmatischen Bildflächen ( $m$ - und  $s$ -Fläche in Fig. 72) hängt ganz wesentlich von der Lage der wirksamen Blende ab. Die Berechnung der Krümmungsradien im Scheitel (bei  $P'$  in Fig. 72) erfolgt nach Formeln, die in Czapski: Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, Breslau 1893 auf Seite 109 (Gl. 5 und 6) gegeben sind.

Die soeben angegebene Theorie setzt punktförmige, oder doch sehr kleine Durchmesser der  $E. P.$  und  $A. P.$

voraus. Bei weitgeöffneten Systemen wird ihre Anwendung bedenklich; denn im letzteren Falle unterliegt der Strahlengang bezüglich der Auswahl der Achsen der abbildenden Bündel keinem Zwange und als Bildort müssen wir diejenige Stelle des Bildraumes ansprechen, wo die größte Helligkeit, also die stärkste Strahlenvereinigung herrscht. Im Allgemeinen wird diese Stelle die Spitze der kaustischen Linien in dem in Frage kommenden Meridionalschnitt sein. Der astigmatische Zustand wird also nur zutreffend dargestellt, wenn man den Astigmatismus längs der *Fundamentalstrahlen* (Aufgabe 115) darstellt. In diesem letzteren Falle der weitgeöffneten Systeme und der Abbildung mittels Fundamentalstrahlen gibt es einen bemerkenswerten Satz von *Petzval* über den Krümmungsradius der meridionalen Bildfläche im Scheitelpunkt (Krümmungsradius der *m*-Fläche im Punkte *P'* der Fig. 72).

Nennt man nämlich diesen Krümmungsradius  $\rho$  und hat man ein System beliebig vieler und beliebig dicker Linsen, so drückt sich der Petzval'sche Satz folgendermaßen aus:

$$1) \quad - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} + \frac{1}{n_3 f_3} + \dots$$

Hierin bedeuten die Größen  $n_1, n_2, n_3$ , usw. die Brechungsexponenten der Linsen und  $f_1, f_2, f_3$  usw. die sogenannten *Pseudobrennweiten* der einzelnen Linsen. Unter einer Pseudobrennweite einer Linse versteht man die Brennweite einer Linse, wenn man deren Dicke der Null gleich setzt. Es ist also z. B.

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

wenn  $r_1$  und  $r_2$  vorderer und hinterer Radius der betreffenden Linse sind.

Der Petzval-Satz ist also trotz seiner Allgemeingültigkeit unabhängig von der Lage des Objektes und

von den Entfernungen und den Dicken der Linsen des Systems.

**Aufgabe 128.** Berechne einen Meniskus, der ein ebenes Bildfeld hat.

**Lösung:** Wir nehmen einen Meniskus an von der Dicke  $d$  dem Brechungsindex  $n$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$ .

Die wahre Brennweite eines solchen Meniskus ist

$$1) \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{d}{r_1 \cdot r_2}$$

und die Pseudobrennweite ist gegeben durch  $(n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  so daß man für den Krümmungsradius  $\rho$  des Bildes hat

$$2) \quad \frac{1}{\rho} = - \left( \frac{n-1}{n} \right) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

In Fig. 73 ist ein solcher Meniskus  $L$  mit der Dicke  $S_1 S_2 = d$  dargestellt. Das negative Vorzeichen in der letzten Gleichung bedeutet, daß das Bild  $\alpha\beta$  bei  $P'$  so gekrümmt ist, daß es seine hohle Seite dem ankommenden Licht entgegenstellt.

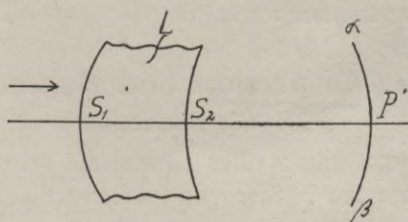


Fig. 73.

Wird  $r_1 = r_2 = r$ , haben also die Begrenzungsflächen des Meniskus gleiche Krümmung (sogenannte Nulllinse), so liefert Gleichung 2 für  $\frac{1}{\rho}$  den Wert Null;  $\rho$  selbst wird also unendlich groß und das Objekt  $\alpha\beta$  ist auf einer achsensenkrechten Ebene ausgebreitet. In

diesem Falle liefert aber Gleichung 1 für die wahre Brennweite  $f$  den Wert:

$$3) \quad 1 = \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{f^2}$$

In der Tat liefern Menisken der letzteren Art ein ausgezeichnet geebnetes Feld und stellen nach v. Hoegh die Urform der einen Hälfte des bekannten Doppelanastigmaten dar, der jedoch zur Aufhebung sphärischer und chromatischer Aberrationen aus drei Linsen verknüpft ist.

**Aufgabe 129.** Gib die Bedingung dafür an, daß eine Kombination zweier Linsen (in beliebiger Entfernung von einander) ein geebnetes Bildfeld hat.

**Lösung:** Sind  $f_1$  und  $f_2$  die beiden Pseudobrennweiten der einzelnen Linsen, so liefert Gleichung I der Aufgabe 127, wenn man  $\rho = \infty$  setzt:

$$1) \quad \frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

Von den beiden Linsen muß also die eine eine Sammellinse, die andere eine Zerstreuungslinse sein und die Pseudobrennweiten müssen sich umgekehrt wie ihre Brechungsexponenten verhalten.

## Cap. V. Dispersion und Achromasie.

### § 22. Die Dispersion.

**Erklärung:** Ein weißer Lichtstrahl wird durch die Brechung in einen Fächer von Farbenstrahlen aufgelöst, die verschiedene Brechungsexponenten besitzen, wodurch eben die Trennung erfolgt. Diese Erscheinung nennt man Dispersion. Fällt das Licht durch einen schmalen Spalt auf ein Prisma, so entsteht ein die Regenbogenfarben zeigendes Farbenband (Spektrum). Das Spektrum des Sonnenlichtes ist von zahlreichen, dem Spalt parallelen dunklen Linien, sogenannten Fraunhofer'schen Linien durchzogen, welche immer bei derselben Farbe

auftreten \*), durch welchen Körper auch die Brechung erzeugt sei. Die markantesten Fraunhofer'schen Linien bezeichnet man vom Rot nach dem Violett fortschreitend, mit dem großen Buchstaben A bis H. Die zugehörigen Brechungsexponenten mit  $n_A$  bis  $n_H$ . Es entspricht  $n_C$ ,  $n_D$ ,  $n_F$  dem roten, gelben und grünblauen Licht. Die Größe  $n_D$  bezeichnet man als den mittleren Brechungsexponenten oder den Brechungsexponenten schlechthin. Es ist  $n_F$  größer als  $n_D$  und dieses wieder größer als  $n_C$ .

Als mittlere Dispersion bezeichnet man den Wert

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

Dieser Wert, sowie die Werte für die Brechungsexponenten verschiedener Fraunhofer'schen Linien findet man in dem Produktionsverzeichnis von Schott & Gen., Jena, angegeben. Gläser mit großen  $v$ -Werten werden als Krongläser, solche mit kleinen  $v$ -Werten als Flintgläser bezeichnet.

Die Dispersion wirkt sehr störend bei der Abbildung durch Linsen. Man kann sie beseitigen durch Kombination von Linsen aus Kronglas und Flintglas. Man erhält dann ein sogenanntes achromatisches Linsensystem.

**Aufgabe 130.** Welche Formeln gelten für ein achromatisches Prisma?

**Lösung:** Die beiden Prismen mit den brechenden Winkeln  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  den Brechungsexponenten  $n_1$  und  $n_2$  für die D-Linie, und den mittleren Dispersionen  $v_1$  und  $v_2$  mögen die in Figur 74 angedeutete Lage haben und es soll ein Strahl um den Winkel  $\omega$  durch die Prismen-

\*) Abgesehen von gewissen, für die praktische Optik nicht in Frage kommenden Fällen.

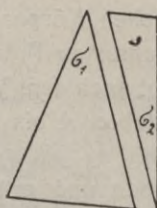


Fig. 74.

kombination von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, so ist die Kombination achromatisch, wenn man hat:

$$I) \quad \sigma_1 = \frac{\omega \cdot v_1}{(v_1 - v_2)(n_1 - 1)}$$

$$II) \quad \sigma_2 = \frac{\omega \cdot v_2}{(v_1 - v_2)(n_2 - 1)}$$

Diese Gleichungen gelten jedoch nur für kleine Werte von  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\omega$ .

**Aufgabe 131.** Berechne ein achromatisches Prisma von der Gesamtablenkung  $\omega$  aus den Gläsern Kron O 60 und Flint O 103 (Schott & Gen.).

**Lösung:** Aus dem Produktionsverzeichnis von Schott & Gen. entnimmt man für

$$O \ 60: n_1 = 1,5179 \quad v_1 = 60,2$$

$$O \ 103: n_2 = 1,6202 \quad v_2 = 36,2$$

und die Formeln der vorigen Aufgabe liefern für die beiden brechenden Winkel  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der einzelnen Prismen.

$$\sigma_1 = \frac{\omega^0 \cdot 60,2}{24 \cdot 0,5179} = 4,8433 \cdot \omega^0$$

$$\sigma_2 = \frac{\omega^0 \cdot 36,2}{24 \cdot 0,6202} = 2,4320 \cdot \omega^0.$$

**Aufgabe 132.** Berechne die Werte von  $n_F$  und  $n_C$  aus dem Verzeichnis von Schott & Gen. für das Kron-glas O 60

**Lösung:** Im Verzeichnis von Schott & Gen. findet man außer dem  $v$ -Wert direkt nur den Wert

$$n_D = 1,5179$$

angegeben und außerdem die Differenzen

$$n_F - n_D = 0,00605$$

$$n_F - n_C = 0,00860$$

Hieraus folgt zunächst durch Subtraktion

$$n_D - n_C = 0,00255$$

Also ist, wenn man sich auf 4 Dezimalen hinter dem Koma beschränkt

$$n_C = n_D - 0,0025 = 1,5154$$

$$n_F = n_D + 0,0061 = 1,5240$$

**Aufgabe 133.** Berechne die Brennweiten eines dünnen Meniskus von den Radien  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = 20$  cm aus Kron O 60 für die Brechungsindizes  $n_D, n_C$  u.  $n_F$ .

**Lösung:** Man hat allgemein

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für  $r_1 = 10$  und  $r_2 = 20$  folgt sofort:

$$f = \frac{20}{n - 1}.$$

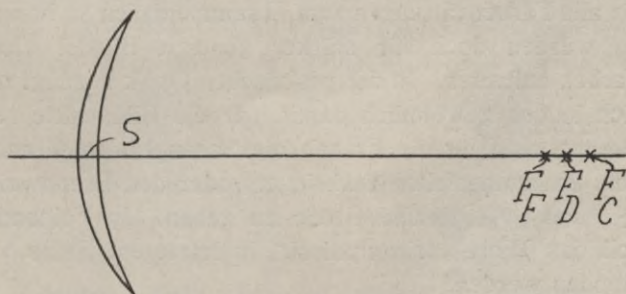


Fig. 75.

In dieser Gleichung sind der Reihe nach für  $n$  die Werte von  $n_D, n_C$  und  $n_F$  einzusetzen.

Man erhält:

$$f_D = \frac{20}{0,5179} = 38,617 \text{ cm}$$

$$f_C = \frac{20}{0,5154} = 38,805 \text{ „}$$

$$f_F = \frac{20}{0,5240} = 38,168 \text{ „}$$

Die Differenz zwischen der roten und der blauen Brennweite, d. h. die Größe  $f_C - f_F$  beträgt also 0,637 cm. Die Brennpunkte für die andern Farben liegen teils zwischen den berechneten Brennpunkten, teils vor und teils darüber hinaus. In der Fig. 75 ist die Reihenfolge der farbigen Brennpunkte angegeben.

### § 23. Die Achromasie.

**Aufgabe 134.** Was versteht man unter einem achromatischen Linsensystem?

**Lösung:** Das Wort „achromatisch“ heißt übersetzt „farbenfrei“. Eine streng theoretische Farbenfreiheit kann es aber bei Linsensystemen nicht geben; denn wenn es auch gelänge, die Hauptpunkte und die Brennpunkte, von deren Lage der Gang achsennaher Strahlen abhängt, für alle Farbengattungen zum Zusammenfallen zu bringen, so würden doch für stärker geneigte Bündel wieder Farben auftreten. In der praktischen Optik begnügt man sich jedoch gewöhnlich damit, nur die Bildpunkte resp. Brennpunkte für die Fraunhofer'schen Linien C und F zum Zusammenfallen zu bringen, oder den Brennweiten  $f_C$  und  $f_F$  gleiche Größe zu geben. In Folgendem soll das Wort „achromatisch“ in letzterem Sinne verstanden werden.

**Aufgabe 135.** Gib die Bedingung dafür an, daß zwei im Kontakt befindliche Linsen von den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  eine achromatische Kombination bilden.



**Lösung:** Man muß haben

$$1) \quad \frac{f_1}{f_2} = - \frac{v_2}{v_1}$$

wo  $v_1$  und  $v_2$  die mittleren Dispersionen der beiden Linsen sind. Das Minuszeichen weist darauf hin, daß  $f_1$  und  $f_2$  verschiedene Vorzeichen haben müssen, daß also die eine Linse eine Sammellinse, die andere eine Zerstreuungslinse sein muß. Es fallen jetzt die Brennpunkte für die *C*-Linie und für die *F*-Linie aufeinander. Der Brennpunkt der Strahlen der gelben *D*-Linie liegt dann in unmittelbarer Nähe, so daß also die hervorstechendsten Farben praktisch wieder auf einen Punkt zusammengeleitet sind, und ein weißes achsenparalleles Lichtbündel, durch Mischung der Farben wieder einen weißen Brennpunkt ergibt. Da nun ferner bei zwei unendlich dünnen im Kontakt befindlichen Linsen, die Brennweite gleich der Entfernung des gemeinsamen Linsenscheitels vom Brennpunkt ist, so hat auch die Brennweite für die verschiedenen Farben dieselben Werte. Da nun aber von dieser Größe und vom Ort des Brennpunktes allein die Lage und Größe der Bilder abhängen, so ist das System achromatisch für jede beliebige Lage des Objektes innerhalb des paraxialen Gebietes. Man spricht in diesem Falle von einer stabilen Achromasie.

**Aufgabe 136.** Berechne die Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  zweier dünner im Kontakt befindlichen Linsen mit den mittleren Dispersionen  $v_1$  und  $v_2$ , wenn das achromatische System eine Gesamtbrennweite  $f$  haben soll.

**Lösung:** Außer der Gleichung I der Aufgabe 135

$$1) \quad \frac{f_1}{f_2} = - \frac{v_2}{v_1}$$

hat man noch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\text{II) } \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \cdot f \\ f_2 = -\frac{v_1 - v_2}{v_2} \cdot f \end{array} \right.$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist. Nach Schott & Gen. ist nun z. B. für Kron O 60 und Flint O 103

$$v_1 = 60,2 \quad v_2 = 36,2$$

und die letzten Gleichungen ergeben:

$$f_1 = \frac{24}{60,2} = 0,399 \cdot f$$

$$f_2 = \frac{24}{36,2} = -0,663 \cdot f,$$

Für  $f = 10$  cm erhält man z. B.  $f_1 = 3,99$  cm  $f_2 = -6,63$  cm.

**Aufgabe 137.** Wie berechnet man die Radien eines Achromaten von der Brennweite  $f$ ?

**Lösung:** In Fig. 76 ist ein aus zwei dünnen Linsen bestehender Achromat dargestellt. Der ersten Linse gehören die Werte  $n_1$  und  $v_1$  an, der zweiten die Werte  $n_2$  und  $v_2$ , wo die Werte  $n_1$  und  $n_2$  für die  $D$ -Linie gelten. Die Radien sind der Reihe nach  $r_1$  bis  $r_4$ , während die Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  sind.

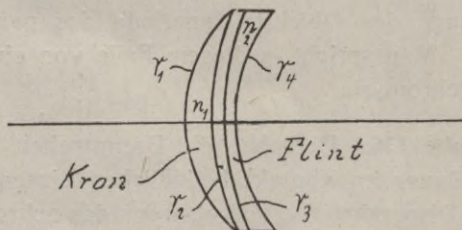


Fig. 76.

Sind nun  $f_1$  und  $f_2$  die Brennweiten der beiden dünnen Linsen, so hat man:

$$(n_1 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f_1}$$

$$(n_2 - 1) \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) = \frac{1}{f_2}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Gleichung II der vorigen Aufgabe.

$$1) \quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{v_1}{(v_1 - v_2)(n_1 - 1) \cdot f}$$

$$\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = - \frac{v_2}{(v_1 - v_2)(n_2 - 1) \cdot f}$$

wo  $f$  die Brennweite der Kombination ist.

Wenn die Glassorten und die Brennweite  $f$  der Kombination vorgeschrieben sind, so sind also die rechten Seiten der letzten Gleichungen gegebene Größen. Zwischen den 4 Radien  $r_1$  bis  $r_4$  bestehen also 2 Gleichungen. Man kann also noch zwei neue Gleichungen zwischen den vier Radien aufstellen, wodurch diese erst vollständig bestimmt sind. Handelt es sich um ein Fernrohr-objektiv, so pflegt man noch folgende beiden Bedingungen, und zwar innerhalb des Seidel'schen Gebietes zu erfüllen.

- 1) Die Aufhebung der sphärischen Aberration.
- 2) Die Innehaltung der Sinusbedingung.

Im engeren Sinne versteht man unter einem Achromaten öfters eine verkittete Linse, deren eine

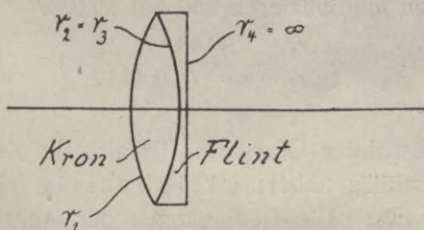


Fig. 77.

äußere Fläche plan ist. In diesem Falle muß also (Fig. 77)

$$r_2 = r_3$$

und

$$r_4 = \infty$$

sein. Die Gleichungen I liefern alsdann:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} = - \frac{v_2}{(v_1 - v_2)(n_2 - 1) \cdot f}$$

und

II)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{v_1}{(v_1 - v_2)(n_1 - 1) \cdot f} + \frac{1}{r_2}$$

wodurch die Radien bestimmt sind.

**Aufgabe 138.** Berechne einen (plankonvexen, verkitteten) Achromaten von der Brennweite  $f = 1$  aus den Gläsern. Kron O 60 und Flint O 103. Da jetzt  $v_1 = 60,2$  und  $v_2 = 36,2$  und also  $v_1 - v_2 = 24$  ist, so erhält man zunächst aus Gleichung II der vorigen Aufgabe.

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} = - \frac{36,2}{24 \cdot 0,6202} = - 2,4320$$

$$\text{oder } r_3 = - 0,4112 = r_2$$

ferner ist:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{60,2}{24 \cdot 0,5179} + \frac{1}{r_2}$$

oder:

$$\frac{1}{r_1} = 4,8433 + \frac{1}{r_2} = 2,4113$$

oder:

$$r_1 = 0,4147$$

Will man nun die Radien für eine vorgeschriebene Brennweite  $f$  haben, so hat man die gefundenen Werte nur mit  $f$  zu multiplizieren und hat also:

$$r_1 = 0,4147 \cdot f$$

$$r_2 = r_3 = - 0,4112 \cdot f$$

$$r_4 = \infty.$$

Bei den gewählten Glassorten ist also die Kronglaslinse (Fig. 77) zufällig nahezu gleichseitig bikonvex.

**Erklärung:** Die Bedingungen der Achromasie der Schnittweiten für mehrere insbesondere dicke Linsen in größeren Abständen voneinander lassen sich durch ziemlich umständliche Formeln ausdrücken und haben in der praktischen Optik keine große Bedeutung gewonnen. In den beiden wichtigsten Fällen, nämlich der Konstruktion von Mikroskopobjektiven und photographischen Objektiven bedient man sich der (trigonometrischen) Rechnung, indem man die Strahlen verschie-

dener Farben (verschiedener Wellenlängen) einzeln durch das System hindurch von Fläche zu Fläche verfolgt und die Flächen solange verändert, bis das gewünschte Ergebnis vorhanden ist.

Bemerkt sei, daß man theoretischen Erwägungen zufolge sogar aus mehreren Linsen derselben Glasarten Achromasie der Schnittweiten erzielen kann, jedoch gilt dies nicht für den praktisch wichtigen Fall, daß von einem unendlich fernen Objekt ein reelles Bild entworfen werden soll. Wichtigkeit für die konstruierende Optik hat jedoch der Fall erlangt, daß bei einem Systeme zweier dünnen Linsen, die den Abstand  $d$  voneinander haben, die Brennweiten für die verschiedenen Farben einander gleich gemacht werden.

**Aufgabe 139.** Gib die Bedingung für die Achromasie der Brennweiten zweier dünnen Linsen an?

**Lösung:** Für zwei dünne Linsen im Abstände  $d$  mit den Einzelbrennweiten  $f_1$  und  $f_2$  und den mittleren Dispersionen  $v_1$  und  $v_2$  gilt zunächst die Gleichung

$$I) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

wo  $f$  die Brennweite der Kombination ist. Damit die Größe  $f$  für verschiedene Farben denselben Wert hat, muß ferner die Bedingung erfüllt sein:

$$II) \quad d = \frac{f_1 \cdot v_1 + f_2 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$$

Besonders wichtig ist der Fall, daß beide Linsen aus demselben Material sind, also  $v_1 = v_2$  ist. Dann hat man

$$III) \quad d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Die Entfernung der Linsen muß also gleich der halben Summe der Einzelbrennweiten sein.

Da die Gleichung III unabhängig von den  $v$ -Werten, also auch unabhängig von der Auswahl derjenigen Farben ist, die zur Deckung gelangen sollen, so muß sie für

alle Farben gelten. Eine Kombination, welche die Gleichung III erfüllt, liefert also für sämtliche Farbstrahlen gleiche Brennweite.

Ueber die optisch-physiologische Bedeutung der Achromasie der Brennweiten, sei noch folgendes bemerkt:

In der Aufgabe 55 haben wir gesehen, daß ein unendlich fernes unter dem Gesichtswinkel  $\omega$  erscheinendes Objekt in der Brennweite eines Systems mit der Brennweite  $f$  von der Größe

$$y' = \omega \cdot f$$

abgebildet wird. Umgekehrt erzeugt ein in der Brennebene befindliches Objekt  $y'$  ein unendlich fernes Bild, das unter dem Gesichtswinkel

$$\text{IV) } \omega = \frac{y'}{f}$$

erscheint. Wenn wir durch das System von der dem  $y'$  abgewandten Seite nach dem unendlich fernen Bild hin blicken, so sehen wir also sämtliche farbigen Bilder unter demselben Winkel  $\omega$ , wenn die Achromasie der Brennweite vorhanden ist, denn zufolge Gleichung IV hängt  $\omega$  lediglich von der Größe  $f$  ab, da ja das Objekt  $y'$  selbst für alle Farben natürlich dieselbe Größe hat. Die verschiedenen Farben werden sich also im Auge wieder zu „Weiß“ mischen und das System erscheint farblos. Man erfüllt deshalb die Gleichung III der vorigen Aufgabe in erster Linie bei Okularen und Lupen, wo die betrachtenden Objekte in der Fokalebene des optischen Systems liegen.

**Aufgabe 140.** Berechne die Einzelbrennweiten  $f_1$  und  $f_2$  eines achromatischen zweilinsigen Okulars von der Gesamtbrennweite  $f$ ?

**Lösung:** Wenn man die Gleichungen I und III der vorigen Aufgabe als zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $f_1$  und  $f_2$  auffaßt, wobei die Größen  $d$  und

$f$  gegeben sein sollen, so erhält man durch Auflösung:

$$1) \quad \begin{aligned} f_1 &= d \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{f}{d}}\right) \\ f_2 &= d \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{f}{d}}\right) \end{aligned}$$

Damit reelle Werte entstehen, muß also die Entfernung  $d$  der beiden Linsen größer als die Brennweite  $f$  sein, oder es darf im Grenzfall  $d = f$  sein.

**Aufgabe 141.** Berechne ein Ramsden'sches Okular.

**Lösung:** Die Konstruktionsbedingung ist hier

$$f = d$$

die Gleichungen I der vorigen Aufgabe liefern:

$$f_1 = f_2 = d$$

Man verwendet gewöhnlich zwei plankonvexe Linsen, deren Stellung durch Fig. 78 angedeutet ist.

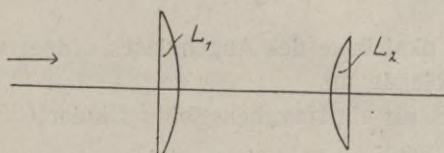


Fig. 78.

Die Linse  $L_1$  bezeichnet man als Kollektiv. Es steht in der Brennebene der Linse  $L_2$ . Die Linse  $L_2$  heißt Augenlinse. Bei einer häufig verwandten Abart des Ramsden'schen Okulars ist die Linse  $L_2$  als plankonvexer Achromat ausgebildet. (Kellner'sches Okular).

**Aufgabe 142.** Berechne ein Huyghens'sches Okular?

**Lösung:** Die Konstruktionsbedingung ist

$$\frac{f}{d} = \frac{8}{9}$$

Die Gleichungen I der Aufgabe 140 ergeben.

$$\begin{aligned} f_1 &= d \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4d}{3} = \frac{3}{2}f \\ f_2 &= d \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2d}{3} = \frac{3}{4}f \end{aligned}$$

Die Stellung der Linsen ist durch Fig. 79 angedeutet. Die Fokalebene ( $F$ -Ebene) der Augenlinse liegt um die Strecke  $FS_2 = f_2$  vom Augenglase und um die Strecke  $S_1F = d - f_2$

$$= \frac{9}{8}f - \frac{3}{4}f = \frac{3}{8}f$$

vom Kollektiv entfernt

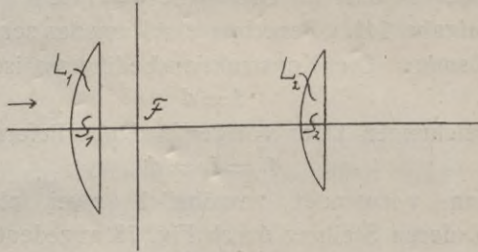


Fig. 79.

In der Fokalebene des Augenglases ordnet man die Gesichtsfeldblende an.

Soll z. B. für ein Huyghens'sches Okular  $f = 20$  mm sein, so hat man:

$$f_1 = 30 \text{ mm}, f_2 = 15 \text{ mm und } d = 22\frac{1}{2} \text{ mm.}$$

**Erklärung:** Nach der Gleichung I der Aufgabe 140 kann man natürlich beliebig viele neue Okularformen berechnen.

**Aufgabe 142.** Berechne ein achromatisches Okular nach der Konstruktionsbedingung.

$$\frac{f}{d} = \frac{3}{4}$$

Dann wird nach Gleichung I in Aufgabe 140:

$$f_1 = \frac{3}{2}d \text{ und } f_2 = \frac{d}{2}$$

Für  $f = 21$  mm erhält man z. B.

$$f_1 = 42 \text{ mm}, f_2 = 14 \text{ mm}, d = 28 \text{ mm.}$$

**Erklärung:** Die Bildfeldkrümmung läßt sich bei Okularen nicht nach der Petzval'schen Formel beurteilen.



da die Hauptstrahlen gezwungenermaßen durch den Mittelpunkt der A. P. gehen müssen, die vor dem Okular liegt und möglichst mit dem Drehpunkt des Auges zusammenfallen soll. Doch hält sich die Bildfeldkrümmung beim Ramsden'schen und Huyghens'schen Okular erfahrungsgemäß innerhalb erträglicher Grenzen. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei Systemen mit großer Oeffnung oder für den Fall, daß die Hauptstrahlen mit den Fundamentalstrahlen zusammenfallen, wie bei photographischen Objektiven insbesondere solcher von symmetrischer Bauart. Hier ist das Petzval'sche Theorem gültig.

**Aufgabe 143.** Berechne einen Achromaten aus zwei dünnen im Kontakt befindlichen Linsen, der die Petzvalbedingungen erfüllt?

**Lösung:** Nach Aufgabe 129 hat man die Bedingung

$$\frac{f_1}{f_2} = - \frac{n_2}{n_1}$$

und nach Aufgabe 135

$$\frac{f_1}{f_2} = - \frac{v_2}{v_1}$$

Also muß sein

$$1) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Es müssen sich also die Brechungsexponenten (für die *D*-Linie) der beiden Gläser wie die zugehörigen *v*-Werte verhalten. Die gewöhnlichen Kron- und Flintgläser entsprechen jedoch dieser Forderung nicht, sondern zeigen das entgegengesetzte Verhalten; denn die Flintgläser haben im allgemeinen kleinere Brechungsexponenten aber größere *v*-Werte als die Flintgläser. Eine Ausnahme jedoch bilden die neueren Barium-Krongläser von Schott & Gen. nach den Typen O 211, O 2994 und O 3961, welche größere Brechungsexponenten als die leichten Flintarten aufweisen. In Verbindung mit den leichteren Flintarten erhält man Zu-

sammenstellungen, welche der Bedingung I annähernd entsprechen. In vielen modernen photographischen Objektiven finden zum Zwecke der Bildebenung die Barium-Krongläser Verwendung. Doch läßt sich die Bildebenung auch durch die „alten“ Gläser erreichen, was zum Teil damit zusammenhängt, daß man mehrfach zusammengesetzte photographische Objektive nicht mehr als unendlich dünne Linsen auffassen kann.

---

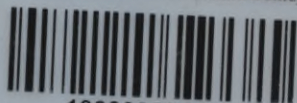
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW



S - 96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000294458