Aufgabe 1 *(Semantik)* (14 Punkte)

Zeigen Sie, daß die folgende Inferenzregel logisch korrekt ist:

$$\frac{D \ \vee \ f(s) \approx s' \qquad C \ \vee \ f(t) \approx t'}{D \ \vee \ C \ \vee \ s \not\approx t \ \vee \ s' \approx t'}$$

wobei Prämissen und Konklusion (implizit allquantifizierte) Gleichungsklauseln sind und die beiden Prämissen keine gemeinsamen Variablen aufweisen.

Aufgabe 2 *(Geordnete Resolution mit Selektion)* (10 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur mit $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ f/1,\ g/1\}$ und $\Pi = \{p/1,\ q/1,\ r/2\}$. Sei N die folgende Klauselmenge:

$$\neg p(g(a)) \tag{1}$$
$$q(f(x)) \tag{2}$$
$$r(x,x) \tag{3}$$
$$\neg q(g(x)) \ \vee \ p(g(x)) \tag{4}$$
$$\neg r(a,z) \ \vee \ q(a) \ \vee \ p(f(z)) \tag{5}$$
$$\neg r(f(y),y) \ \vee \ \neg q(y) \ \vee \ \neg p(f(f(y))) \tag{6}$$

Wir gehen davon aus, daß die Ordnung $\succ$ auf Grundatomen in einer Weise definiert ist, daß $p(\dots) \succ q(\dots) \succ r(\dots)$. Welche Literale in welchen Klauseln müssen von einer Selektionsfunktion S selektiert werden, damit N unter $Res_S^{\succ}$ saturiert ist?

Aufgabe 3 *(Tableaux)* (16 Punkte)

Benutzen Sie semantische Tableaux, um nachzuweisen, daß die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\forall x \left(\exists y\ p(x,y) \rightarrow \exists z\ p(f(x),z) \right)$$
$$p(a,a)$$
$$\neg\, \exists x\ p(f(f(a)),x)$$

(Hinweis: Quantoren erstrecken sich über die kürzeste folgende Teilformel, oder in anderen Worten, $\exists y\ F \rightarrow \exists z\ G$ ist gleichbedeutend mit $(\exists y\ F) \rightarrow (\exists z\ G)$.)

Aufgabe 4 *(E-Algebren)* (8 + 8 = 16 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ mit $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ f/1\}$; sei E die Menge von (implizit allquantifizierten) Gleichungen $\{\, f(f(x)) \approx a \,\}$.

Teil (a)

Geben Sie eine mögliche Ableitung für die Aussage $E \vdash f(a) \approx a$ an.

Teil (b)

Ist das Universum der initialen E-Algebra $\mathrm{T}_\Sigma(\emptyset)/E$ endlich oder unendlich? Falls es endlich ist, aus wievielen Elementen besteht es dann?

Aufgabe 5 *(Reduktionsordnungen)* (10 Punkte)

Sei Σ eine beliebige Signatur. Die Ordnung $\succ$ auf $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ sei definiert durch

$$s \succ s' \text{ genau dann, wenn } |s| > |s'|$$

wobei $|t|$ die Größe von t, also die Kardinalität von $\mathrm{pos}(t)$ bezeichnet. Ist $\succ$ eine Reduktionsordnung? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 6 *(Knuth-Bendix-Vervollständigung)* (14 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ mit $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ f/1,\ g/2,\ h/1\}$, sei $\succ$ die LPO mit der Präzedenz $h > g > f > b > a$, und sei E die folgende Gleichungsmenge:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx g(h(x), x) && (1)\\ g(a, b) &\approx b && (2)\\ h(b) &\approx a && (3) \end{aligned}$$

Wandeln Sie E durch Knuth-Bendix-Vervollständigung in eine äquivalente Menge R von Termersetzungsregeln um, so daß R konvergent ist und $\rightarrow_R \subseteq \succ$.