

Verformungen

1 Grundlagen

1.1 Allgemeines

Die Begrenzung der Verformungen im Stahlbetonbau verfolgt im Wesentlichen die folgenden Ziele:

- Vertrauen und Wohlbefinden der Nutzer
- Verhinderung von Schäden an angrenzenden oder nicht tragenden Bauteilen (z.B. Zwischenwände)

Wie aus der Statik bekannt ist, lässt sich die Durchbiegung eines Bauteils unter Vernachlässigung der Schubverformungen durch Integration der Verkrümmungen $\kappa(x)$ über die gesamte Bauteillänge ermitteln.

Allgemein: $f = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \bar{M}(x) \cdot dx = \int_0^l \kappa(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx$ mit $\kappa = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = -w''$

Das folgende Beispiel zeigt die Ermittlung der Verformung eines Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast in Feldmitte mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte:

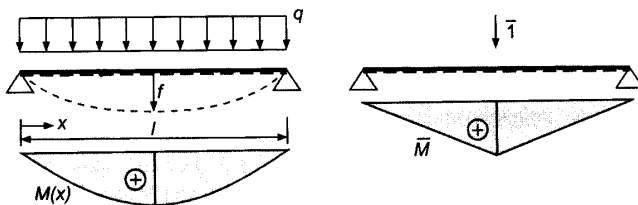


Bild: Durchbiegung eines Einfeldträgers in Feldmitte

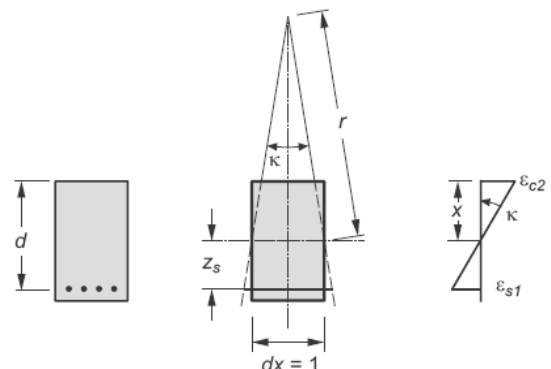
$$f = 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \bar{M}(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{l/2} \kappa(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx = \frac{2}{EI} \cdot \int_0^{l/2} \left(\frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI}$$

Wie man unschwer erkennen kann ist diese einfache Vorgehensweise bei Stahlbetonbauteilen nicht möglich, was hauptsächlich an folgenden Gegebenheiten liegt:

- Die **Biegesteifigkeit EI ist nicht konstant, sondern eine lastabhängige Größe**, d.h. es besteht kein linearer Zusammenhang zwischen dem Moment und der Verkrümmung des Querschnitts.
- **Kriechen und Schwinden** des Betons beeinflussen die Verformung von Stahlbetonbauteilen in Abhängigkeit von der Zeit beträchtlich.

Im Stahlbetonbau bietet es sich deshalb an, die Krümmung direkt aus dem Dehnungszustand des Querschnitts zu ermitteln, der sich aus dem inneren Kräftegleichgewicht ergibt:

$$\kappa = \frac{-\epsilon_{c2}}{x} = \frac{\epsilon_{s1} - \epsilon_{c2}}{d} = \frac{\epsilon_{s1}}{d - x} = \frac{M}{EI}$$



Die genaue Vorhersage von Verformungen und deren zeitliche Entwicklung erweist sich als schwierig, da eine Vielzahl von Parametern in die Berechnung eingehen: Insbesondere der beträchtliche Verformungszuwachs infolge **Rissbildung**, die maßgeblich von der streuenden Betonzugfestigkeit abhängt, ist nur schwer vorherzusagen. Zusätzlich hat das angenommene statische System (z. B. gelenkig statt teilweise eingespannt) Einfluss auf den gerissenen Bereich, der durch die Risschnittgrößen festgelegt wird.

Das folgende Bild zeigt den Zusammenhang zwischen der Last (hier Moment) und der Verformung (Krümmung) eines Biegebalkens. Es wird deutlich, dass die **Rissbildung** und die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (**tension stiffening**) einen erheblichen Einfluss auf die Biegesteifigkeit haben.

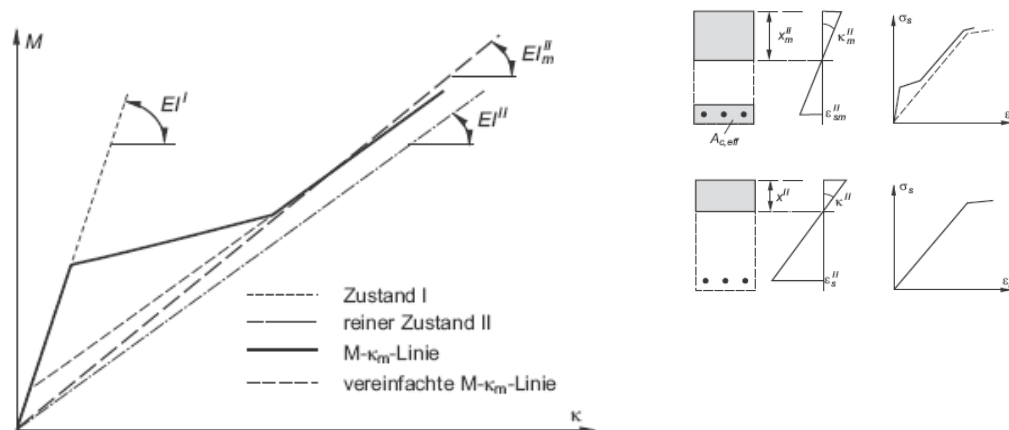


Bild: Last-Verformungs-Linie eines Stahlbetonbalkens im GZG

Aus den oben genannten Gründen ist es sinnvoll, die möglichen Grenzwerte der Verformung zu ermitteln, um daraus evtl. Rückschlüsse auf die tatsächlich zu erwartende Verformung zu erhalten:

- **Unterer Grenzwert: Verformung des ungerissenen Bauteils (Zustand I).**
- **Oberer Grenzwert: Verformung des vollständig gerissenen Bauteils (reiner Zustand II ohne Mitwirkung des Betons auf Zug).**

Somit ergeben sich die folgenden Möglichkeiten zur Berechnung von Verformungen:

- 1) Genaue Berechnung der Verformungen durch **numerische Integration der Krümmungen** über die Balkenlänge. Die Basis hierfür bilden die **M- κ -Linien**, die unter Berücksichtigung der Rissbildung und der Mitwirkung des Betons auf Zug für einen bestimmten Querschnitt erstellt werden müssen.
- 2) Vereinfachte Berechnung der Verformungen aus den **oberen und unteren Grenzwerten** unter Berücksichtigung des gerissenen Bereichs über einen **Rissbildungsfaktor**.
- 3) Vereinfachte Berechnung der Verformungen durch die Annahme **bereichsweise konstanter Steifigkeiten im Zustand I und Zustand II**.

1.2 Regelungen nach EC 2

1.2.1 Allgemeine Regelungen

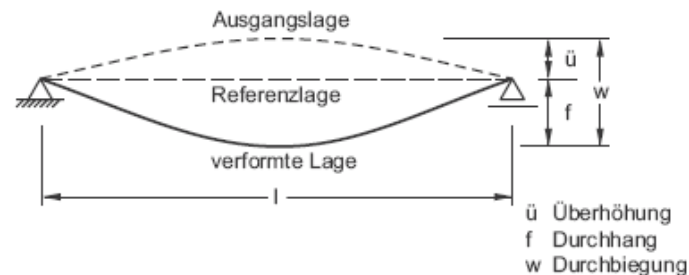


Bild: Biegeverformung eines Bauteils – Definition der Komponenten

Entsprechend der oben gezeigten Abbildung muss im Hinblick auf die Biegeverformung eines Bauteils unterschieden werden zwischen:

- **Durchbiegung w**
Die Durchbiegung bzw. die Biegelinie entspricht der Differenz zwischen der verformten Lage und der unverformten Ausgangslage.
- **Durchhang f**
Der Durchhang entspricht der Abweichung der verformten Lage von einer Referenzlage, i. d.R. der geraden Verbindung zwischen den Auflagern.

Da Biegeverformungen visuell nur auf Referenzlinien bezogen wahrgenommen werden (Durchhang), kann dieser – im Gegensatz zur Durchbiegung – durch eine Überhöhung \bar{u} der Schalung bei der Herstellung reduziert werden. Nach EC 2 sollte die **Überhöhung allerdings $l/250$ nicht überschreiten**.

Zum Nachweis von Verformungen stehen im EC 2 zwei alternative Wege zur Verfügung:

- Explizite Berechnung der Verformung und Vergleich mit Grenzwerten.
- Vereinfachter Nachweis durch Begrenzung der Biegeschlankheit.

Die zweite Alternative ist generell auf vorwiegend biegebeanspruchte, nicht vorgespannte Bauteile beschränkt. Im NA erfolgt zudem – bedingt durch die weitgehend empirische Ableitung der Biegeschlankheitsgrenzen – eine weitere Einschränkung auf Deckenplatten des üblichen Hochbaus.

Die Norm legt folgende Grenzwerte fest, die allerdings nur Richtwerte für übliche Wohn-, Büro und Industriebauten darstellen:

- Erhalt eines ansprechenden Erscheinungsbilds: Durchhang $f \leq l/250$
- Vermeidung von Schäden in angrenzenden Bauteilen: Durchbiegung $w \leq l/500$

Die Nachweise sind für die **quasi-ständige Belastung** zu führen. Bei Kragträgern ist 2,5l anzusetzen, also Durchhang $f \leq l/100$.

Eine Überschreitung der genannten Grenzen ist nicht automatisch als Mangel zu sehen, während deren Einhaltung nicht in allen Fällen die Gebrauchstauglichkeit garantiert. Im Zweifelsfall sind mit dem Bauherrn davon abweichende Grenzwerte zu vereinbaren.

1.2.2 Vereinfachter Nachweis durch Begrenzung der Biegeschlankheit

Im EC 2 werden **Grenzen für die Schlankheit l/d** angegeben, die auf einer genauen Berechnung basieren. Die Ausdehnung des auf Gebrauchslastniveau gerissenen Bereichs und der Einfluss des Bewehrungsgrades auf die Biegesteifigkeit im Zustand II werden durch eine Unterscheidung zwischen gering- und hochbeanspruchten Bauteilen erfasst.

Gering beanspruchte Bauteile (v. a. Platten) weisen im Allgemeinen niedrige Bewehrungsgrade auf ($< 0,5\%$); der gerissene Bereich erstreckt sich unter Gebrauchslasten nur über einen begrenzten Bereich der Spannweite.

Im Unterschied dazu besitzen hoch beanspruchte Bauteile (vorwiegend Balken) Bewehrungsgrade $> 0,5\%$. Die Rissbildung ist im Allgemeinen bereits unter Gebrauchslasten weit fortgeschritten, die größere Ausdehnung des gerissenen Bereichs führt damit im Vergleich zu gering beanspruchten Bauteilen zu größeren Verformungen. Für hochbeanspruchte Bauteile werden daher strengere Grenzwerte, d. h. größere statische Nutzhöhen bei gleicher Stützweite erforderlich.

$$\frac{l}{d} = K \cdot \left[11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \leq K \cdot 35 \leq K^2 \cdot 150/l \quad \text{für } \rho \leq \rho_0 \quad (7.16a)$$

$$\frac{l}{d} = K \cdot \left[11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \leq K \cdot 35 \leq K^2 \cdot 150/l \quad \text{für } \rho > \rho_0 \quad (7.16b)$$

l/d der Grenzwert der Biegeschlankheit (Verhältnis von Stützweite zu Nutzhöhe);

K der Beiwert zur Berücksichtigung der verschiedenen statischen Systeme;

ρ_0 der Referenzbewehrungsgrad $\rho_0 = 10^{-3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot f_{ck}$ in MN/m^2

ρ, ρ' der erforderliche Zug(Druck)bewehrungsgrad in Feldmitte, um das Bemessungsmoment aufzunehmen (am Einspannquerschnitt für Kragträger);

Die 2. Obergrenze $K^2 \cdot 150/l$ gilt für Bauteile, die verformungsempfindliche Ausbauelemente beeinträchtigen können.

Die Gleichungen (7.16a) und (7.16b) sind unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass die Stahlspannung unter der entsprechenden Bemessungslast im GZG in einem gerissenen Querschnitt in Feldmitte eines Balkens bzw. einer Platte oder am Einspannquerschnitt eines Kragträgers 310 N/mm^2 beträgt (entspricht ungefähr $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$). Werden andere Spannungsniveaus verwendet, sind in der Regel die nach Gleichung (7.16) ermittelten Werte mit $310 / \sigma_s$ zu multiplizieren. Im Allgemeinen befindet man sich mit der Annahme nach Gleichung (7.17) auf der sicheren Seite:

$$310 / \sigma_s = 500 / (f_{yk} \cdot A_{s,req} / A_{s,prov}) = A_{s,prov} / A_{s,req} \quad (7.17)$$

σ_s Stahzugspannung in Feldmitte (am Einspannquerschnitt eines Kragträgers) unter der Bemessungslast im GZG;

$A_{s,prov}$ vorhandene Querschnittsfläche der Zugbewehrung im vorgegebenen Querschnitt;

$A_{s,req}$ erforderliche Querschnittsfläche der Zugbewehrung im vorgegebenen Querschnitt im GZT.

Statisches System	K	Beton hoch beansprucht	Beton gering beansprucht
		$\rho = 1,5\%$	$\rho = 0,5\%$
frei drehbar gelagerter Einfeldträger; gelenkig gelagerte einachsig oder zweiachsig gespannte Platte	1,0	14	20
Endfeld eines Durchlaufträgers oder einer einachsig gespannten durchlaufenden Platte; Endfeld einer zweiachsig gespannten Platte, die kontinuierlich über einer längere Seite durchläuft	1,3	18	26
Mittelfeld eines Balkens oder einer einachsig oder zweiachsig gespannten Platte	1,5	20	30
Platte, die ohne Unterzüge auf Stützen gelagert ist (Flachdecke) (auf Grundlage der größeren Spannweite)	1,2	17	24
Kragträger	0,4	6	8

ANMERKUNG 1 Die angegebenen Werte befinden sich im Allgemeinen auf der sicheren Seite. Genauere rechnerische Nachweise führen häufig zu dünneren Bauteilen.

ANMERKUNG 2 Für zweiachsig gespannte Platten ist in der Regel der Nachweis mit der kürzeren Stützweite zu führen. Bei Flachdecken ist in der Regel die größere Stützweite zugrunde zu legen.

ANMERKUNG 3 Die für Flachdecken angegebenen Grenzen sind weniger streng als der zulässige Durchhang von 1/250 der Stützweite. Erfahrungsgemäß ist dies ausreichend.

EC2 Tabelle 7.4N: Grundwerte der Biegeschlankheit von Stahlbetonbauteilen ohne Drucknormalkraft; Beispiele für 0,5% und 1,5% mit C30/37 und $\sigma_s = 310 \text{ MN/m}^2$

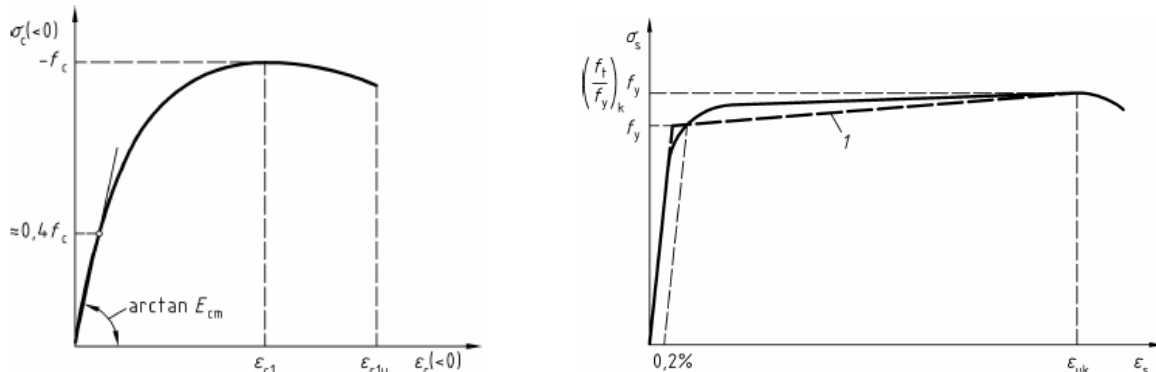
Bei gegliederten Querschnitten, bei denen das Verhältnis von Gurtbreite zu Stegbreite den Wert 3 übersteigt, sind in der Regel die Werte von l/d nach Gleichung (7.16) mit 0,8 zu multiplizieren.

Bei Balken und Platten (außer Flachdecken) mit Stützweiten über 7 m, die leichte Trennwände tragen, die durch übermäßige Durchbiegung beschädigt werden könnten, sind in der Regel die Werte l/d nach Gleichung (7.16) mit dem Faktor $7/l_{\text{eff}}$ (l_{eff} in m) zu multiplizieren.

Bei Flachdecken mit Stützweiten über 8,5 m, die leichte Trennwände tragen, die durch übermäßige Durchbiegung beschädigt werden könnten, sind in der Regel die Werte l/d nach Gleichung (7.16) mit dem Faktor $8,5/l_{\text{eff}}$ (l_{eff} in m) zu multiplizieren.

1.3 Materialgesetze nach EC 2

Die Spannungs-Dehnungs-Linien für Verformungsberechnungen (und für die Schnittgrößen-ermittlung mit nichtlinearen Verfahren) sind im folgenden Bild dargestellt:



Die Funktion für die Betonspannung in dem oben abgebildeten Werkstoffgesetz ist in der Norm festgelegt:

$$\sigma_c = f_c \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad \eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1} \quad k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\epsilon_{c1}| / f_c$$

Für die **nichtlineare Verformungsberechnung und die nichtlineare Schnittgrößen-ermittlung** sind die folgenden Mittelwerte der Festigkeiten anzusetzen:

		normalduktil	hochduktil
Bruchdehnung Stahl:	$\epsilon_{su} = 0,025$	$\epsilon_{uk} = 0,025$	$\epsilon_{uk} = 0,050$
Fließgrenze Stahl:		$f_y = f_{yk}$	$f_y = f_{yk}$
Streckgrenze Stahl:		$f_t = 1,05 \cdot f_{yk}$	$f_t = 1,08 \cdot f_{yk}$
Betonfestigkeit:		$f_c = f_{cm}$	

Für die **nichtlineare Verformungsberechnung und die nichtlineare Schnittgrößen-ermittlung einschließlich Bemessung** dürfen alternativ gemäß NA die folgenden **Rechenwerte als Mittelwerte der Festigkeiten** angenommen werden:

		normalduktil	hochduktil
Bruchdehnung Stahl:	$\epsilon_{su} = 0,025$	$\epsilon_{uk} = 0,025$	$\epsilon_{uk} = 0,050$
Fließgrenze Stahl:		$f_{yR} = 1,1 \cdot f_{yk}$	$f_{yR} = 1,1 \cdot f_{yk}$
Streckgrenze Stahl:		$f_{tR} = 1,05 \cdot f_{yR}$	$f_{tR} = 1,08 \cdot f_{yR}$
Beton bis C50:		$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck}$	
Beton ab C55:		$f_{cR} = 0,85 \cdot \alpha \cdot f_{ck} / \gamma_c'$	

Für Beton ab der Festigkeitsklasse C55 gilt wegen größeren Streuungen der Materialeigenschaften folgender Abminderungsfaktor: $\gamma_c' = \frac{1}{1,1 - f_{ck}/500} \geq 1,0$

Für den **Bemessungswert des Tragwiderstandes** gelten die folgenden **einheitlichen Teilsicherheitsbeiwerte**:

- Grundkombination und Ermüdung: $\gamma_R = 1,3$
- Außergewöhnliche Kombination: $\gamma_R = 1,1$

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (tension stiffening, siehe Heft 525 des DAfStb) darf vernachlässigt werden, wenn dies auf der sicheren Seite liegt.

2 Vereinfachte Verformungsberechnung durch Ansatz von bereichsweise konstanten Steifigkeiten

Die effektive Biegesteifigkeit EI^{eff} ist zwar beanspruchungsabhängig, sie ändert sich aber in weiten Teilen des gerissenen Bereichs nur wenig. Es ist daher nahe liegend, die Biegesteifigkeit abschnittsweise konstant anzunehmen. Die einfachste Möglichkeit hierfür ist, den Balken über die Risschnittgrößen in einen gerissenen und einen ungerissenen Bereich aufzuteilen. Da im Allgemeinen keine Informationen über die Belastungsgeschichte vorliegen, sollte der **gerissene Bereich unter der seltenen Einwirkungskombination mit der Zugfestigkeit f_{ctm}** bestimmt werden.

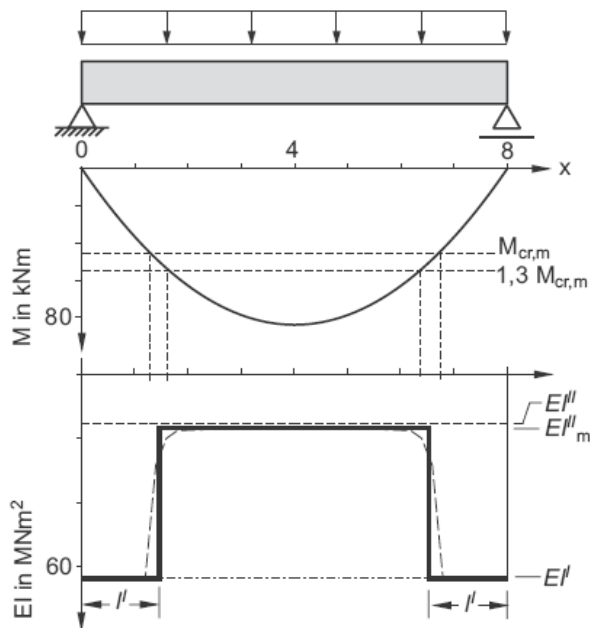


Bild: Näherungsweise Verformungsberechnung durch abschnittsweise konstante Biegesteifigkeit

Wie man am obigen Bild erkennen kann, wird der Übergang vom Erstriss (M_{cr}) zum abgeschlossenen Rissbild ($1,3M_{cr}$) vereinfacht durch einen Steifigkeitssprung berücksichtigt. Eine genauere Berücksichtigung ist nur sinnvoll bei numerischer Integration.

Dadurch kann die Verformung sehr einfach durch Koppeln über 2 Bereiche mit konstanter Biegesteifigkeit ermittelt werden, für das oben dargestellte Beispiel wie folgt:

$$f_{\max} = \frac{2}{EI_I} \cdot \int_0^{x, \text{riss}} M(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx + \frac{2}{EI_{II}} \cdot \int_{x, \text{riss}}^{l/2} M(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx$$

3 Vereinfachte Verformungsberechnung durch einen Rissbildungsfaktor

Statt abschnittsweise mit unterschiedlichen Steifigkeiten zu integrieren werden zunächst die beiden Grenzwerte der Durchbiegungen für den Zustand I und den reinen Zustand II ermittelt. Unter Berücksichtigung des Verhältnisses zwischen gerissenen und ungerissenen Bereichen kann die zu erwartende Durchbiegung wie folgt ermittelt werden:

$$f = f_I + \zeta \cdot (f_{II} - f_I) = \zeta \cdot f_{II} + (1 - \zeta) \cdot f_I$$

- ζ Verteilungsbeiwert oder Rissbildungsfaktor
- f_I für den Zustand I ermittelte Durchbiegung
- f_{II} für den Zustand II ermittelte Durchbiegung

Der Verteilungsbeiwert (Rissbildungsfaktor) ζ kann hierbei näherungsweise in Abhängigkeit vom maximalen Feldmoment wie folgt ermittelt werden:

Linearer Momentenverlauf:
$$\zeta = 1 - \frac{M_{cr}}{M_F}$$

Quadratischer Momentenverlauf:
$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{M_{cr}}{M_F}}$$

Es gibt mehrere unterschiedliche Vorschläge zur Ermittlung dieses Rissbildungsfaktors, eine davon kann z.B. dem Eurocode 2 entnommen werden.

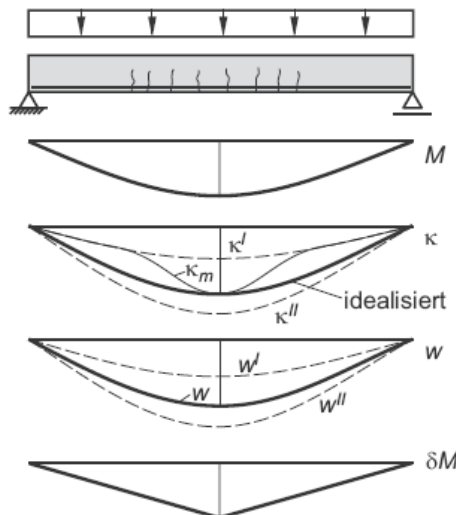


Bild: Vereinfachte Ermittlung der Verformung über eine mittlere Krümmung.

4 Verformungsberechnung durch numerische Integration der M-κ-Linie

Da die Biegesteifigkeit belastungsabhängig ist, wird im Stahlbetonbau direkt mit Krümmungen gearbeitet, so dass sich das aus der Statik bekannte Integral (Prinzip der virtuellen Kräfte) durch direktes Einsetzen der Krümmung verändert:

$$\text{Aus } f = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \cdot \bar{M}(x) \cdot dx \text{ wird mit } \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad f = \int_0^l \kappa(x) \cdot \bar{M}(x) \cdot dx$$

Da die Querschnittsverkrümmung vom Material, vom Bewehrungsgrad, von den Abmessungen und von der Belastung abhängt, kann der Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung nur **für einen bestimmten Querschnitt mit einer bestimmten Normalkraft** erstellt werden.

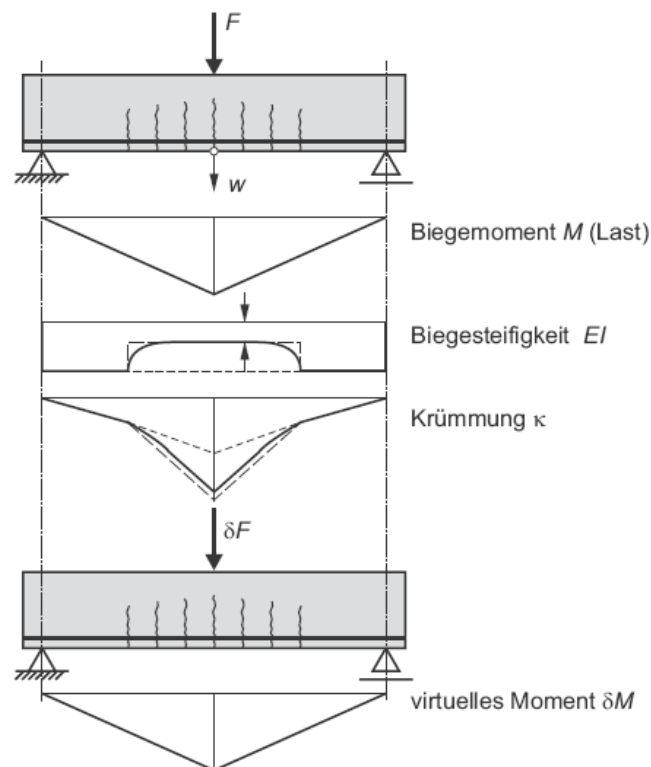


Bild: Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte auf einen gerissenen Stahlbetonbalken

Die gebräuchlichste Vorgehensweise für die **numerische Integration** ist die Anwendung der **Simpson-Integration**. Da diese auf ein Interpolationspolynom mit 3 Stützstellen aufbaut (quadratische Approximation), muss der **Integrationsbereich in eine gerade Anzahl von Abschnitten unterteilt** werden. Mit den n Stützstellen kann das oben genannte Integral dann folgendermaßen numerisch gelöst werden:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Nicht ganz so genau (lineare Approximation), aber dafür mit **beliebiger Anzahl von Integrationsabschnitten**, funktioniert die **Trapezregel**:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) \cdot dx = \frac{\Delta x}{2} \cdot (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

5 Zeitabhängige Anteile infolge Kriechen und Schwinden

Beton zeigt bereits unter üblichen Gebrauchsbedingungen ein ausgeprägtes zeitabhängiges Verhalten, wodurch Dehnungen auftreten können, die ein Mehrfaches der elastischen Dehnung betragen: $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0)$

ε_{ci}	lastabhängige elastische Dehnung
ε_{cs}	lastunabhängige Dehnung aus Schwinden
ε_{cc}	lastabhängige Dehnung aus Kriechen (incl. Relaxation)
t_0	Zeitpunkt für den Beginn der Belastung
t	aktueller Zeitpunkt

Schwinden

Als Schwinden wird vor allem die **lastunabhängige Volumenverminderung** des Betons durch Austrocknung oder durch chemische Prozesse wie der Hydratation bezeichnet. Die Schwinddehnung nähert sich bei konstanten Umgebungsbedingungen mit zunehmender Zeit asymptotisch einem Endwert, dem Endschwindmaß $\varepsilon_{cs,\infty}$.

Kriechen

Mit Kriechen bezeichnet man die **lastabhängige Verformung** insbesondere des Zementsteins. Bei Änderungen des Feuchtegehalts, z. B. durch Austrocknen, werden die Kriechvorgänge beschleunigt. Das Modell zur Abschätzung des Kriechens wurde unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Kriechdehnungen entwickelt (**lineares Kriechen**). Die Gültigkeit ist daher auf Betonspannungen $< 0,4 f_{cm}$ (bzw. $< 0,45 f_{ck}$ in der Norm) beschränkt, was aber für Verformungsberechnungen ausreichend ist.

Die zeitabhängigen Effekte von Kriechen und Schwinden können **vereinfacht getrennt voneinander betrachtet** werden. Hierbei wird angenommen, dass Kriechen und Schwinden affin zueinander verlaufen.

Die rechnerische Ermittlung des Kriechbeiwertes φ und der Schwinddehnung ε_{cs} sind in einem separaten Dokument (kriechen+schwinden.pdf) dargestellt.

5.1 Berücksichtigung des Kriechens

Die auftretenden Kriechdehnungen werden im GZG (lineares Kriechen) mit Hilfe der **Kriechzahl** $\varphi(t, t_0)$ als Vielfaches der elastischen Kurzzeitdehnung $\varepsilon_{ci,28}$ ermittelt:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{ci,28} \cdot \varphi(t, t_0) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ci,28} = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c}$$

Die Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ bezieht sich auf den Tangentenmodul E_c , der mit $1,05E_{cm}$ angenommen werden darf.

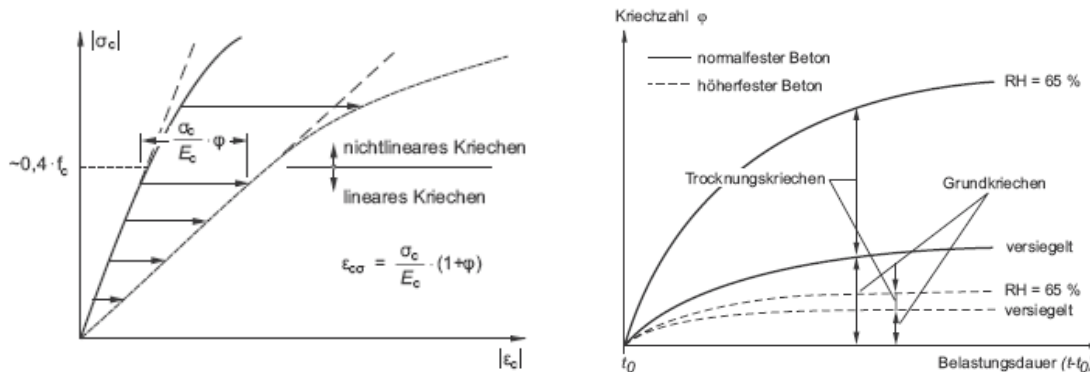


Bild: Abgrenzung zw. Linearen und nichtlinearem Kriechen, Kriechkomponenten

Anstatt mit der Dehnung kann im GZG näherungsweise mit einem effektiven E-Modul $E_{c,eff}$ gerechnet werden, wodurch die Berücksichtigung von Kriechen erheblich vereinfacht wird:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \alpha_i \cdot \rho(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \frac{E_{cm}}{E_c} = \frac{E_{cm}}{1,05 \cdot E_{cm}} = \frac{1}{1,05}$$

Der Beiwert ρ ist der sog. **Relaxationsbeiwert** und erfasst einerseits den **zeitlichen Verlauf der Spannungen** und andererseits die **mit zunehmendem Betonalter verminderte Kriechfähigkeit**. ρ wird deshalb auch als Alterungsbeiwert bezeichnet. Im Allgemeinen liegt er zwischen 0,5 und 1,0. Für **stetig veränderliche Spannung** kann er mit hinreichender Genauigkeit als konstant mit $\rho = 0,8$ angesetzt werden. Bei geringem veränderlichem Lastanteil wird $\rho = 1,0$ angenommen.

Wenn die Betondruckspannung im Alter t_0 den Wert $0,45f_{ck}(t_0)$ übersteigt, ist in der Regel die Nichtlinearität des Kriechens zu berücksichtigen. Diese hohen Spannungen können durch Vorspannung mit sofortigem Verbund entstehen, z. B. bei Fertigteilen im Bereich der Spannlieder. In diesen Fällen darf die nichtlineare rechnerische Kriechzahl wie folgt ermittelt werden:

$$\varphi_{nl}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot e^{1,5 \cdot (k_\sigma - 0,45)}$$

k_σ das Spannungs-Festigkeitsverhältnis $\sigma_c / f_{ck}(t_0)$, wobei σ_c die Druckspannung ist und $f_{ck}(t_0)$ der charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit zum Zeitpunkt der Belastung.

Das folgende Bild zeigt die Veränderung der Dehnungen und Spannungen infolge Kriechen am Beispiel eines Einfeldträgers in Feldmitte. Man kann erkennen, dass sich im Gegensatz zum Zustand I im Zustand II die Druckzone prägnant vergrößert. Der Abfall der Biegesteifigkeit ist deshalb und wegen des nur zum Teil ansetzbaren Betonquerschnitts im Zustand II bei weitem nicht so groß wie im Zustand I.

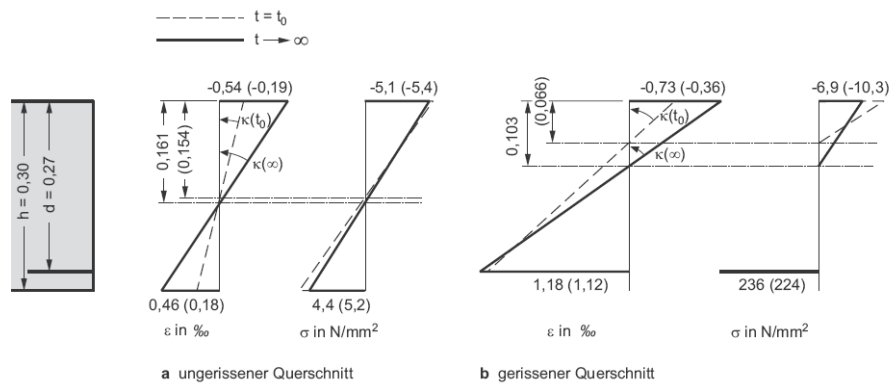
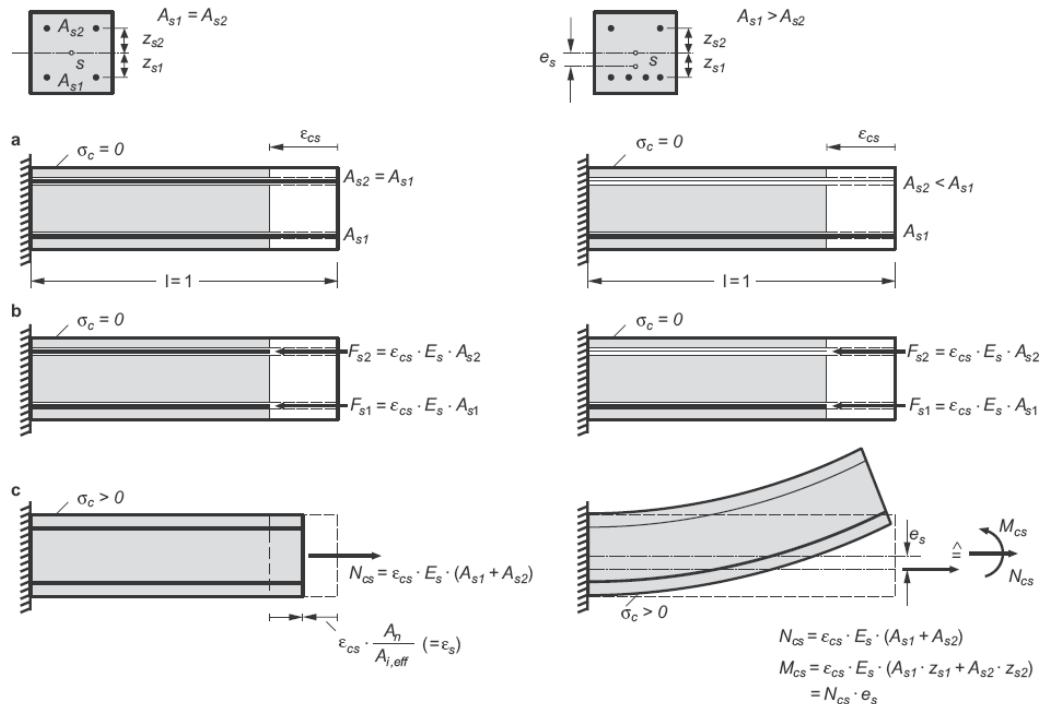


Bild: Auswirkung des Kriechens auf die Dehnungen und Spannungen im Querschnitt

Im EC 2 werden für lineares Kriechen nur Endkriechzahlen für eine Belastungsdauer von 70 Jahren und 2 relative Luftfeuchtigkeiten ($RH = 50\%$ und $RH = 80\%$) in Form von Nomogrammen angegeben. Zur genaueren Rechnung (und zur Kontrolle) werden im Script „Kriechen+Schwinden.pdf“ die Rechengrundlagen angegeben.

5.2 Berücksichtigung des Schwindens

Schwinden ist generell **beanspruchungsunabhängig**. Bei der Ermittlung der Schwindverformungen wird gleichmäßiges Schwinden über den Querschnitt vorausgesetzt. Die Schwindverkürzungen erzeugen im Querschnitt einen Eigenspannungszustand. Die behinderte Schwinddehnung wirkt als zusätzliche Normalkraft N_{cs} im Bewehrungsschwerpunkt auf den Verbundquerschnitt. Wenn also der Querschnittsschwerpunkt nicht mit dem Bewehrungsschwerpunkt identisch ist, entstehen zusätzlich Querschnittsverkrümmungen (siehe Bild unten).



- a Beton und Bewehrung sind nicht verbunden → freie Schwindverformung
 b Der Bewehrung wird die Verformung ϵ_{cs} aufgezwungen → F_{s1} , F_{s2}
 c Verbund zwischen Bewehrung und Beton → N_{cs} wirkt im Bewehrungsschwerpunkt auf den Verbundquerschnitt

Bild: Auswirkungen des Schwindens – Modellvorstellung

Mit e_s als Abstand zwischen den Schwerpunkten von Stahl und Verbundquerschnitt gilt:

$$N_{cs} = \epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \quad M_{cs} = N_{cs} \cdot e_s = \epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot e_s \quad A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$\kappa_{cs} = \frac{M_{cs}}{EI(t)} = \frac{\epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot e_s}{E_{c,eff} \cdot I} = \epsilon_{cs} \cdot \alpha_{s,eff} \cdot \frac{S_s}{I} \quad (\text{vgl. EC2})$$

mit $S_s = A_s \cdot e_s$ (Statisches Moment der Bewehrung)

Bei der Verformungsberechnung mit konventionellen Stabwerksprogrammen kann damit die Schwindverkrümmung durch einen äquivalenten Temperaturlastfall ΔT_{cs} berücksichtigt

$$\text{werden: mit } \kappa_{cs} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T_{cs}}{h} \text{ folgt } \Delta T_{cs} = \frac{\epsilon_{cs} \cdot E_s \cdot A_s \cdot e_s \cdot h}{EI_{I/II} \cdot \alpha_t}$$

Der Unterschied zwischen ungerissenem und gerissenem Querschnitt liegt nur darin, dass beim gerissenen Querschnitt lediglich das Schwinden der Druckzone einen Beitrag zur Verkrümmung des Querschnitts liefert. Für das Trägheitsmoment ist dann nur dasjenige des gerissenen Querschnitts zu verwenden.

5.2.1 Ungerissener Zustand

Es wird davon ausgegangen, dass in jeder Faser des Querschnitts Verformungskompatibilität besteht. Zunächst werden die Dehnungen des Betons und des Stahls in ihren Schwerpunkten getrennt betrachtet (vgl. Bild unten).

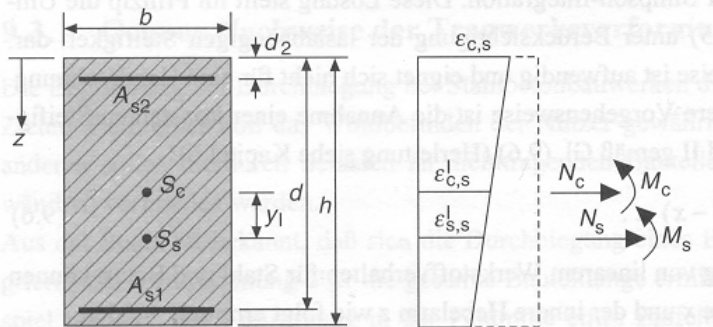


Bild: Innere Kräfte infolge Schwindens beim ungerissenen Querschnitt

Durch Auswerten des inneren Kräftegleichgewichts lassen sich bei vorgegebenem Schwindmaß folgende Zusammenhänge für den **Bruttoquerschnitt** herleiten:

Geometrische Bewehrungsgrade: $\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot d}$ $\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot d}$ $\rho_l = \rho_{s1} + \rho_{s2}$ $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

Abstand zw. den Schwerpunkten: $y_l = \frac{(d_2 - d) \cdot (\rho_{s2} - \rho_{s1})}{2 \cdot \rho_l}$

Trägheitsmoment im Zustand I: $I_l = \frac{b \cdot h^3}{12}$

Krümmung: $\kappa_{cs} = \frac{\epsilon_{ss} - \epsilon_{cs}}{y_l}$

mit:

$$\epsilon_{ss} = \frac{\epsilon_{cs\infty}}{1 + (1 + \alpha_i \cdot \rho \cdot \varphi) \cdot (\alpha_{s\infty} \cdot \rho_l + y_l^2 \cdot \alpha_{s\infty} \cdot A_s / I_l)}$$

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cs\infty} - \frac{\epsilon_{cs\infty} \cdot (1 + \alpha_i \cdot \rho \cdot \varphi) \cdot \alpha_{s\infty} \cdot \rho_l}{1 + (1 + \alpha_i \cdot \rho \cdot \varphi) \cdot (\alpha_{s\infty} \cdot \rho_l + y_l^2 \cdot \alpha_{s\infty} \cdot A_s / I_l)}$$

5.2.2 Gerissener Zustand

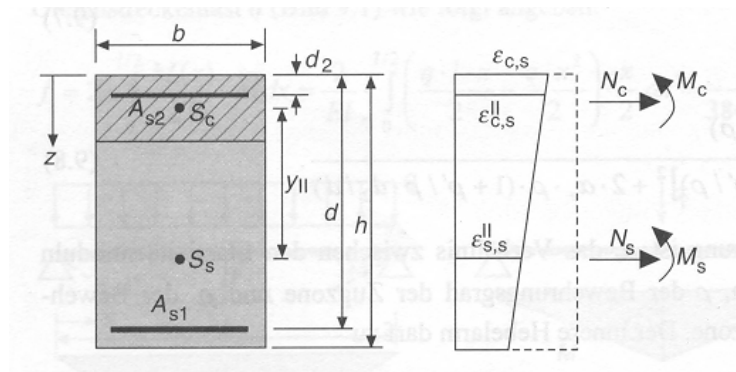


Bild: Innere Kräfte infolge Schwindens beim gerissenen Querschnitt

Geometrische Bewehrungsgrade: $\rho_{s1} = \frac{A_{s1}}{b \cdot d}$ $\rho_{s2} = \frac{A_{s2}}{b \cdot d}$ $\rho_l = \rho_{s1} + \rho_{s2}$ $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

Abstand zw. den Schwerpunkten: $y_{II} = d \cdot \left[1 - \frac{\xi}{2} - \frac{\rho_{s2} \cdot (1 - d_2/d)}{\rho_l} \right]$

Trägheitsmoment Zustand II: $I_{II} = \frac{b \cdot d^3}{12} \cdot \left(4 \cdot \xi^3 + 12 \cdot \alpha_{s\infty} \cdot \rho_{s1} \cdot \left((1 - \xi)^2 + \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} \cdot \left(\xi - \frac{d_2}{d} \right)^2 \right) \right)$

Krümmung: $\kappa_{cs} = \frac{\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{cs}}{y_{II}}$

mit: $\varepsilon_{ss} = \frac{\varepsilon_{cs\infty}}{1 + A_s \cdot E_{s,eff} \cdot (1 + \alpha_i \cdot \rho \cdot \varphi) \cdot \left(\frac{1}{\xi \cdot d \cdot b \cdot E_{c\infty}} + \frac{y_{II}^2}{I_{II} \cdot E_{c\infty}} \right)}$

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs\infty} - \frac{\varepsilon_{cs\infty} \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{\xi \cdot d \cdot b \cdot E_{c\infty} \cdot \left(\frac{1}{A_s \cdot E_{s,eff}} + (1 + \alpha_i \cdot \rho \cdot \varphi) \cdot \left(\frac{1}{\xi \cdot d \cdot b \cdot E_{c\infty}} + \frac{y_{II}^2}{I_{II} \cdot E_{c\infty}} \right) \right)}$$

6 Berücksichtigung der Zugversteifung (tension stiffening)

Die versteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen (tension stiffening) kann im Rahmen einer numerischen Ermittlung einer M- κ -Linie einerseits durch den Ansatz einer Restzugfestigkeit des Betons und andererseits durch eine Modifizierung der σ - ϵ -Linie des Stahls (Reduzierung der ermittelten Stahldehnung) erfasst werden.

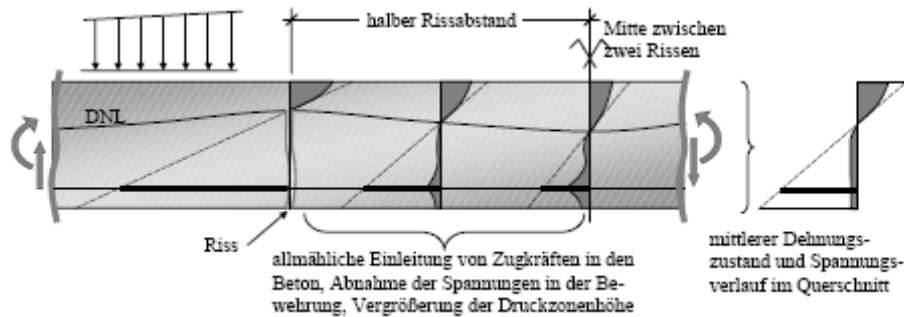


Bild: Realität und Modellierung über die Betonzugfestigkeit (max. ca. 0,6 f_{ctm})

Das folgende Bild zeigt die Auswirkungen der Mitberücksichtigung der Zugversteifung auf die σ - ϵ -Linie des Stahls und die M- κ -Linie durch Idealisierung des Zuggurtes als zentrisch beanspruchter Zugstab mit der Querschnittsfläche $A_{c,eff}$ (vgl. Rissbreitenberechnung):

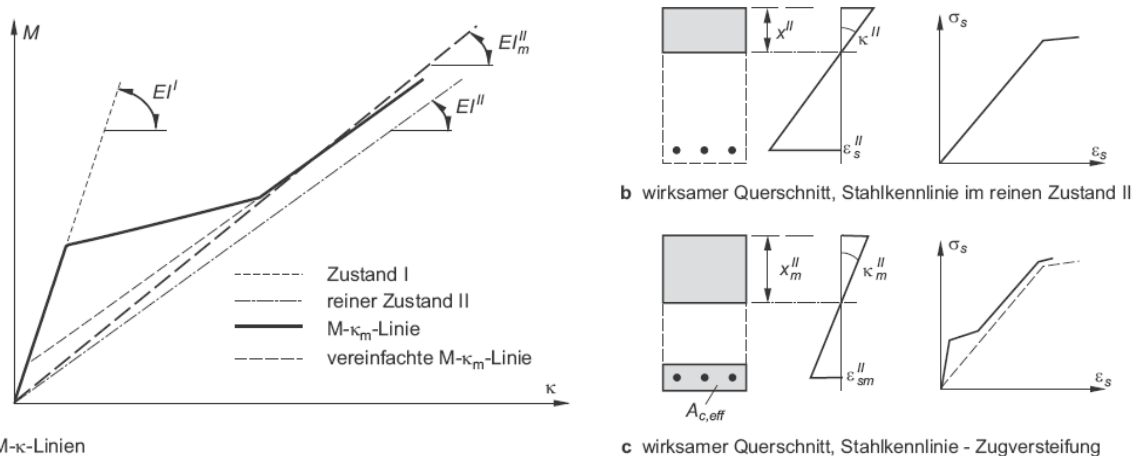


Bild: Auswirkungen bei Ansatz der Zugversteifung

Analog zur σ - ϵ -Linie des Stahls kann die M- κ -Linie in die 4 bekannten Bereiche unterteilt werden: Zustand I, Erstrissbildung, abgeschlossenes Rissbild und Fließen der Bewehrung. Da im Gebrauchszustand Fließen der Bewehrung ausgeschlossen ist, entfällt der 4. Teil und wurde deshalb auch in der obigen M- κ -Linie nicht mehr komplett dargestellt.

In den meisten Fällen liefert die Reduzierung der ermittelten Stahldehnung auf eine mittlere Stahldehnung als Ersatz für den Ansatz der Zugversteifung gute Ergebnisse. Die im Folgenden dargestellten modifizierten Spannungs-Dehnungs-Linien für Betonstahl sind dem Heft 525 DASTb entnommen:

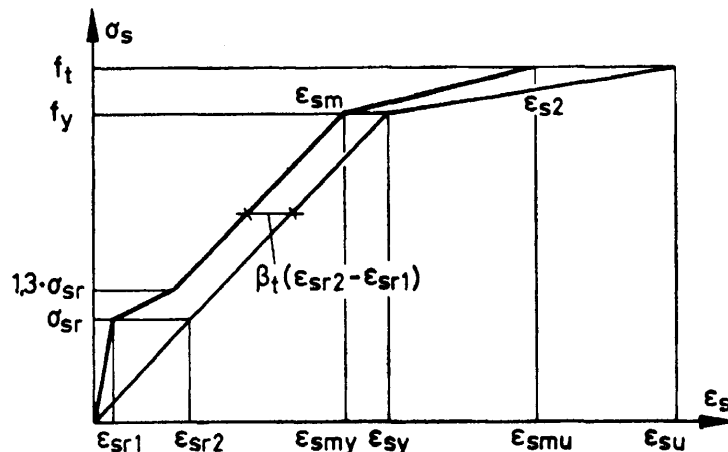


Bild: Modifizierte Stahl- σ - ϵ -Linie zur Berücksichtigung der Zugversteifung (Erstbelastung)

Bereich 1: Ungerissen

$$0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr} \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{s1}$$

Bereich 2: Rissbildung

$$\sigma_{sr} < \sigma_s \leq 1,3 \cdot \sigma_{sr} \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{s2} - \frac{\beta_t \cdot (\sigma_s - \sigma_{sr}) + (1,3 \cdot \sigma_{sr} - \sigma_s)}{0,3 \cdot \sigma_{sr}} \cdot (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1})$$

Bereich 3: Abgeschlossenes Rissbild

$$1,3 \cdot \sigma_{sr} < \sigma_s \leq f_y \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{s2} - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1})$$

Bereich 4: Stahlfließen

$$f_y < \sigma_s \leq f_t \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{sy} - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1}) + \delta_d \cdot (1 - \sigma_{sr}/f_y) \cdot (\epsilon_{s2} - \epsilon_{sy})$$

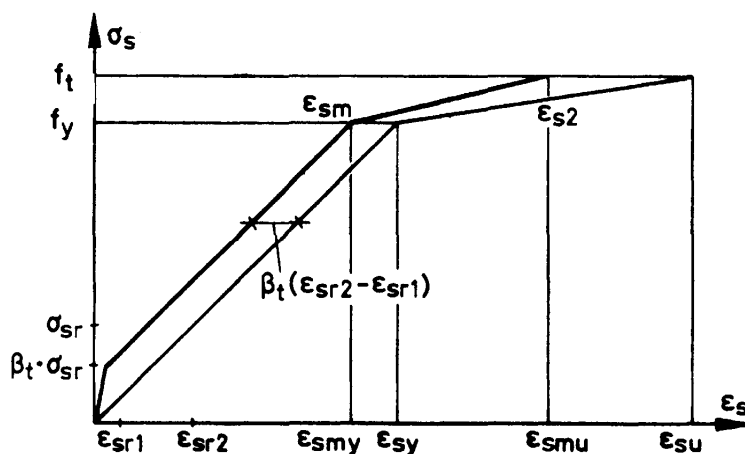


Bild: Vereinfachter Ansatz der Zugversteifung bei wiederholter Be- und Entlastung

Bereich 1: Ungerissen

$$0 < \sigma_s \leq \beta_t \cdot \sigma_{sr} \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{s1}$$

Bereich 2: Gerissen

$$\beta_t \cdot \sigma_{sr} < \sigma_s \leq f_y \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{s2} - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1})$$

Bereich 3: Stahlfließen

$$f_y < \sigma_s \leq f_t \quad \epsilon_{sm} = \epsilon_{sy} - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr2} - \epsilon_{sr1}) + \delta_d \cdot (1 - \sigma_{sr}/f_y) \cdot (\epsilon_{s2} - \epsilon_{sy})$$

ε_{sm}	mittlere Stahldehnung
ε_{s1}	Stahldehnung im Zustand I
ε_{s2}	Stahldehnung im Zustand II
ε_{sr1}	Stahldehnung im Zustand I unter Rissschnittgrößen bei Erreichen von f_{ctm}
ε_{sr2}	Stahldehnung im Zustand II im Riss unter Rissschnittgrößen
β_t	Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der Belastungsdauer oder einer wiederholten Belastung auf die mittlere Stahldehnung = 0,4 für eine einzelne kurzzeitige Belastung = 0,25 für eine andauernde Last oder für häufige Lastwechsel
σ_s	Spannung in der Zugbewehrung im gerissenen Querschnitt
σ_{sr}	Spannung in der Zugbewehrung im gerissenen Querschnitt, berechnet für eine Einwirkungskombination, die zur Erstrissbildung führt.
δ_d	Beiwert zur Berücksichtigung der Duktilität der Bewehrung = 0,8 für hochduktilen Stahl = 0,6 für normalduktilen Stahl