

# Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt mit Rydberg-Polaritonen

D I P L O M A R B E I T  
in  
Theoretischer Physik

von  
**Fabian Grusdt**

durchgeführt am  
Fachbereich Physik  
der Technischen Universität Kaiserslautern

unter Anleitung von Herrn  
**Prof. Dr. Michael Fleischhauer**

Kaiserslautern, April 2012



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie des Fraktionalen Quanten-Hall-Effekts</b>	<b>5</b>
2.1	Landau Level . . . . .	5
2.1.1	Allgemeine Behandlung . . . . .	6
2.1.2	Symmetrische Eichung und Fock-Darwin Level . . . . .	7
2.1.3	Sphärische Geometrie . . . . .	10
2.2	IQHE für Fermionen . . . . .	12
2.3	FQHE und CF Theorie . . . . .	14
2.3.1	Das FQHE Problem . . . . .	15
2.3.2	Laughlin Wellenfunktion . . . . .	18
2.3.3	Verallgemeinerung: CF Theorie . . . . .	20
2.3.4	Grundzustände und ihre Anregungen . . . . .	23
2.4	Zusammenfassung . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Theorie der Dunkelzustandspolaritonen des langsamen Lichts</b>	<b>27</b>
3.1	Grundgleichungen der Quantenoptik . . . . .	27
3.1.1	Kleine Anregungsdichten und HP-Approximation . . . . .	28
3.2	Langsames Licht . . . . .	29
3.2.1	Transversale Polaritonenmasse . . . . .	30
3.3	Effektives Magnetfeld für DZPs . . . . .	31
3.4	Rydberg-Rydberg Wechselwirkungen für DZP . . . . .	32
3.4.1	Rydberg-Blockade . . . . .	33
3.5	Zusammenfassung . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Exakte Diagonalisierung kleiner Systeme</b>	<b>35</b>
4.1	Vielteilchen Matrixelemente . . . . .	35
4.1.1	Pseudopotentiale . . . . .	35
4.2	Yrast-Spektren und prominente FQHE Zustände . . . . .	37
4.2.1	Inkompressible Grundzustände . . . . .	38
4.2.2	Bulk-Anregungen . . . . .	39

4.2.3	Rand-Anregungen . . . . .	40
4.3	Zusammenfassung . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Abschätzung der Anregungslücken</b>	<b>43</b>
5.1	Grundzustandsenergie der Laughlin-Flüssigkeit . . . . .	43
5.1.1	Korrelationsfunktionen . . . . .	43
5.1.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	45
5.2	“Neutrale“ Anregungen . . . . .	47
5.2.1	GMP-Theorie . . . . .	47
5.2.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	50
5.3	”Geladene“ Anregungen . . . . .	53
5.3.1	Definition der Anregungslücke . . . . .	53
5.3.2	Theoretische Berechnung . . . . .	56
5.3.3	Numerische Ergebnisse . . . . .	65
5.4	Zusammenfassung . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Kristalline Grundzustände</b>	<b>73</b>
6.1	Nicht-korrelierter Wigner-Kristall . . . . .	73
6.1.1	Vergleich mit der Laughlin-Flüssigkeit . . . . .	75
6.1.2	Korrelierter Wigner-Kristall . . . . .	76
6.2	Numerische Ergebnisse . . . . .	77
6.2.1	Numerisches Phasendiagramm . . . . .	78
6.2.2	Kleine Füllung . . . . .	78
6.2.3	Mittlerer Blockaderadius . . . . .	80
6.2.4	Großer Blockaderadius . . . . .	83
6.3	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Physik am Rand</b>	<b>85</b>
7.1	Randanregungen . . . . .	85
7.2	Effekte äußerer Fallenpotentiale . . . . .	87
7.2.1	Harmonisches Potential . . . . .	87
7.2.2	Landau Stufenpotential . . . . .	89
7.3	Zusammenfassung . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Quantenoptische Realisierung des FQHE mit DZPs</b>	<b>97</b>
8.1	Setup und realistische Zahlen . . . . .	97
8.1.1	Korrekturterme in realistischen Setups . . . . .	99
8.1.2	Zugang zum passenden $L_z$ -Sektor . . . . .	102

8.2	Ausblick: Offene FQHE Systeme . . . . .	102
8.2.1	Realisierung der Laughlin Zustände . . . . .	103
8.2.2	Realisierung von Quasiloeh-Anyonen mit DZP . . . . .	106
8.3	Zusammenfassung . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>109</b>
9.1	2D Physik und Anyonische Braiding Statistik . . . . .	109
9.2	Korrelationsfunktionen . . . . .	110
9.3	Yrast-Spektren in Scheiben- und Kugelgeometrie . . . . .	110
9.3.1	Scheibengeometrie . . . . .	111
9.3.2	Kugelgeometrie . . . . .	111
9.4	Effekte durch endlichen Blockade-Radius . . . . .	112
9.4.1	Abschätzung der Korrekturterme . . . . .	114
9.4.2	Höhere LL . . . . .	115
9.5	Ein-Moden Näherung in der GMP Theorie . . . . .	115
9.6	Pseudopotentiale auf der Sphäre . . . . .	116
9.7	Quasiloeh Anregungslücke für $r^{-\gamma}$ - Wechselwirkungen . . . . .	117
9.8	Quasiloeh Korrelationsfunktionen im Fall $\nu = 1$ . . . . .	118
9.9	Quasiloeh Korrelationsfunktionen im Fall $\nu = 1/4$ . . . . .	119
9.10	Hinweis auf den Pfaffian oder Anti-Pfaffian Zustand bei $\nu = 1$ . . . . .	121
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>133</b>



# 1 Einleitung

Im Jahre 1980 untersuchte Klaus von Klitzing den Hall-Effekt kalter, quasi-zweidimensionaler Halbleiterelemente in extrem starken Magnetfeldern. Die Bandstruktur der Elektronen besteht unter solchen Umständen aus stark entarteten Landau-Leveln, welche durch die Zyklotronenergie voneinander getrennt sind. In diesen Systemen entdeckte von Klitzing den *integralen Quanten-Hall-Effekt* (IQHE): Der Hall-Widerstand ist in Vielfache von  $e^2/h$  quantisiert [76].

Diese Quantisierung lässt sich dadurch erklären, dass nur eine feste  $N$ -Zahl der Landau-Level besetzt ist. Zwischen ihnen existieren außerdem lokalisierte Zustände, die nicht zum Transport und damit auch nicht zum Hall-Widerstand beitragen. Wegen der *fermionischen* Statistik der Elektronen gilt das *Pauli-Prinzip*, so dass die beobachteten Grundzustände inkompressibel sind.

Obwohl die Experimentatoren damals, gemessen an heutigen Standards, sehr unreine Halbleiter verwendeten, wurde gefunden dass die relative Genauigkeit der Quantisierung mit  $\sim 10^{-5}$  extrem groß ist. Es stellte sich heraus, dass dafür *topologische* Eigenschaften der Landau-Level Bandstruktur verantwortlich sind. Die Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts hat so zu einer neuen, topologischen Klassifizierung von Grundzuständen geführt [71].

Im Jahre 1982 untersuchten Tsui, Stormer und Gossard Quanten-Hall-Systeme im extremen Quanten-Limit, in denen nur das unterste Landau-Level besetzt ist. Sie entdeckten den *fraktionalen Quanten-Hall-Effekt* (FQHE): Der Hall-Widerstand nimmt präzise fraktionale Vielfache (z.B.  $1/3, 1/5, \dots$ ) von  $e^2/h$  an [73]. Laughlin konnte daraufhin die beobachteten Widerstandswerte durch den Effekt der repulsiven Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen theoretisch erklären [45]. Folgende Arbeiten von Jain führten zur allgemeinen Theorie der *Komposit-Fermionen* [38]. Sie zeigt, dass wechselwirkende Teilchen im untersten Landau-Level Mutationen durchführen können: sie verhalten sich - je nach Stärke des Magnetfeldes - wie Bosonen oder wie Fermionen in einem reduzierten effektiven Magnetfeld.

Verbunden mit der Mutation der Teilchen ändert sich auch die Physik der elementaren Anregungen verschiedener Grundzustände. Für gewöhnliche dreidimensionale Quantensysteme gilt das Spin-Statistik-Theorem, das eine eindeutige Verknüpfung zwischen Spin und Quantenstatistik relativistischer Felder herstellt. Für eindimensionale Quantensysteme ist andererseits bekannt, dass nur eine Sorte von Anregungen existiert. So kann für Punktwechselwirkungen aus jeder bosonischen explizit eine zugehörige fermionische Wellenfunktion konstruiert werden [15]. In zwei Dimensionen ist die allgemeinste Quantenstatistik aus topologischen Gründen *anyonisch*: werden zwei Teilchen vertauscht, so ändert sich die Wellenfunktion um einen Phasenfaktor  $e^{i\alpha}$ , wobei  $\alpha$  eine beliebige  $\mathbb{R}$ -

Zahl sein kann. Besitzen die Teilchen zusätzlich interne Freiheitsgrade, so sind auch *nicht-abelsche* Anyonen denkbar: Das Vertauschen zweier Teilchen führt zu einem (nicht-trivial) operatorwertigen, unitären Faktor  $\hat{U}$ . In FQHE-Systemen können Zustände mit solchen Anregungen gefunden werden [51], und es gibt Vorschläge, wie ihre Statistik experimentell gemessen werden kann [12]. Sie ermöglichen prinzipiell die Konstruktion eines universellen *topologischen Quantencomputers* (für einen Review siehe [54]).

Um die eben erläuterten neuen physikalischen Prinzipien zu bestätigen und nutzen zu können, sind experimentelle Realisierungen der FQHE- Zustände nötig. Daher soll im Rahmen dieser Arbeit nach einer quantenoptischen Version des FQHE gesucht werden, in der die Elektronen durch Photonen ersetzt werden. Die Eigenschaften freier Photonen müssen dafür jedoch drastisch verändert werden.

Die Propagationseigenschaften von Licht können durch die Wechselwirkung mit Materie modifiziert werden. In einem einfachen zwei-Niveau System stellt sich allerdings das Problem, dass entweder die Kopplung schwach und der Zerfall klein oder umgekehrt die Kopplung stark und der Zerfall groß ist. Kohärent getriebene drei-Niveau Systeme mit zwei metastabilen Zuständen stellen eine faszinierende Lösung dieses Problems dar. Durch die Kopplung an ein Kontrollfeld bildet sich ein schwach zerfallender Dunkelzustand aus, was zum Effekt der elektromagnetisch induzierten Transparenz (EIT) führt [32]. Die Propagationseigenschaften von Licht in einem solchen Kopplungsschema lassen sich mit Hilfe bosonischer Quasiteilchen (den Dunkelzustandspolaritonen, DZP) verstehen [23, 24]. Durch Variation des Kontrollfeldes können sie einfach manipuliert werden, es besteht zum Beispiel die Möglichkeit Polaritonen anzuhalten (*langsames Licht*)[61, 47]. In diesem Fall besitzen DZPs keinen photonischen, sondern nur einen Materieanteil. Folglich führt eine Rotation des atomaren Mediums zu einer Coriolis-Kraft auf die Polaritonen, welche einem effektiven Magnetfeld äquivalent ist [57]. Um quasi-2D Physik zu garantieren, beschränkt man sich z.B. durch einen umgebenden optischen Resonator auf die transversale Polaritonen-Dynamik. Wie für die Analogie zum elektronischen QHE erforderlich, ist dies die Dynamik massiver 2D-Schrödinger-Teilchen [58].

Der Austausch von Elektronen mit Photonen bedeutet, dass für DZPs das Pauli-Prinzip nicht gilt und damit kein integraler Quanten-Hall-Effekt existiert. Zusätzliche repulsive Wechselwirkungen können jedoch auch hier zu einer Mutation führen, so dass die wechselwirkenden Bosonen sich wie schwach-wechselwirkende Fermionen in einem reduzierten Magnetfeld verhalten. Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt existiert also für Bosonen. Die starken repulsiven Wechselwirkungen können durch langreichweitige Van-der-Waals Potentiale zwischen Rydberg-Zuständen realisiert werden [63]. Dazu werden DZPs mit einem langlebigen Rydberg-Zustand betrachtet [59]. Es stellt sich also die Frage nach der Form der effektiven Polariton-Polariton Wechselwirkung. Damit verbunden muss geklärt werden, in welchen Parameterbereichen FQHE-Grundzustände vorliegen und ob ihre Anregungslücken im messbaren Bereich liegen. In dieser Arbeit werden vor allem die prominenten Laughlin-Zustände untersucht.



---

Verschiedene Ansätze versuchen den bosonischen FQHE in ultra-kalten Quantengasen nachzuweisen, wozu rotierende Bose-Einstein-Kondensate verwendet werden [68]. Sollte dies gelingen, so ergeben sich vielfältige Manipulationsmöglichkeiten der elementaren Anregungen. Unter anderem ist eine direkte Vermessung der anyonischen Statistik möglich [60]. Im Folgenden soll untersucht werden, ob in einer quantenoptischen Realisierung ein ebenso großes Maß an Kontrolle vorhanden ist. Es stellt sich insbesondere die Frage, wie die gewünschten Zustände präpariert werden können. Dazu kommt die Verwendung von Dunkelzuständen nichtlinearer Polaritonen- Vernichtungsoperatoren in offenen Quantensystemen in Frage.



## 2 Theorie des Fraktionalen Quanten-Hall-Effekts

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie des fraktionalen Quanten-Hall-Effekts (FQHE) gegeben. Dazu werden zunächst die relevanten Einteilchenzustände (Landau Level) diskutiert, die in verschiedenen Geometrien unterschiedliche Darstellungen besitzen. Für diese Arbeit sind insbesondere die Scheiben- sowie die Kugelgeometrie von Interesse. Im Anschluss wird gezeigt, wie mit Hilfe der Landau Level der integrale Quanten-Hall-Effekt (IQHE) für Fermionen verstanden werden kann. Dieser bildet die Grundlage zum Verständnis des FQHE auf der Basis der von Jain eingeführten Komposit-Teilchen[38], die am Ende des Kapitels vorgestellt werden. Die Darstellungen in diesem Kapitel folgen in weiten Teilen [39].

### 2.1 Landau Level

Koppelt man freie Schrödingerteilchen an ein homogenes Magnetfeld  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  (mit zugehörigem Vektorpotential  $\mathbf{A}$ ), so lässt sich der zugehörige Hamiltonoperator aus dem *Prinzip der minimalen Kopplung*, d.h.  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ , ableiten (in der gesamten Arbeit wird  $\hbar = 1$  verwendet),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2. \quad (2.1)$$

Betrachtet man ein Magnetfeld parallel zur  $z$ -Achse,  $\mathbf{B} = B_\perp \mathbf{e}_z$ , und beschränkt sich o.B.d.A. auf Eichfelder mit  $A_z = 0$ , so entkoppeln die Dynamik entlang und senkrecht zur  $z$ -Achse. Derartige Lösungen haben daher die Form

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y) \cdot \phi(z). \quad (2.2)$$

Im Fall freier Schrödingerteilchen ergeben sich für  $\phi(z)$  ebene Wellen  $\phi_{k_z}$ . Betrachtet man zusätzlich ein tiefes Fallenpotential in  $z$ -Richtung, so ergeben sich lokalisierte Zustände für  $\phi(z)$ . Ist der Grundzustand in  $z$ -Richtung energetisch weiter vom ersten angeregten Zustand in  $z$ -Richtung separiert als die relevante Energie der Teilchen<sup>1</sup>, so lässt sich das System durch ein effektives 2-dimensionales Modell beschreiben.

---

<sup>1</sup>Für Elektronengase ist die relevante Energieskala durch die Temperatur gegeben,  $E \sim k_B T$ .

### 2.1.1 Allgemeine Behandlung

Für die verbleibenden Freiheitsgrade  $x, y$  lautet der effektive 2D Hamiltonoperator:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( \underbrace{(p_x - qA_x)}_{\equiv P_x}^2 + \underbrace{(p_y - qA_y)}_{\equiv P_y}^2 \right). \quad (2.3)$$

Führt man die Operatoren  $X = x + \frac{1}{qB_\perp} P_y$  sowie  $Y = y - \frac{1}{qB_\perp} P_x$  ein, so erhält man unter Verwendung von  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  und  $\mathbf{p} = -i\nabla$  die Kommutatorrelationen

$$[P_x, P_y] = iqB_\perp, \quad [X, Y] = -i\frac{1}{qB_\perp}, \quad [X, P_i] = 0, \quad [Y, P_i] = 0, \quad i = x, y. \quad (2.4)$$

$P_x$  und  $P_y$  sowie  $X$  und  $Y$  bilden also jeweils ein Paar konjugierter Variablen. Die Größen  $X, Y$  haben keinen Einfluss auf die Energie des Teilchens und sie können als Leitzentrums- Koordinaten (“guiding center“) interpretiert werden. Die Variablen  $P_x$  und  $P_y$  bilden einen harmonischen Oszillator und können als Relativkoordinaten interpretiert werden. Geht man über zu den zugehörigen Oszillator-Leiteroperatoren,

$$\hat{a} \equiv i\frac{\ell_B}{\sqrt{2}}(P_x + iP_y), \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \ell_B^2 = \frac{1}{qB_\perp}, \quad (2.5)$$

so hat der Hamiltonoperator die einfache Form

$$\mathcal{H} = \omega_c \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + E_{k_z}, \quad \omega_c = \frac{qB_\perp}{m}. \quad (2.6)$$

Hierbei wurden die *magnetische Länge*  $\ell_B$  und die *Zyklotronfrequenz*  $\omega_c$  eingeführt, welche die typischen Längen- und Zeitskalen des Systems darstellen. Es ist zu beachten, dass jeder Oszillatorzustand in der Relativkoordinate durch die Unabhängigkeit vom Leitzentrum unendlich oft entartet ist.  $E_{k_z}$  gibt die Energie der Bewegung entlang der  $z$ -Achse an, wobei  $k_z$  für freie Teilchen den Wellenvektor und andernfalls eine allgemeine Quantenzahl darstellt. Führt man auch für die konjugierten Variablen  $X, Y$  Leiteroperatoren ein,

$$\hat{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(X - iY), \quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1, \quad (2.7)$$

so lassen sich die Eigenzustände des Hamiltonoperators durch die zwei bosonischen Quantenzahlen  $n_a, n_b$  mit  $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n_a, n_b\rangle = n_a |n_a, n_b\rangle$  und  $\hat{b}^\dagger \hat{b} |n_a, n_b\rangle = n_b |n_a, n_b\rangle$  charakterisieren. Ein *Landau-Level* (LL)  $\{|n_a, n_b\rangle, n_b = 0, 1, \dots, \infty\}$  besteht aus vielen *Landau-sites*  $|n_a, n_b\rangle$ .

Bis hierher war die Behandlung unabhängig von der gewählten Eichung. Letztere hat wegen der allgemeinen Gültigkeit der Eichinvarianz keinen Einfluss auf das Spektrum, wohl aber auf die Form

der Einteilchen-Wellenfunktionen. Deshalb sind für verschiedene Geometrien (d.h. für verschiedene Randbedingungen) jeweils spezielle Eichungen vorzuziehen, um mit einem kleinen Basissatz auszukommen. So sollte man beispielsweise in einer Rechteckgeometrie eine Eichung wählen, die mit dem kanonischen Impuls  $p_x$  kommutiert (*Landau-Eichung*), während in einer Scheibengeometrie eine mit dem (2D) Drehimpuls  $L_z$  vertauschende Eichung (*symmetrische Eichung*) vorzuziehen ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur rotationssymmetrische Systeme betrachtet, die im Folgenden näher diskutiert werden.

### 2.1.2 Symmetrische Eichung und Fock-Darwin Level

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die sogenannte *symmetrische Eichung*

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{2} B_{\perp} r_{\perp} \mathbf{e}_{\phi}, \quad r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.8)$$

wie gewünscht ein homogenes Magnetfeld in  $z$ -Richtung liefert. Die zwei reellen Koordinaten in der  $x - y$ -Ebene lassen sich in einer komplexen, dimensionslosen Koordinate

$$z = (x + iy)/\ell_B, \quad \partial_x = \ell_B^{-1} (\partial_z + \partial_{z^*}), \quad \partial_y = i \cdot \ell_B^{-1} (\partial_z - \partial_{z^*}), \quad (2.9)$$

zusammenfassen. Die Eigenfunktionen können jetzt mit Hilfe des allgemeinen Verfahrens aus dem vorherigen Abschnitt bestimmt werden: Nachdem man aus der expliziten Form des Hamiltonoperators  $P_{x,y}$  abgelesen hat, lassen sich die Oszillator-Leiteroperatoren (2.5),(2.7) ausdrücken durch

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} z + 2\partial_{z^*} \right), \quad \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} z^* - 2\partial_z \right), \quad (2.10)$$

sowie

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} z^* + 2\partial_z \right), \quad \hat{b}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} z - 2\partial_{z^*} \right). \quad (2.11)$$

Die Bedeutung der Operatoren  $\hat{b}$  wird klar, wenn man den Drehimpuls  $L_z = x\partial_y - y\partial_x$  in den Leiteroperatoren ausdrückt,

$$L_z = (z\partial_z - z^*\partial_{z^*}) = \hat{b}^{\dagger}\hat{b} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}. \quad (2.12)$$

In einem festen Landau-Level  $n_a$  sind die Operatoren  $\hat{b}, \hat{b}^{\dagger}$  folglich die Drehimpuls-Leiteroperatoren. Es ist daher in symmetrischer Eichung üblich, anstelle der Quantenzahl  $n_b$  die Drehimpulsquantenzahl  $m$  zu verwenden. Die Basis lässt sich dann schreiben als

$$|n, m\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \quad m = -n, -n + 1, \dots, \infty, \quad L_z |n, m\rangle = m |n, m\rangle. \quad (2.13)$$

Die entarteten Grundzustände (d.h. die Zustände im untersten Landau Level, LLL <sup>2</sup>) lassen sich nun aus  $\hat{a}|0, n_b\rangle = 0$  bestimmen,

$$\left(\frac{1}{2}z + 2\partial_{z^*}\right) \psi_{0, n_b}(z, z^*) = 0. \quad (2.14)$$

Mit dem Ansatz  $\psi_{n_a, n_b} = \lambda_{n_a, n_b}(z, z^*) \cdot e^{-|z|^2/4}$  findet man daraus

$$\partial_{z^*} \lambda_{n_a, n_b}(z, z^*) = 0, \quad \text{d.h. } \lambda_{n_a, n_b} \text{ ist analytisch in } z. \quad (2.15)$$

Im LLL gilt nach (2.12)  $\hat{b}^\dagger \hat{b} = L_z = -i\partial_\varphi$  für  $z = re^{i\varphi}$ . Daraus sieht man, dass die Monome  $z^m$  gerade die Drehimpuls-Eigenfunktionen zum Eigenwert  $m$  sind. Die gesuchten Grundzustandseigenfunktionen im Ortsraum haben (nach Normierung) also die Form

$$\langle z, z^* | n_a = 0, n_b = m \rangle = \mathcal{N}_m \cdot z^m \cdot e^{-|z|^2/4}, \quad \mathcal{N}_m = (2\pi 2^m m!)^{-1/2}. \quad (2.16)$$

Höhere Landau-Level lassen sich daraus durch mehrfache Anwendung von  $\hat{a}^\dagger$  auf das LLL berechnen. Man erhält so

$$\langle z, z^* | n_a = n, n_b = m + n_a \rangle = \mathcal{N}_{n_a, n_b} \cdot z^m \cdot L_n^m \left(\frac{|z|^2}{2}\right) \cdot e^{-|z|^2/4}, \quad (2.17)$$

wobei  $L_n^m$  die assoziierten Laguerre-Polynome bezeichnen. Alle Eigenschaften der Wellenfunktionen sind in den polynomiellen Vorfaktoren enthalten, nachdem der Faktor  $e^{-|z|^2/4}$  auch zum Maß im Skalarprodukt gezählt werden kann.

Die LLL Wellenfunktionen sind in Abbildung 2.1, links gezeigt. Sie stellen jeweils Ringe mit einem Radius

$$R_m = \sqrt{2m} \ell_B \quad (2.18)$$

dar, wobei  $m$  die Drehimpulsquantenzahl ist. Daraus ergibt sich eine konstante Entartungsdichte (Anzahl der Landau-sites  $N_{\text{LLL}}$  pro Fläche),

$$\frac{N_{\text{LLL}}}{A} = \frac{1}{2\pi \ell_B^2} = \frac{N_\Phi}{A}, \quad (2.19)$$

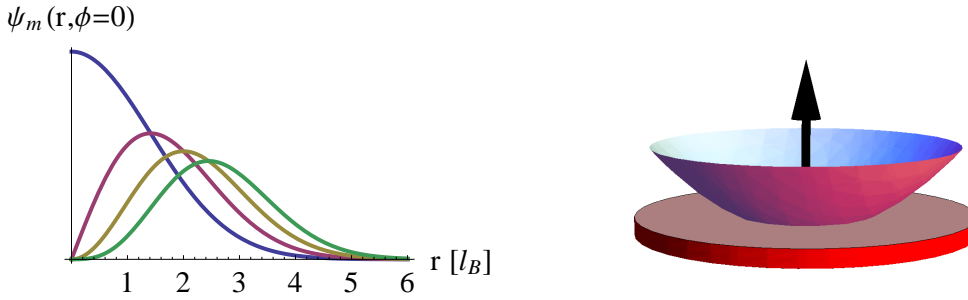
die mit der Anzahl der Flussquanten  $N_\Phi$  pro Fläche übereinstimmt.

### Fock-Darwin Level

Unter realistischen Bedingungen müssen zusätzliche Fallenpotentiale  $V_{\text{conf}}$  betrachtet werden, siehe Abbildung 2.1, rechts. In der Scheibengeometrie sind besonders rotationssymmetrische Potentiale

---

<sup>2</sup>Aus dem Englischen: "lowest Landau level".



**Abbildung 2.1:** *Links:* Die ersten LLL Wellenfunktionen,  $m = 0, 1, 2, 3$ .  $m$  gibt den Drehimpuls  $L_z$  an. *Rechts:* Schematische Darstellung des im Text geschilderten Problems: Teilchen bewegen sich auf einer Scheibe in einem homogenen Magnetfeld und bei quadratischem Einschluss.

(d.h.  $[V_{\text{conf}}, L_z] = 0$ ) von Interesse. Die Entartung der Landau-sites ist dann aufgehoben, was die Bestimmung des Einteilchenspektrums im Allgemeinen wesentlich verkompliziert. Einen Spezialfall bilden Potentiale, die keine LL miteinander koppeln, für die also gilt  $V_{\text{conf}} = V_{\text{conf}}(L_z)$ . In diesem Fall ist die Basis  $|n_a, n_b\rangle$  nach wie vor Eigenbasis. Betrachtet man zusätzliche Wechselwirkungen unter den Teilchen (die als drehimpulserhaltend angenommen werden), so ist besonders der Fall einfach, in dem das Fallenpotential linear im Drehimpuls ist,  $V_{\text{conf}} = V^{(0)} \cdot L_z$ . Die Wechselwirkung und das Fallenpotential kommutieren dann mit dem Gesamtdrehimpuls  $L_{z,\text{tot}} = \sum_j L_{z,j}$ . Daher kann das Spektrum des vollen Vielteilchenproblems mit Fallenpotential aus der Lösung ohne Fallenpotentiale bestimmt werden.

Für Systeme wie z.B. kalte Gase [78] [75], in denen das Eichpotential durch Rotation erzeugt wird, ist ein quadratisches Fallenpotential

$$V_{\text{conf}}(|z|) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 |z|^2 \quad (2.20)$$

relevant. Es liegt typischerweise durch unvollständig bzw. überkompensierte Zentrifugalkräfte vor. Es gilt dann zwar  $[V_{\text{conf}}, L_z] = 0$ , jedoch werden verschiedene Landau Level miteinander gekoppelt. Trotzdem lässt sich das Einteilchenproblem exakt diagonalisieren, wenn man den Hamiltonoperator geschickt umformt [17]. Ohne Fallenpotential kann geschrieben werden

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \omega_c \left( -\nabla_{\perp}^2 + \frac{r^2}{4} - L_z \right), \quad (2.21)$$

wobei Längen in Einheiten von  $\ell_B$  verwendet wurden. Addiert man nun das quadratische Fallenpotential und ändert die verwendeten Längeneinheiten gemäß

$$\ell_B^2 = \frac{1}{m\omega_c} \rightarrow \ell_c^2 = \frac{1}{m\Omega}, \quad \Omega^2 = \omega_c^2 + 4\omega_0^2, \quad (2.22)$$

so erhält man

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Omega \left( -\nabla_{\perp}^2 + \frac{r^2}{4} - L_z \right) + \frac{\Omega - \omega_c}{2} L_z. \quad (2.23)$$

Ein Vergleich des ersten Terms mit (2.21) zeigt, dass dieser Hamiltonoperator diagonal in den LL-Operatoren  $\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}$  ist, wenn zu deren Definition  $\ell_c$  anstelle von  $\ell_B$  verwendet wird. Der zweite Term stellt ein zusätzliches Fallenpotential dar, das linear in  $L_z$  ist und damit wie oben diskutiert zur einfachsten Klasse von Fallenpotentialen zählt. Das Spektrum dieses Operators hat die Form

$$E_{n_a, n_b} = \Omega \left( n_a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Omega - \omega_c}{2} (n_b - n_a). \quad (2.24)$$

### 2.1.3 Sphärische Geometrie

Um Randeffekte zu minimieren, wurde von Haldane das Modell der sphärischen Geometrie vorgeschlagen [31]. Dazu wird ein magnetisches Monopolfeld<sup>3</sup> betrachtet, welches gleichförmig die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $R$  durchdringt. Auf der Kugeloberfläche existieren LL, die durch eine stereografische Projektion mit denen auf der Scheibe zusammenhängen.

Der Hamiltonoperator auf der Sphäre hat die Form

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mR^2} \mathbf{\Lambda}^2, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{R} \times (-i\nabla - q\mathbf{A}), \quad (2.25)$$

wobei das Vektorpotential als

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{qR} \cot \theta \mathbf{e}_{\phi} \quad (2.26)$$

gewählt werden kann.  $2Q \in \mathbb{Z}$  gibt dabei den magnetischen Fluss durch die Oberfläche in Einheiten des Dirac Flussquants  $\Phi_D = \frac{h}{q}$  an, d.h. es gilt

$$R^2 = \frac{2Q}{4\pi B_{\perp}} \Phi_D = Q\ell_B^2. \quad (2.27)$$

Führt man den Operator  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}/R$  ein, so lassen sich folgende Kommutatorrelationen zeigen:

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = i\epsilon_{ijk} (\Lambda_k - Q\Omega_k), \quad [\Lambda_i, \Omega_j] = i\epsilon_{ijk} \Omega_k. \quad (2.28)$$

Der Operator  $\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda} + Q\mathbf{\Omega}$  genügt dann einer Drehimpulsalgebra,

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.29)$$

---

<sup>3</sup>In Maxwells Gleichungen der Elektrodynamik kommen in der Natur keine magnetischen Monopole vor, sie sind aber grundsätzlich denkbar. So können für kalte Gase effektive magnetische Felder mit Monopolkomponenten beispielsweise durch geschickte Laserkopplung realisiert werden [66].



Der Hamiltonoperator lässt sich durch  $\mathbf{L}^2$  ausdrücken, wenn man die (aus der Geometrie folgende) Identität  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$  verwendet,

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{L}^2 - Q^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{\omega_c}{2Q} (\mathbf{L}^2 - Q^2). \quad (2.30)$$

Die LL auf der Sphäre entsprechen also den Eigenzuständen von  $\mathbf{L}^2$ . Dies sind die sogenannten *monopole-harmonics*,  $Y_{Q,l,m}$  [80], und es gilt

$$L_z Y_{Q,l,m} = m Y_{Q,l,m}, \quad \mathbf{L}^2 Y_{Q,l,m} = l(l+1) Y_{Q,l,m}. \quad (2.31)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass  $\mathbf{L}$  nicht dem gewöhnlichen Drehimpulsoperator aus der Quantenmechanik entspricht, sondern durch die Monopolstärke  $Q$  modifiziert ist. Dies führt auch zu modifizierten Bedingungen für die Quantenzahlen  $l, m$ . Für die Eigenzustände  $Y_{Q,l,m}$  von  $\mathbf{L}^2$  und  $L_z$  gilt:

$$L_z Y_{Q,l,m} = -i \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{Q,l,m}(\phi, \vartheta) = m Y_{Q,l,m}(\phi, \vartheta) \quad \Rightarrow \quad Y_{Q,l,m}(\phi, \vartheta) \sim e^{im\phi} f(\vartheta). \quad (2.32)$$

Für  $Q = 0$  folgt aus der Eindeutigkeit der Wellenfunktion, dass  $m \in \mathbb{Z}$ . Für das verwendete Vektorpotential liegen aber bei  $\vartheta = 0, \pi$  zwei Singularitäten vor, jeweils mit einem magnetischen Fluss  $Q \cdot \Phi_D$ . Daher muss die bei einer Umrundung eines Pols aufgesammelte Phase  $m+Q$  ganzzahlig sein, d.h. der Aharonov-Bohm Anteil  $Q$  muss berücksichtigt werden [1]. Als zweite Bedingung findet man aus  $\langle \mathbf{A}^2 \rangle \geq 0$ , dass  $l \geq |Q|$ . Insgesamt ergibt sich also

$$l = |Q|, |Q| + 1, |Q| + 2, \dots, \quad m = -l, \dots, l, \quad 2Q \in \mathbb{Z}, \quad E_{Q,l,m} = \frac{\omega_c}{2Q} (l(l+1) - Q^2), \quad (2.33)$$

und  $l = |Q|$  entspricht dem LLL.

### Spinor Koordinaten

Um die Physik auf der Sphäre mit der auf der Scheibe zu verknüpfen, werden neue *Spinor Koordinaten* eingeführt [31],

$$u = \cos(\vartheta/2) e^{i\phi/2}, \quad v = \sin(\vartheta/2) e^{-i\phi/2}. \quad (2.34)$$

Die LLL-Wellenfunktionen können dann geschrieben werden als

$$Y_{|Q|,|Q|,m} = \mathcal{N}_{|Q|,|Q|,m} \cdot v^{Q-m} \cdot u^{Q+m}, \quad (2.35)$$

wobei  $\mathcal{N}_{|Q|,|Q|,m}$  einen Normierungsfaktor darstellt. Identifiziert man  $v/u \equiv z$ , so erhält man  $Y_{|Q|,|Q|,m} \sim u^{2Q} z^{Q-m}$ . Die funktionale  $z$ -Abhängigkeit ist demnach die der LLL-Wellenfunktionen

in der Scheibengeometrie. Dieser Zusammenhang wurde von Fano allgemeiner formuliert [19]: Eine LLL-Wellenfunktion

$$\psi(z, z^*) = \mathcal{N} \cdot \lambda(z) e^{-|z|^2/4}, \quad \lambda(z) = \sum_{m=0}^{m_{max}} c_m z^m \quad (2.36)$$

in der Scheibengeometrie entspricht einer LLL-Wellenfunktion

$$\psi(u, v) = \mathcal{N} \cdot p(u, v), \quad p(u, v) = \sum_{k=0}^{2Q} c_k u^{2Q-k} v^k = u^{2Q} \lambda\left(\frac{v}{u}\right) \quad (2.37)$$

in der Kugelgeometrie.  $\mathcal{N}$  steht dabei jeweils für *unterschiedliche* Normierungsfaktoren. Die Abbildung ist nicht isometrisch, d.h. die Norm bleibt nicht erhalten.

Auf diese Weise lassen sich nun insbesondere Vielteilchen-Wellenfunktionen zwischen den verschiedenen Geometrien übersetzen. Als Beispiel sei hier die Transformation des häufig benötigten *Jastrow-Faktors* erwähnt:

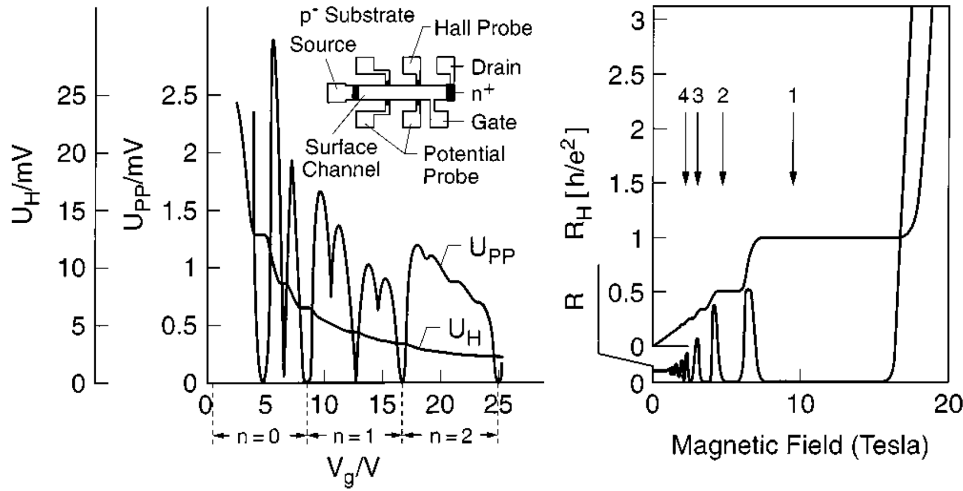
$$\prod_{j < k} (z_j - z_k) \cdot e^{-\sum_j |z_j|^2/4} \rightarrow \prod_{j < k} (u_j v_k - u_k v_j). \quad (2.38)$$

## 2.2 IQHE für Fermionen

1980 untersuchte Klaus von Klitzing quasi-zweidimensionale (spinpolarisierte) Elektronensysteme bei niedrigen Temperaturen und unter starkem magnetischen Einschluss ( $k_B T \lesssim \omega_c$ ) [76]. Die relevanten Einteilchen-Wellenfunktionen unter diesen Bedingungen sind die am Anfang dieses Kapitels vorgestellten LL. Sie werden bei niedrigen Temperaturen der Reihe nach aufgefüllt. Um das System zu charakterisieren, wird neben der Temperatur außerdem der *Füllfaktor*

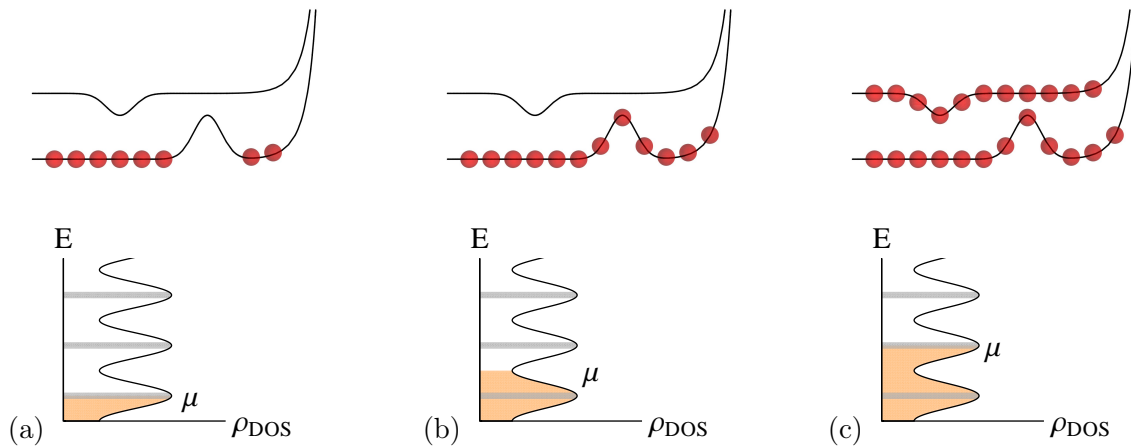
$$\nu = \frac{N}{N_\Phi} \quad (2.39)$$

benötigt. Dabei ist  $N$  die Teilchenzahl und  $N_\Phi$  der Entartungsgrad eines LL. Dieser ist (wegen der Fallenpotentiale am Rand) in realistischen Systemen endlich,  $N_\Phi < \infty$ . Durch die Variation des Magnetfeldes konnte von Klitzing den Füllfaktor ändern, da sich die Größe  $2\pi\ell_B^2$  der Zyklotronorbits und damit  $N_\Phi$  ändert. Gleichzeitig wurden der longitudinale Widerstand  $R_{xx} = \frac{U_x}{I_x}$  der Probe sowie der Hall-Widerstand  $R_{xy} = \frac{U_y}{I_x}$  gemessen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Der Hall Widerstand nimmt in der Umgebung ganzzahliger Füllfaktoren  $\nu = n = 1, 2, 3, \dots$  quantisierte Werte  $R_H = \frac{h}{ne^2}$  an, während an diesen Stellen der longitudinale Widerstand verschwindet. Weiterhin wurde festgestellt, dass der Wert des quantisierten Widerstandes extrem robust gegenüber der Form und Art des Elektronensystems ist. Insbesondere hat auch die Stärke von Störstellen keinen Einfluss auf den gemessenen Hall-Widerstand.



**Abbildung 2.2:** *Links:* Original Messergebnisse der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts von Klaus von Klitzing. *Rechts:* Vergleichbare Messungen an einem anderen Halbleiterelement. Die Zahlen im Bild zeigen die zum jeweiligen Magnetfeld gehörigen Füllfaktoren. Die Bilder sind aus Stormers Nobelpreis Vorlesung entnommen[70].

Trotzdem ist zur Erklärung der ausgeprägten Plateaus die Existenz von Störstellen wichtig. Ohne diese könnten die Elektronen innerhalb eines entarteten LL streuen und dabei einen endlichen longitudinalen Widerstand  $R_{xx} \neq 0$  erzeugen. Der wesentliche Effekt der Störstellen ist die Existenz lokalisierter Zustände mit Energien innerhalb der Zyklotronenergielücke. Das heißt, die Zustandsdichte  $\rho_{DOS}$  setzt sich aus *ausgedehnten* Zuständen bei den Energien  $(n + 1/2)\omega_c$  sowie lokalisierten Zuständen dazwischen zusammen, siehe Abbildung 2.3. Anschaulich entsprechen diese lokalisierten Zustände Driftbahnen der Teilchen entlang der Äquipotentiallinien der Störstellenpotentiale. Eine Variation des Magnetfeldes kann nun als eine Änderung des chemischen Potentials  $\mu$  interpretiert werden. Um ganzzahlige Füllung herum können dann entweder lokalisierte Quasiteilchen-Zustände im nächst höheren oder lokalisierte Quasiloche-Zustände im selben LL angeregt werden. Um zu verstehen, weshalb der longitudinale Widerstand um ganzzahlige Füllung herum verschwindet, ist es nun entscheidend sich klar zu machen, dass nur Randzustände zum Transport beitragen können. Anschaulich liegt das daran, dass die Teilchen in ausgedehnten Zuständen Zyklotronorbits folgen und somit keinen Beitrag zum Nettotransport leisten. Andererseits sind Randzustände aber *chiral*, d.h. auf entgegengesetzten Seiten der Probe verläuft der Transport in entgegengesetzten Richtungen. Aus der räumlichen Trennung von vorwärts und rückwärts propagierenden Zuständen ergibt sich nun eine stark reduzierte Rückstreuungswahrscheinlichkeit. Entscheidend ist dabei, dass zwar in die lokalisierten Zustände gestreut werden kann, diese aber nicht zum Transport beitragen. Rückwärtsstreuung ist also (bei ausreichend großer räumlicher Trennung) nur durch die Besetzung höherer ausgedehnter Zustände möglich. Letztere liegen bei ganzzahliger Füllung energetisch um die *Mobilitätslücke*  $\Delta \approx \frac{1}{2}\omega_c$  über der Fermienergie. Der Restwiderstand  $R_{xx}$  durch diese thermische



**Abbildung 2.3:** Obere Reihe: anschauliche Darstellung der ersten beiden LL. Störstellen- und Randpotentiale sind schematisch berücksichtigt. Untere Reihe: Zugehörige Zustandsdichten  $\rho_{\text{DOS}}$ . Orange: Von Fermionen besetzter Energiebereich. Grau: Ausgedehnte Zustände, andere Zustände sind lokalisiert. (a) Im untersten LL sind die Zustände bis einschließlich den ausgedehnten Zuständen gefüllt. (b) Das unterste LL ist vollständig gefüllt, im nächsten LL sind lokalisierte Zustände unbesetzt. (c) Das zweite LL ( $n = 1$ ) ist bis zu den ausgedehnten Zuständen gefüllt.

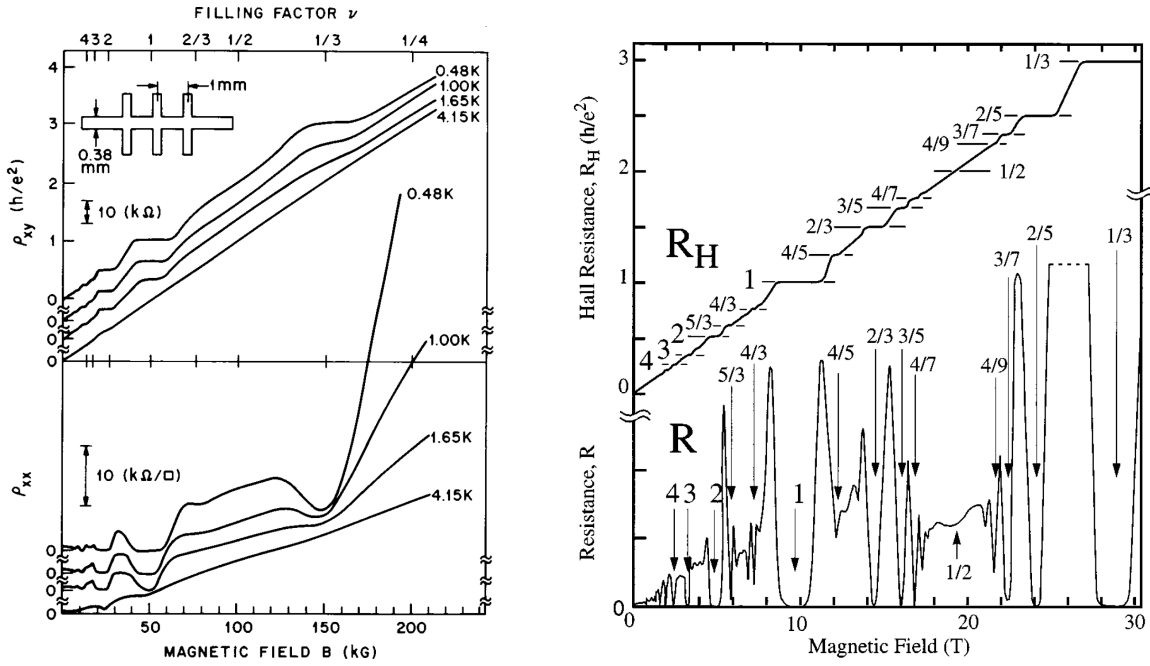
Besetzung skaliert also wie  $e^{-\Delta/k_b T}$ . Erhöht (erniedrigt) man das chemische Potential soweit, dass die ausgedehnten Zustände besetzt werden können, so wird Rückwärtsstreuung durch diese stark entarteten Zustände möglich. Die Mobilitätslücke verschwindet also hier und  $R_{xx}$  nimmt einen (temperaturabhängigen) endlichen Wert an.

Die Quantisierung des Hall-Widerstandes zu verstehen ist ein wenig schwieriger, und sie soll hier daher nicht im Detail diskutiert werden. Die Idee ist wieder, dass lokalisierte Zustände nicht zum Transport beitragen können. Laughlin konnte mit Hilfe der *Hall-Balken*-Geometrie, bei der ein zweidimensionales Band um einen Zylinder gewickelt wird, ein elegantes Argument für die Quantisierung des Hall-Widerstandes geben [44]. Letzterer wird dabei mit der Reaktion des Systems auf eine Erhöhung des magnetischen Flusses in Verbindung gebracht, welche unter Verwendung der Eichsymmetrie berechnet werden kann. Thouless et. al. (TKNN) konnten daraufhin durch eine mikroskopische Berechnung von  $R_{xy}$  in der Theorie der linearen Antwort<sup>4</sup> eine *topologische* Begründung für die exakte Quantisierung liefern [71].

## 2.3 FQHE und CF Theorie

In der Zeit nach der Entdeckung des IQHE entwickelten die Experimentatoren immer reinere Halbleiterelemente, mit denen der extreme Quantenlimit, d.h. Füllungen  $\nu < 1$ , untersucht werden konnte. Die einzigen relevanten Energieskalen in diesem Bereich sind die Wechselwirkungsstärke sowie die zusätzlichen Störstellenpotentiale. 1981 gelang Tsui und Störmer [73] die erste Vermessung

<sup>4</sup>Englisch: “linear response theory”. Damit erhält man die Kubo-Greenwood-Formel.



**Abbildung 2.4:** Links: Original Messergebnisse der Entdeckung des FQHE durch Tsui und Stormer. Man erkennt neben den Plateaus bei ganzzahliger Füllung  $\nu = n$  die Formation eines weiteren Plateaus um  $\nu = 1/3$ . Rechts: Die gleiche Messung wie links an einer moderneren Probe mit weiter gesteigerter Elektronenmobilität. Man erkennt die Formation vieler FQHE Zustände. Die Bilder sind aus Stormers Nobelpreis Vorlesung entnommen[70].

an einer von Gossard gefertigten, hochreinen Probe. Wegen der Dominanz der Wechselwirkungseffekte erwartete man damals für  $\nu < 1$  die Bildung eines Wigner-Kristalls im LLL [48], doch die Messergebnisse (s. Abbildung 2.4, links) sprachen dagegen. Bei einer Füllung  $\nu = 1/3$  wurde ein Einbruch des longitudinalen Widerstandes  $R_{xx}$  sowie die Ausbildung eines Plateaus in  $R_{xy}(B)$  gefunden, genau wie er beim IQHE beobachtet wird. Messungen an noch reineren Proben lieferten in den folgenden Jahren eine Vielzahl an Quanten-Hall-Zuständen bei verschiedenen fraktionellen Füllungen, siehe Abbildung 2.4, rechts. Die Ausbildung dieser Zustände muss ein Effekt der Elektron-Elektron Wechselwirkung sein, nachdem diese die einzig relevante Energieskala darstellt.

### 2.3.1 Das FQHE Problem

Betrachtet man den Fall großer Zyklotronenergie  $\omega_c \gg E_{\text{int}}$  gegenüber kleinen Wechselwirkungsenergien  $E_{\text{int}}$  pro Teilchen, so lässt sich der Hamiltonoperator auf das unterste LL projizieren. Dazu wird der Projektionsoperator

$$\mathcal{P}_{LLL} = \sum_{m=0}^{\infty} |n=0, m\rangle \langle n=0, m| \quad (2.40)$$

eingeführt. Im projizierten Hamiltonoperator bleibt dann kein kinetischer Beitrag übrig. Die Gültigkeit dieser Projektion wurde für ultrakalte, rotierende bosonische Gase (die mit dem hier betrachteten System vergleichbar sind) überprüft [52]. Ohne Einschränkung sollen im weiteren alle Energien relativ zur Zyklotron-Grundzustandsenergie  $\omega_c/2$  gemessen werden. Ohne Störstellen existiert also nur eine Energieskala: die der Wechselwirkung. Der projizierte Hamiltonoperator

$$\mathcal{P}_{LLL} (\mathcal{H}_{\text{kin}} + \mathcal{H}_{\text{int}}) \mathcal{P}_{LLL} = \mathcal{P}_{LLL} \int d^2z d^2z' \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}^\dagger(z') V(|z - z'|) \hat{\Psi}(z') \hat{\Psi}(z) \mathcal{P}_{LLL} \quad (2.41)$$

beschreibt also ein echtes - und ein reines - Vielteilchen-Problem. Um Instabilitäten zu vermeiden, wird die Wechselwirkung als repulsiv angenommen, was für Elektronen auch offensichtlich der Fall ist.

Analoge Wechselwirkungsterme können oft störungstheoretisch im Rahmen einer Landau-Fermi Flüssigkeits-Theorie behandelt werden, bei der die Einteilchengrößen (z.B. die Masse) durch Effekte der Wechselwirkung renormiert werden. Eine solche Behandlung ist im obigen Fall aber wegen des Fehlens eines kleinen Parameters nicht möglich. Dieser Umstand macht das FQHE Problem äußerst kompliziert, andererseits aber auch interessant, da neuartige Lösungen zu erwarten sind.

Der wichtigste Lösungsansatz zum Verständnis des FQHEs sind Variationsansätze. Laughlin gelang es 1983 den FQHE mit Hilfe einer von ihm eingeführten Vielteilchen-Wellenfunktion zu verstehen [45], wofür er zusammen mit Tsui und Stormer 1998 mit dem Nobelpreis in Physik geehrt wurde. Die erwähnte Laughlin-Wellenfunktion und ihre Verallgemeinerungen werden im Folgenden vorgestellt.

### Pseudopotentiale auf der Scheibe

Die Wechselwirkung im LLL lässt sich vollständig durch die von Haldane eingeführten *Pseudopotentiale* charakterisieren [31]. Der volle Vielteilchen-Hamiltonoperator lässt sich in zweiter Quantisierung alleine durch zwei-Teilchen Matrixelemente ausdrücken,

$$\mathcal{H} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \langle m_1, m_2 | \mathcal{H} | m_3, m_4 \rangle \hat{b}_{m_1}^\dagger \hat{b}_{m_2}^\dagger \hat{b}_{m_3} \hat{b}_{m_4}. \quad (2.42)$$

Zur Berechnung dieser zwei-Teilchen Matrixelemente führte Haldane einen Wechsel zu Relativ- und Schwerpunktskoordinaten durch,

$$Z = \frac{1}{2} (z_1 + z_2), \quad z = z_1 - z_2. \quad (2.43)$$

Da hier nur das LLL ( $n = 0$ ) von Interesse ist, werden im Folgenden die LL-Indizes nicht mehr geschrieben. Die LLL Zustände lauten dann

$$|M, m\rangle = \frac{\left(\hat{b}_R^\dagger\right)^M \left(\hat{b}_r^\dagger\right)^m}{\sqrt{M!m!}} |0, 0\rangle, \quad (2.44)$$

wobei  $\hat{b}_{R,r}^\dagger, \hat{b}_{R,r}$  die Landau-site Operatoren (2.11) für  $z \rightarrow Z, z$  sind. Die zugehörigen Wellenfunktionen sind gegeben durch

$$\psi_{M,m}(Z, z) = \tilde{\mathcal{N}}_m \cdot \tilde{\mathcal{N}}_M \cdot Z^M \cdot z^m \cdot \exp\left(-\frac{1}{4} \left( \frac{|z|^2}{\ell_r^2} + \frac{|Z|^2}{\ell_R^2} \right)\right), \quad (2.45)$$

wobei die modifizierten magnetischen Längen  $\ell_R = \ell_B/\sqrt{2}$  und  $\ell_r = \ell_B \cdot \sqrt{2}$  eingeführt wurden. Die Normierungsfaktoren sind gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{N}}_m = (2\pi\ell_r^2 2^m m!)^{-1/2} \ell_r^{-m}, \quad \tilde{\mathcal{N}}_M = (2\pi\ell_R^2 2^M M!)^{-1/2} \ell_R^{-M}. \quad (2.46)$$

Verwendet man, dass die Wechselwirkung mit  $L_z^{(z)}$  (bzgl. der Relativkoordinate) und  $L_z^{(Z)}$  (bzgl. der Schwerpunktskoordinate) kommutiert, d.h.

$$\langle M, m | \mathcal{H}_{\text{int}} | M', m' \rangle \propto \delta_{M, M'} \quad (2.47)$$

$$\langle M, m | \mathcal{H}_{\text{int}} | M', m' \rangle \propto \delta_{M'+m', M+m} \quad (2.48)$$

$$\langle m_1, m_2 | M, m \rangle \propto \delta_{m_1+m_2, M+m}, \quad (2.49)$$

so lassen sich die Matrixelemente schreiben als

$$\langle m_1, m_2 | \mathcal{H}_{\text{int}} | m_3, m_4 \rangle = \sum_m \langle m_1, m_2 | M, m \rangle \langle M, m | \mathcal{H}_{\text{int}} | M, m \rangle \langle M, m | m_3, m_4 \rangle. \quad (2.50)$$

Dabei wird  $M(m) = m_1 + m_2 - m$  angenommen. Weil außerdem die benötigten Matrixelemente  $\langle M, m | \mathcal{H}_{\text{int}} | M, m \rangle$  unabhängig von  $M$  sind, können die Pseudopotentiale definiert werden als

$$V_m \equiv \langle M, m | \mathcal{H}_{\text{int}} | M, m \rangle = 2\pi \cdot \tilde{\mathcal{N}}_m^2 \int_0^\infty dr \cdot r^{2m+1} \cdot V_{\text{int}}(r) \cdot e^{-r^2/4}. \quad (2.51)$$

Die in (2.50) benötigten Überlappe lassen sich exakt berechnen,

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | M m \rangle &= \delta_{M+m, m_1+m_2} \left( \frac{m_1! m_2!}{m! M!} \right)^{1/2} (-1)^{m+m_1} \\ &\quad 2^{-(M+m)/2} \sum_{k=0}^M \left[ \binom{M}{k} \binom{m}{m_1-k} (-1)^k \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Das Konzept der Pseudopotentiale lässt sich natürlich auch auf andere Geometrien übertragen. Für die hier verwendete Kugelgeometrie sind die wesentlichen Schritte im Anhang 9.6 zusammengefasst.

### 2.3.2 Laughlin Wellenfunktion

Laughlin (LN) machte einen Ansatz für den Grundzustand des FQHE als Produkt aus Jastrow-Funktionen [45],

$$\psi = \prod_{j < k} f(z_j - z_k) \cdot e^{-\sum_j |z_j|^2/4}. \quad (2.53)$$

Dabei wurde von einer Normierung abgesehen, was auch im Rest dieser Arbeit getan wird. Dieses Variationsproblem bezüglich  $f$  lässt sich exakt lösen. Dazu macht man sich zunächst klar, dass  $f$  ein Polynom in  $z$  sein muss, damit  $\psi$  im LLL liegt. Weiterhin gilt Gesamtdrehimpulserhaltung, d.h.  $f$  ist ein Monom  $f(z) = z^m$ . Die Quantenstatistik legt dann fest, ob  $m$  gerade (Bosonen) oder ungerade (Fermionen) gewählt werden kann. Damit kommt man zur *Laughlin-Wellenfunktion*

$$\psi_{1/m} = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \cdot e^{-\sum_j |z_j|^2/4}. \quad (2.54)$$

Die Jastrow-Faktoren  $\prod_{j < k} (z_j - z_k)$  führen dazu, dass sich die Teilchen selten nahe kommen und dass nie zwei Teilchen am gleichen Ort zu finden sind. Die letzte Aussage ist nur für Bosonen nicht-trivial. Daher ist die Laughlin-Wellenfunktion ein vielversprechender Ansatz zur Minimierung der repulsiven Wechselwirkung.

Der Laughlin Zustand  $\psi_{1/m}$  wird bei einer Füllung  $\nu = 1/m$  realisiert. Dies lässt sich am maximalen Einteilchen-Drehimpuls

$$m_{\max} = (N - 1) \cdot m \quad (2.55)$$

ablesen, der eine Systemgröße  $A = \pi R_{m_{\max}}^2$  impliziert. Mit Gleichung (2.18) folgt

$$\nu = \frac{N}{A/(2\pi\ell_B^2)} = 2\pi\ell_B^2 \cdot \frac{N}{2\pi m_{\max} \ell_B^2} = \frac{N}{(N-1)m} \xrightarrow{\text{TDL}} \frac{1}{m}. \quad (2.56)$$

Dabei steht TDL für den *thermodynamischen Limes*,  $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho = \text{konst.}$

Um den Effekt der Jastrow-Faktoren besser zu verstehen, kann die Wechselwirkungsenergie mit Hilfe der Haldane Pseudopotentiale berechnet werden. Unter Verwendung der Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion (siehe Anhang 9.2)

$$g^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{N(N-1)}{\rho^2} \int d^2 z_3 \dots d^2 z_N |\Psi[z]|^2, \quad (2.57)$$

mit der Dichte  $\rho$  lässt sich die Grundzustandsenergie pro Teilchen schreiben als

$$\frac{\langle \mathcal{H}_{\text{int}} \rangle}{N} \equiv \epsilon_0 = \rho \cdot 2\pi \int_0^\infty dr \cdot r \cdot V_{\text{int}}(r) \cdot g^{(2)}(|z_1 - z_2| = r). \quad (2.58)$$



Weil die Multiplikation einer Wellenfunktion mit einem Jastrow-Faktor ( $\psi \rightarrow \prod_{j<k} (z_j - z_k) \cdot \psi$ ) unter anderem zu einer Multiplikation von  $g^{(2)}(r)$  mit  $r^2$  führt ( $g^{(2)}(r) \rightarrow g^{(2)}(r) \cdot r^2 \cdot \dots$ ), folgt

$$g^{(2)}(r) \Big|_{\bar{\psi}} \sim r^{2m} \cdot g^{(2)}(r) \Big|_{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi \cdot \prod_{j<k} (z_j - z_k)^m. \quad (2.59)$$

Entwickelt man

$$g^{(2)}(r) \Big|_{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot r^{2n} \cdot e^{-r^2/4}, \quad (2.60)$$

so lässt sich aus (2.58) die Grundzustandsenergie von  $\bar{\psi}$  berechnen:

$$\epsilon_0 \sim \sum_n \int_0^{\infty} dr r^{2m+2n+1} c_n V_{\text{int}} e^{-r^2/4} \sim \sum_{i=n+m}^{\infty} \tilde{c}_n \cdot V_i, \quad (2.61)$$

wobei  $V_i$  die Pseudopotentiale bezeichnet. Daher führt jeder Jastrow-Faktor zur Abschirmung eines Pseudopotentials. Ist  $V_0 \gg V_m$  für  $m > 0$  (wie beispielsweise für die Coulomb Wechselwirkung), so schirmt der Laughlin-Zustand einen Großteil der Wechselwirkung ab, und folglich stellt er einen guten Variationsansatz dar.

Andererseits sind die Laughlin-Zustände  $\psi_{1/m}$  exakte  $E = 0$  Eigenzustände von beliebigen repulsiven Wechselwirkungen, für welche alle außer den ersten  $m-2+1$  Pseudopotentialen  $V_0, V_1, \dots, V_{m-2}$  verschwinden. Dies wird z.B. durch eine Modellwechselwirkung

$$V_{\text{model}}^{(m)}(r) = \sum_{\mu=2}^m \frac{\partial^{2(\mu-2)}}{\partial r^{2(\mu-2)}} \delta(r) \quad (2.62)$$

realisiert. Weil aber keine  $E = 0$  Zustände ohne diese Jastrow-Faktoren existieren, sind die Laughlin-Zustände für derartige Wechselwirkungs-Potentiale nicht-entartete Grundzustände in den entsprechenden Gesamtdrehimpuls- Sektoren

$$L_z(\text{LN}, \nu) = \frac{1}{2\nu} N(N-1). \quad (2.63)$$

Dieser Umstand wird in dieser Arbeit genutzt, um die Darstellung der Variationszustände in der für die Numerik verwendeten Basis zu erhalten. Dazu muss lediglich die Modellwechselwirkung (2.62) exakt diagonalisiert werden.

Aus (2.38) lässt sich die Laughlin-Wellenfunktion auf der Sphäre ableiten,

$$\psi_{1/m}(u_1, \dots, v_1, \dots) = \prod_{j<k} (u_j v_k - u_k v_j)^m. \quad (2.64)$$

Dieser Zustand ist rotationsinvariant bezüglich beliebiger Achsen,  $\mathbf{L}^2 \psi_{1/m} = 0$ . Dies folgt aus einer Eigenschaft der stereographischen Abbildung zwischen Polynomen auf der Scheibe und der

Sphäre, siehe Abschnitt 9.6. Es wurde gezeigt, dass hierbei translationsinvariante Polynome auf der Scheibe auf rotationsinvariante Polynome auf der Sphäre abgebildet werden [19]. Eine unmittelbare Konsequenz daraus ist, dass der Laughlin Zustand eine homogene Dichte besitzt. Im TDL folgt

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi\ell_B^2}. \quad (2.65)$$

Dabei wurde das Resultat aus der Scheibengeometrie verwendet, dass jedes Landau-site im TDL eine Fläche  $2\pi\ell_B^2$  besitzt.

### 2D-Einkomponenten-Plasma (2DOCP) Analogie

Variationsansätze für Vielteilchensysteme erfordern üblicherweise die Auswertung hochdimensionaler Integrale, was es schwierig macht Ausdrücke für die Korrelationsfunktionen im TDL zu erhalten. Laughlin erkannte, dass sich im Falle seiner Wellenfunktionen die Korrelationsfunktionen auf bekannte thermodynamische Zustandssummen von zweidimensionalen Plasmen zurückführen lassen [45]. Dafür schreibt man

$$|\psi_{1/m}|^2 = e^{-\beta\Phi} \quad \text{mit} \quad \beta = \nu, \quad \Phi = -\sum_{j<k} \frac{2}{\nu^2} \log(|z_j - z_k|) + \frac{1}{2\nu} \sum_j |z_j|^2. \quad (2.66)$$

$\Phi$  ist hier gerade die Energie des 2D-Einkomponenten-Plasmas (2DOCP). Die Coulomb- Wechselwirkung führt in 2D zu einem logarithmischen Potential. Die Wechselwirkung mit einem gleichförmigen, positiv geladenen Hintergrund liefert ein Potential  $\sim |z|^2$ . Konstante Hintergrund-Hintergrund-Korrektoren wurden dabei nicht berücksichtigt.

Mit Hilfe des 2DOCP lässt sich unter anderem zeigen, dass Laughlin Zustände im TDL eine konstante Dichte  $\rho = \frac{\nu}{2\pi\ell_B^2}$  aufweisen und dass  $g^{(2)}(r \rightarrow \infty) = 1$  gilt (d.h. es liegt eine Flüssigkeit vor) [45].

### 2.3.3 Verallgemeinerung: CF Theorie

Laughlins Wellenfunktionen lieferten den Schlüssel zum weiteren Verständnis des FQHEs, da sie zur wichtigen Verallgemeinerung - der Komposit-Fermion- (CF-) Theorie - geführt haben. Diese Theorie wurde von Jain eingeführt [38] und soll hier - der Darstellung in seinem Buch [39] folgend - vorgestellt werden.

Die Grundidee der CF-Theorie ist die Interpretation der Jastrow-Faktoren als an die Teilchen gekoppelte Flussquanten. Dazu betrachtet man beispielsweise den  $\nu = 1$  IQHE-Zustand mit einem gefüllten Landau-Level und koppelt an jedes Teilchen zwei Flussquanten. Teilchen  $i$  sieht dann ein

zusätzliches Magnetfeld in  $z$ -Richtung

$$b(z_i) = 2\Phi_D \sum_j \delta^{(2)}(z_i - z_j), \quad (2.67)$$

das durch ein Vektorpotential

$$\mathbf{a}(z_i) = \frac{1}{\pi} \Phi_D \sum_j \nabla_i \vartheta_{ij}, \quad b(z_i) \mathbf{e}_z = \nabla_i \times \mathbf{a}(z_i) \quad (2.68)$$

dargestellt werden kann. Hierbei bezeichnet

$$\vartheta_{j,k}(z_1, \dots) = i \log \left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right) \quad (2.69)$$

den Polarwinkel von  $z_j - z_k$ . Zum Beweis wird die Identität  $\nabla_{\mathbf{x}} \times \nabla_{\mathbf{x}} \vartheta(\mathbf{x}_{\perp}) = 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{\perp}) \mathbf{e}_z$  benötigt, wobei  $\mathbf{x}_{\perp}$  einen beliebigen Vektor in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{e}_z$  bezeichnet. Der Hamiltonoperator für diese Teilchen kann also geschrieben werden als

$$\mathcal{H} = \sum_j \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p}_j - q\mathbf{A}(z_j) - q\mathbf{a}(z_j) \right)^2. \quad (2.70)$$

Die neu eingeführten Flussquanten  $\sim \nabla \vartheta$  können durch eine Eichtransformation

$$\psi(z_1, \dots) = \exp \left( -2i \sum_{j < k} \vartheta_{j,k}(z_1, \dots) \right) \cdot \Phi(z_1, \dots) \equiv \prod_{j < k} \left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^2 \Phi(z_1, \dots) \quad (2.71)$$

eliminiert werden. Für  $\Phi$  gilt hierbei der alte Hamiltonoperator.

Andererseits können die neuen Flussquanten (2.67) adiabatisch von den Positionen der Teilchen entkoppelt werden, bis sich ein Zustand homogenen Magnetfeldes bildet. Nachdem der Gesamtfluss der dreifachen Größe des Ausgangsflusses entspricht, erhält man demnach einen FQHE Zustand mit Füllung  $\nu = 1/3$ . Dies ist gerade der  $\nu = 1/3$  Laughlin- Zustand. Weil angenommen wird, dass durchweg dem Grundzustand gefolgt wird, ist  $\psi$  aus (2.71) adiabatisch mit dem  $\nu = 1/3$  LN-Zustand verbunden. Vergleicht man das Ergebnis (2.71) vor diesem adiabatischen Prozess mit dem  $\nu = 1/3$  LN-Zustand danach, so findet man folgenden Effekt für die Wellenfunktionen:

$$\prod_{j < k} \left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^2 \rightarrow \prod_{j < k} (z_j - z_k)^2. \quad (2.72)$$

Auf diese Weise ist es nun gelungen eine Äquivalenz zwischen IQHE Zuständen für die *Komposit-Teilchen* (CP)  $\Phi$  (zusammengesetzt aus Flussquanten und nackten Teilchen) und Grundzuständen wechselwirkender Teilchen bei fraktionaler Füllung zu zeigen. Entscheidend ist dabei zu realisieren,

dass die Kopplung an Flussquanten zu den Jastrow-Faktoren führt, die wiederum die Wechselwirkung durch starkes Antibunching minimieren.

Mit dem oben Gesagten sollte lediglich die Grundidee der neuen Komposit-Teilchen vermittelt werden. Die Argumentation kann mit der Einführung einer Feldtheorie (Komposit-Fermion-Chern-Simons Theorie [82]) konkretisiert werden. Das oben angesprochene adiabatische Verteilen des Flusses entspricht dann einer *mean-field* Näherung vom Ginzburg-Landau-Typ. Im Folgenden können alle Wellenfunktionen aber auch einfacher als - sich als erfolgreich herausstellende - Variationsansätze verstanden werden, deren Gültigkeit auf der korrekten Behandlung der Korrelationen durch Jastrow-Faktoren beruht.

Die eigentlichen Variationsansätze können aus einer Umkehr der obigen Argumentationskette gefunden werden. Ausgehend von einem Zustand beliebig rationaler Füllung  $\nu < 1$  werden Flussquanten an die Teilchen gekoppelt. Die so entstehenden Komposit-Teilchen sind in erster Näherung *wechselwirkungsfrei* und bewegen sich in einem *reduzierten Magnetfeld*. Das System der Komposit-Teilchen ist gerade das gut verstandene IQHE System, mit der durch das reduzierte Magnetfeld bestimmten Füllung  $\nu^*$ . Das führt auf folgenden Ansatz für die FQHE-Wellenfunktionen:

$$\psi(z_1, \dots) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^\mu \Phi_{CP}(z_1, \dots). \quad (2.73)$$

Hierbei wurde die LLL-Projektion eingeführt, um energetisch große Beiträge in höheren LL zu vermeiden. Aus (2.73) lassen sich auch Aussagen über die Statistik der eingeführten  ${}^\mu\text{CP}$  Komposit-Teilchen machen. Ist  $\psi$  bosonisch, so ist  $\Phi$  fermionisch für ungerade  $\mu$  (man spricht dann von  $\mu$ -Komposit-Fermionen,  ${}^\mu\text{CF}$ ) und bosonisch für gerade  $\mu$  (man spricht dann von  $\mu$ -Komposit-Bosonen  ${}^\mu\text{CB}$ ). Für fermionisches  $\psi$  vertauschen die Rollen von geradem und ungeradem  $\mu$  entsprechend.

Mit Hilfe der CPs lassen sich die Laughlin-Zustände jetzt neu interpretieren.  $\psi_{1/m}$  beschreibt  $m^{-1}\text{CFs}$ , die das LLL vollständig füllen,

$$\Phi_{m^{-1}\text{CF}}(z_1, \dots) = \det \left( z_j^{i-1} \right)_{i,j=1,\dots,N} e^{-\sum_j |z_j|^2/4} = \prod_{j < k} (z_j - z_k) e^{-\sum_j |z_j|^2/4}. \quad (2.74)$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Vandermonde Determinante verwendet. Folglich entspricht der  $1/m$ -FQHE der nackten Teilchen dem  $\nu = 1$ -IQHE der Komposit-Teilchen. Eine alternative Interpretation geht von der Formation von  ${}^m\text{CB}$  aus, die im  $|m = 0\rangle$ -Zustand kondensieren.

Die offensichtliche Verallgemeinerung ist nun ein  $\nu \neq 1$ -IQHE für die CFs, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird. Zunächst sollen aber einige Begriffe festgelegt werden. Die Komposit-Teilchen besetzen offensichtlich selbst "Landau-Level", bei reduziertem Fluss ( $B \rightarrow B^*$ ). Diese Zustände der CPs werden  $\Lambda$ -Level ( $\Lambda\text{L}$ ) genannt (und mit  $n^*$  nummeriert), die zugehörigen Drehimpulseigenzustände heißen entsprechend  $\Lambda$ -sites (und werden mit  $l_z^*$  nummeriert). Die Füllung

der  $\Lambda$ -level wird mit  $\nu^*$  bezeichnet. Teilweise ist es außerdem sinnvoll eine zugehörige Zyklotronenergie  $\omega_c^*$  einzuführen. Beim Vergleich von Energien mit Vorhersagen der CF-Theorie ist aber Vorsicht geboten. Die CF Theorie liefert in erster Linie Ansätze für Wellenfunktionen, deren Vielteilchenenergie aus der Wechselwirkung bestimmt werden muss.

### 2.3.4 Grundzustände und ihre Anregungen

Im folgenden Abschnitt sollen einige aus der CF Theorie resultierende FQHE Modell- Wellenfunktionen hergeleitet und ihre Eigenschaften untersucht werden. Dabei wird außerdem das gängige Modell des FQHE entwickelt, mit dem sich eine Vielzahl von Füllungen, bei denen experimentell QH-Zustände gefunden wurden, verstehen lässt.

#### Jain-Sequenz

Betrachtet man den IQHE für  $\mu$ CF bei ganzzahliger Füllung  $\nu^* = n^*$  in einem positiven Magnetfeld  $B^* > 0$  (d.h.  $\mathbf{B}^*$  zeigt entlang der positiven  $z$ -Achse), so ergibt sich für die nackten Teilchen ein Gesamtfluss  $N_\Phi = (\mu + 1) \cdot N/n^*$  und damit eine Füllung

$$\nu = \frac{N}{N_\Phi} \stackrel{\text{TDL}}{=} \frac{n^*}{\mu n^* + 1}, \quad (2.75)$$

siehe Abbildung 2.5 links. Befinden sich die  $\mu$ CF in einem negativen Magnetfeld  $B^* < 0$  (d.h.  $\mathbf{B}^*$  entlang der negativen  $z$ -Achse), so ergibt sich für die nackten Teilchen ein Gesamtfluss  $N_\Phi = (\mu - 1) \cdot N/n^*$ , siehe Abbildung 2.5 rechts. Damit erhält man insgesamt eine Reihe von FQHE-Zuständen bei

$$\nu = \frac{\nu^*}{\mu \cdot \nu^* \pm 1}. \quad (2.76)$$

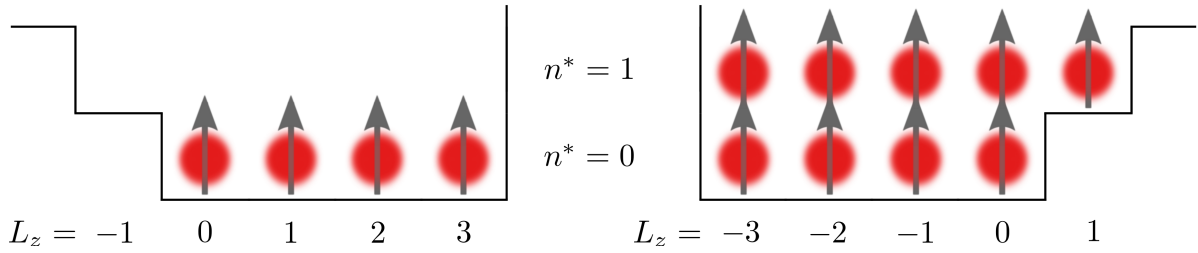
Diese Folge von Füllungen wird *Jain Sequenz* genannt [38]. Außerdem lässt sich eine Teilchen-Loch Symmetrie nutzen um weitere FQHE Zustände bei

$$\nu = 1 - \frac{\nu^*}{\mu \cdot \nu^* \pm 1} \quad (2.77)$$

zu konstruieren.

#### Quasiloche Anregungen

Mit Hilfe der CF-Theorie lassen sich auch einfach die elementaren Anregungen der FQHE- Grundzustände beschreiben. Dazu werden lediglich die elementaren Anregungen der nicht wechselwirkenden CFs benötigt. Dabei gibt es zwei Klassen von Anregungen, zum einen *geladene*, bei denen einzelne  $\Lambda$ -sites in einem sonst besetzten  $\Lambda$ -Level unbesetzt sind (Quasiloche, qh) oder bei denen einzelne  $\Lambda$ -sites in einem sonst unbesetzten  $\Lambda$ -Level besetzt sind (Quasiteilchen, qp), siehe Abbildung



**Abbildung 2.5:** Links:  ${}^\mu$ CFs füllen das unterste  $\Lambda$ -Level bei positivem  $B^*$  und beschreiben den  $\nu = 1/(\mu + 1)$  FQHE. Rechts:  ${}^\mu$ CFs füllen die untersten zwei  $\Lambda$ -Level bei negativem  $B^*$  und beschreiben den  $\nu = 2/(2\mu - 1)$  FQHE.

2.6 (links). Zum anderen existieren *neutrale* Anregungen, die als Quasiloach - Quasiteilchen Paar betrachtet werden können, siehe Abbildung 2.6 (rechts).

Ein Quasiloach wird durch eine Quantenzahl  $l_z$  beschrieben, welche die Fehlstelle eines CFs angibt. Die zugehörige CF-Wellenfunktion lässt sich mit Hilfe der verallgemeinerten Vandermonde-Determinante [34] berechnen,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{CF}}^{(n)}(z) &= \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{N-n-1} & z_1^{N-n+1} & \dots & z_1^N \\ & & & \vdots & & & \\ 1 & z_N & \dots & z_N^{N-n-1} & z_N^{N-n+1} & \dots & z_N^N \end{pmatrix} \cdot \exp \left( - \sum_j |z_j|^2 / 4 \right) \\ &= \prod_{i < j} (z_i - z_j) \cdot e_n(z_1, \dots, z_N) \cdot \exp \left( - \sum_j |z_j|^2 / 4 \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dabei wurden die *Elementarsymmetrischen Polynome*  $e_n(z_1, \dots)$  verwendet, die definiert sind als

$$e_0(z) = 1, \quad e_1(z) = \sum_{j_1} z_{j_1}, \quad e_2(z) = \sum_{j_1 < j_2} z_{j_1} z_{j_2}, \quad \dots, \quad e_N(z) = \prod_j z_j. \quad (2.79)$$

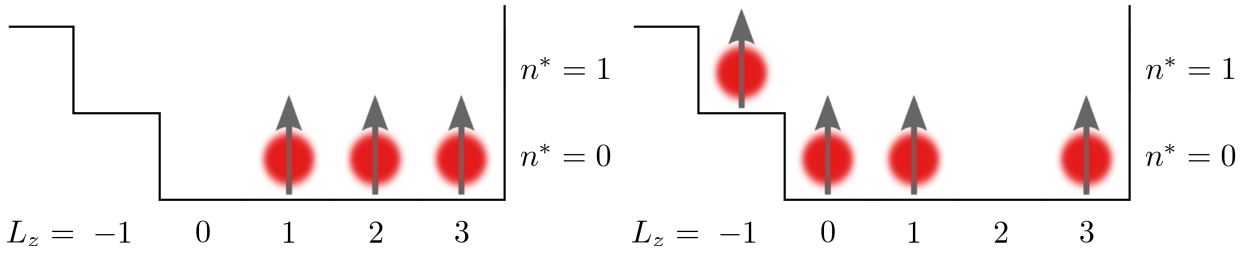
Unter Verwendung von (2.73) ergibt sich dann die  $\nu = 1/m$  Quasiloach-Wellenfunktion

$$\psi_{\text{qh},1/m}^{l_z}(z_1, \dots) = \psi_{1/m} \cdot e_{l_z}(z_1, \dots), \quad (2.80)$$

die einen  $L_{z,\text{tot}} = L_z(LN|1/m) + l_z$  Eigenzustand darstellt. Für  $l_z = N$  erhält man den einfachen *Laughlin Quasiloach-Zustand*,  $\psi_{\text{LN,qh},1/m}(z) = \prod_j z_j \cdot \psi_{1/m}(z)$  [45]. Für Systeme mit gebrochener  $L_z$ -Symmetrie lässt sich dieser Zustand verallgemeinern zu einem bei  $\xi_0$  *lokalisierten* Quasiloach-Zustand,

$$\psi_{\text{qh},1/m}(z_1, \dots | \xi_0) = \prod_j (z_j - \xi_0) \cdot \psi_{1/m}(z_1, \dots). \quad (2.81)$$

Auf analoge Weise lässt sich die CF-Quasiteilchen Wellenfunktion berechnen. Unter Ausnutzung der 2DOCP-Analogie kann gezeigt werden, dass ein Quasiloach (-Teilchen) dem Fehlen (Überschuss) ei-



**Abbildung 2.6:** *Links:*  $\mu$ CFs füllen das unterste  $\Lambda$ -Level bis auf ein  $\Lambda$ -site und beschreiben ein CF Quasiloeh-Zustand auf einem  $\nu = 1/(\mu + 1)$  FQHE-Grundzustand. *Rechts:* Das CF-Exziton ist ein CF-Quasiloeh CF-Quasiteilchen Paar auf dem  $\nu = 1/(\mu + 1)$  FQHE-Grundzustand.

nes Bruchteils von  $\nu$  Teilchen entspricht [45]. Für den elektronischen FQHE mit geladenen Teilchen bedeutet dies, dass die elementaren Anregungen eine *fraktionale Ladung*  $\pm\nu e$  tragen. Außerdem führt der fraktionale Charakter solcher Anregungen auch zu *fraktionaler braiding Statistik* (siehe Anhang 9.1). Der Statistik-Parameter dieser Anyonen ist gerade  $\theta = \pi \cdot \nu$  [4].

### CF-Exziton Anregung

Mit Hilfe der CF-Theorie lässt sich die CF-Exziton-Wellenfunktion, d.h. die Wellenfunktion eines CF-qp-qh-Paares (siehe Abbildung 2.6 (rechts)), einfach berechnen. Von besonderer Relevanz zur Identifikation des Exzitons sind hier aber in erster Linie die Exziton-Quantenzahlen. In der Scheibengeometrie sind dies  $l_z$  für das Quasiloeh und  $l'_z$  für das Quasiteilchen. Folglich bilden sich verschieden große  $L_{z,\text{tot}} = L_z(\text{GZ}) + \Delta L_z$  Unterräume, mit  $\Delta L_z = l'_z - l_z$ .  $\Delta L_z$  bezeichnet dabei die Drehimpulsdifferenz zum Grundzustand (GZ). In der Kugelgeometrie ist nur die  $\mathbf{L}^2$ -Quantenzahl relevant, nachdem  $\partial_{L_z} \mathcal{H}_{\text{int}} = 0$ .

Ausgehend von einem CF-Zustand mit  $n^* - 1$  gefüllten  $\Lambda$ Is wird ein Quasiloeh mit Drehimpuls  $Q^* + n^* - 1$  an ein Quasiteilchen mit Drehimpuls  $Q^* + n^*$  gekoppelt. Das CF-Exziton besitzt dann einen Gesamtdrehimpuls  $J_{\text{ex}} = 1, \dots, 2Q^* + 2n^* - 1$ , der wegen  $\mathbf{L}^2 \psi_{1/m} = 0$  dem Vielteilchen-Gesamtdrehimpuls des Exzitons entspricht. Weil zusätzlich gilt  $N = n^* (2Q^* + (n^* + 1)/2)$ , folgt

$$J_{\text{ex}} = 1, \dots, \frac{N}{n^*} + \frac{3}{2} (n^* - 1). \quad (2.82)$$

## 2.4 Zusammenfassung

Die Eigenzustände freier Teilchen in einem homogenen Magnetfeld sind - wegen der Translationsinvarianz - unendlich oft entartete *Landau-Level* (LL). Zur Eliminierung von Randeﬀekten kann das Modell freier Teilchen auf einer Kugeloberfläche um einen hypothetischen magnetischen Monopol betrachtet werden (*Haldanes Kugelgeometrie*). In diesem Fall ergeben sich endlich entartete Landau-Level.

Wird eine ganze Zahl dieser LL mit Fermionen gefüllt, die also dem Pauliprinzip gehorchen, so

erhält man einen inkompressiblen Grundzustand. Als Folge der Inkompressibilität ergibt sich ein quantisierter Hall-Widerstand. Dieses Phänomen wird als *integraler Quanten Hall Effekt* (IQHE) bezeichnet.

Betrachtet man repulsiv wechselwirkende Teilchen (Fermionen *oder* Bosonen) im teilweise gefüllten untersten LL (LLL), so findet man ebenfalls für gewisse rationale Füllungen einen quantisierten Hall-Widerstand. Dieser sogenannte *fraktionale Quanten Hall Effekt* (FQHE) lässt sich durch die Bildung schwach wechselwirkender *Komposit-Fermionen* (CF) verstehen, die ihrerseits den IQHE zeigen. CF sind Quasiteilchen, die aus den ursprünglichen Teilchen durch die Ankopplung an magnetische Flussquanten entstehen, wodurch die FQHE- Zustände stark korreliert sind.



# 3 Theorie der Dunkelzustandspolaritonen des langsamen Lichts

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie der *Dunkelzustandspolaritonen* (DZP) gegeben. Dazu wird zunächst das langsame Licht diskutiert, welches zur Einführung der DZP als bosonische Quasiteilchen geführt hat. Danach werden verschiedene Ein- und Vielteilchen Effekte der DZP vorgestellt (effektives Magnetfeld, Van-der-Waals Wechselwirkungen), die für eine quantenoptische Realisierung des FQHEs von Interesse sind. Dieses Kapitel gibt einen Überblick, eine vollständige Einführung kann zum Beispiel in [58] gefunden werden.

## 3.1 Grundgleichungen der Quantenoptik

Aus den quantisierten Maxwell-Gleichungen in isotropen, linearen Medien mit  $\mu = \mu_0$

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathbf{E}} &= -\partial_t \hat{\mathbf{B}}, & \nabla \times \hat{\mathbf{D}} &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{B}} &= \partial_t \hat{\mathbf{D}}, & \hat{\mathbf{D}} &= \epsilon_0 \cdot \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}}, \end{aligned}$$

findet man die zur Beschreibung der Propagation des Feldes benötigte Wellengleichung,

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \partial_t^2 \hat{\mathbf{P}}. \quad (3.1)$$

Man unterscheidet für allgemeine Felder  $\hat{\mathbf{F}}$  zwischen positiv- (Vernichter,  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}$ ) und negativ- (Erzeuger,  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}$ ) Frequenzanteilen, und kann neue Operatoren einführen,

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{F}}_+(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega t - kz)} + \hat{\mathcal{F}}_-(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega t + kz)}. \quad (3.2)$$

Der negativ-Frequenz-Anteil ist dann durch  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)} = \hat{\mathbf{F}}^{(+)\dagger}$  gegeben. Für Felder mit langsam variierender Einhüllenden  $\partial_z \hat{\mathcal{F}} \ll k \hat{\mathcal{F}}$  (SVEA) führt dies zur *paraxialen Wellengleichung*,

$$\left( \partial_t \pm c \partial_z - i \frac{c}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\mathcal{E}}_{\pm} = i \frac{\omega}{2\epsilon_0} \hat{\mathcal{P}}_{\pm}. \quad (3.3)$$

Hier wurde eine Kopplung des elektrischen Feldes an atomare Dipole durch die Polarisation  $\hat{\mathbf{P}}$  bereits berücksichtigt. Um die Bewegungsgleichungen für die atomaren Operatoren

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(j)} = |\mu\rangle_j \langle \nu| \quad (3.4)$$

zu erhalten, wird der Hamiltonian  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{em}} + \mathcal{H}_{\text{at}} + \mathcal{H}_{\text{int}}$  explizit berechnet. In Dipol-Näherung gilt  $\mathcal{H}_{\text{int}} = - \int d^3\mathbf{r} \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ . Führt man außerdem ein räumlich gemittelttes Feld der atomaren Operatoren ein (*coarse graining*),

$$\hat{\sigma}_{\mu,\nu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_V} \sum_{j \in V} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(j)}, \quad (3.5)$$

und drückt damit den Dipoloperator  $\hat{\mathbf{d}}$  aus, so erhält man

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{em}} + n \int d^3\mathbf{r} \left[ \sum_{\mu} \omega_{\mu} \hat{\sigma}_{\mu,\mu} - \sum_{\mu,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu} \mathbf{d}_{\mu,\nu} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right]. \quad (3.6)$$

$n = N/V$  ist dabei die atomare Dichte. Typischerweise führt man anschließend eine reskalierte Feldvariable

$$\hat{\mathcal{E}}_{\pm} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\omega}} \hat{\hat{\mathcal{E}}}_{\pm} \quad (3.7)$$

ein, die bosonische Kommutatorrelationen erfüllt. Außerdem wird die *Kopplungsstärke*

$$g_{\mu,\nu} = \wp_{\mu,\nu} \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0}}, \quad \wp_{\mu,\nu} = |\mathbf{d}_{\mu,\nu}| \quad (3.8)$$

eingeführt, so dass  $\wp \hat{\hat{\mathcal{E}}}_{\pm} = g \hat{\mathcal{E}}$  gilt. In den hier relevanten Fällen können anschließend die Felder  $\hat{\sigma}_{\mu,\nu}$  in langsam variierende Felder überführt werden, und die Drehwellennäherung (RWA) kann angewandt werden.

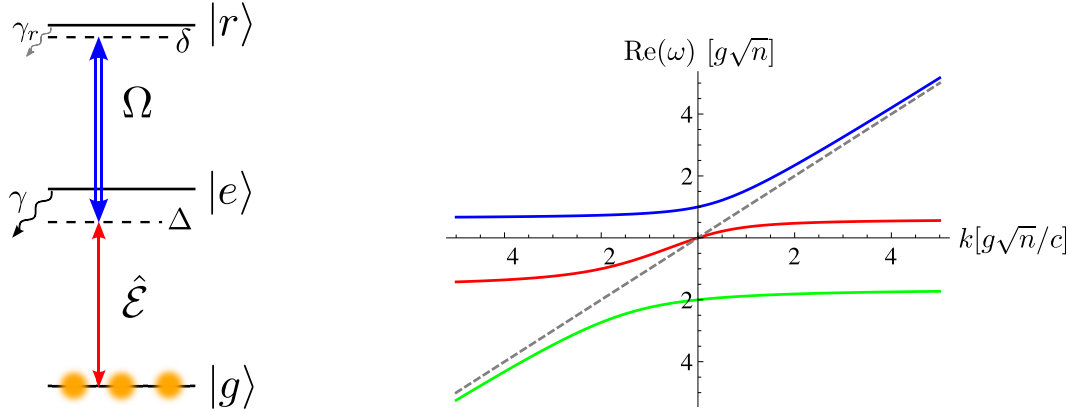
### 3.1.1 Kleine Anregungsdichten und HP-Approximation

Die atomaren Operatoren  $\hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(j)}$  für zwei-Niveau Atome  $\mu = g, s$  im *coarse graining* Volumen  $V$  bilden eine Spin- $N_V$  Algebra, mit der Identifikation

$$\hat{S}_- = N_V \hat{\sigma}_{gs}, \quad \hat{S}_+ = N_V \hat{\sigma}_{sg}, \quad \hat{S}_z = N_V \left( \hat{\sigma}_{ss} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.9)$$

Dieses Spin-System lässt sich mit Hilfe bosonischer Operatoren  $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$  darstellen (*Holstein-Primakoff Darstellung* [37]),

$$\hat{S}_+ = \sqrt{N_V} \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \hat{b}^\dagger \hat{b} / N_V}, \quad \hat{S}_- = \sqrt{N_V} \sqrt{1 - \hat{b}^\dagger \hat{b} / N_V} \hat{b}, \quad \hat{S}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{N_V}{2}. \quad (3.10)$$



**Abbildung 3.1:** Links: EIT  $\Lambda$ -Schema mit metastabilem Rydberg-Zustand  $|r\rangle$ . Rechts: Dispersionsrelation des Hamiltonians aus (3.14). Rot: DZP-Zweig. Zum Vergleich ist gestrichelt der Zweig eines freien Photons gezeigt. Es wurde  $\gamma = 0.1g\sqrt{n}$ ,  $\Delta = 10\gamma$ ,  $\gamma_r = 0.1\gamma$  und  $v_g = 0.5c$  verwendet.

Nimmt man an, dass nur Feldkonfigurationen mit geringer Besetzung des Zustandes  $s$  relevant sind,  $\langle \hat{\sigma}_{ss} \rangle \ll N_V$ , so lassen sich für diese Zustände die Wurzeln aus (3.10) um  $\hat{b}^\dagger \hat{b} = 0$  entwickeln, und man erhält

$$\hat{\sigma}_{sg}(\mathbf{r}) \approx \frac{\hat{b}^\dagger(\mathbf{r})}{\sqrt{N_V}}, \quad \hat{\sigma}_{gs}(\mathbf{r}) \approx \frac{\hat{b}(\mathbf{r})}{\sqrt{N_V}}, \quad \hat{\sigma}_{ss} = \frac{\hat{b}^\dagger(\mathbf{r})\hat{b}(\mathbf{r})}{N_V}. \quad (3.11)$$

## 3.2 Langsames Licht

In einem EIT  $\Lambda$ -Schema (siehe Abbildung 3.1 links) kommt es zu interessanten Propagationseffekten des Lichtes  $\mathcal{E}$ , wenn zusätzlich ein kohärentes Kontrollfeld mit Rabi-Frequenz  $\Omega$  eingeschaltet ist. Die Gleichungen aus dem vorangegangenen Abschnitt liefern für ein 1D Ensemble von Atomen den Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -n \int dz \left[ \Delta \hat{\sigma}_{rr} + (\Delta + \delta) \hat{\sigma}_{gg} + \left( \Omega \hat{\sigma}_{er} + g \hat{\mathcal{E}} \hat{\sigma}_{eg} + h.c. \right) \right]. \quad (3.12)$$

Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Zerfallsraten  $\gamma_r$  und  $\gamma$  findet man (bei Vernachlässigung der zugehörigen Langevin-Rauschoperatoren) die Bewegungsgleichungen im Fourierraum ( $\hat{\mathcal{E}}(x) = \int dk e^{ikz} \hat{\mathcal{E}}(z)$ ),

$$\partial_t \begin{pmatrix} \sqrt{n} \hat{\sigma}_{ge} \\ \sqrt{n} \hat{\sigma}_{gr} \\ \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma & i\Omega & ig\sqrt{n} \\ i\Omega^* & -i\delta - \gamma_r & 0 \\ ig\sqrt{n} & 0 & -ikc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \hat{\sigma}_{ge} \\ \sqrt{n} \hat{\sigma}_{gr} \\ \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Hierbei ist  $\Gamma = \gamma + i(\delta + \Delta)$ . Im Folgenden soll durchweg eine verschwindende zwei-Photonen Verstimmung  $\delta = 0$  angenommen werden. Adiabatische Eliminierung des schnell zerfallenden Zu-

standes  $|e\rangle$  vereinfacht dann das Gleichungssystem zu

$$\partial_t \begin{pmatrix} \sqrt{n}\hat{\sigma}_{gr} \\ \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = -\frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Gamma} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \frac{\gamma_r \Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + i\frac{kc}{\Omega_{\text{eff}}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n}\hat{\sigma}_{gr} \\ \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Dabei wurde der *Mischwinkel*  $\theta$  eingeführt und verwendet dass

$$\tan^2 \theta = \frac{g^2 n}{|\Omega|^2}, \quad \Omega_{\text{eff}}^2 \equiv |\Omega|^2 + g^2 n. \quad (3.15)$$

Die Eigenlösungen für  $\gamma_r = kc = 0$  werden als *Dunkel-* (DZP,  $\hat{\Psi}$ ) und *Hellzustandspolaritonen* (BSP,  $\hat{\Phi}$ ) bezeichnet, sie lauten

$$\hat{\Psi} = \cos \theta \hat{\mathcal{E}} - \sin \theta \sqrt{n}\hat{\sigma}_{gr}, \quad \hat{\Phi} = \sin \theta \hat{\mathcal{E}} + \cos \theta \sqrt{n}\hat{\sigma}_{gr}. \quad (3.16)$$

Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung in  $\frac{kc\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2}$  und  $\frac{\gamma_r \Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2}$  liefert die Bewegungsgleichung des DZP im Ortsraum,

$$\left( \partial_t + v_g \left( 1 + 2 \sin^2 \theta \frac{\gamma_r \Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \right) \partial_z \right) \hat{\Psi} = \left( -\gamma_r \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{\gamma_r \Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \cos^2 \theta \right) + v_g \frac{c\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \sin^2 \theta \partial_z^2 \right) \hat{\Psi}. \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnet  $v_g = c \cdot \cos^2 \theta$  die *Gruppengeschwindigkeit* und es gilt  $\frac{\gamma_r \Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \sim \frac{L_{\text{abs}} \gamma_r}{c} \ll 1$ , mit der resonanten Absorptionslänge  $L_{\text{abs}} = \frac{c\gamma}{g^2 n}$  eines zwei-Niveau Atoms. In Abbildung 3.1 (rechts) ist die volle Dispersionsrelation des Hamiltonians (3.14) gezeigt. Der DZP-Zweig lässt sich wegen seiner verschwindenden Energie bei  $k = 0$  leicht identifizieren. Gleichung (3.17) beschreibt eine schwach zerfallende Anregung, die mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  durch das Medium propagiert.  $v_g$  kann für  $|\Omega| \ll g^2 n$  (*slow-light limit*) extrem kleine Werte annehmen ( $\lesssim 17m/s$ , [33]).

Für schwache Felder  $\hat{\mathcal{E}}$  gilt der Grenzfall kleiner Anregungsdichten,  $\langle \hat{\sigma}_{rr} \rangle \ll n$ , und mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1.1 folgt, dass die Felder  $\hat{\Psi}$  und  $\hat{\Phi}$  in diesem Fall bosonischen Kommutatorrelationen genügen,

$$\left[ \hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'}^\dagger \right] = \left[ \hat{\Phi}_k, \hat{\Phi}_{k'}^\dagger \right] = \delta_{k,k'}, \quad \left[ \hat{\Phi}_k, \hat{\Phi}_{k'} \right] = \left[ \hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_{k'} \right] = \left[ \hat{\Psi}_k^{(\dagger)}, \hat{\Phi}_{k'}^{(\dagger)} \right] = 0. \quad (3.18)$$

### 3.2.1 Transversale Polaritonenmasse

Berücksichtigt man den transversalen Term  $\nabla_{\perp}^2$  in der paraxialen Wellengleichung (3.3), so erhält man die modifizierte Bewegungsgleichung des DZP

$$\left( \partial_t - v_g \partial_z - i \frac{c}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\Psi} = 0. \quad (3.19)$$

Dabei wurde der Einfachheit halber  $\gamma_r = 0$  gesetzt und  $\mathbf{k}_\perp^2$  ebenfalls störungstheoretisch behandelt. Das DZP hat demnach eine transversale Masse

$$\frac{1}{m_\perp} = \frac{v_g}{k_0}. \quad (3.20)$$

Hierbei ist  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  der Wellenvektor der Trägerwelle in  $z$ -Richtung. Gleichung (3.19) beschreibt massive Schrödingerpartikel mit einem Driffterm und verschwindender Masse in longitudinaler Richtung.

### 3.3 Effektives Magnetfeld für DZPs

Eine Rotation des Mediums (Frequenz  $\nu_r \sim \text{kHz}$ ) führt neben einer Zentrifugalkraft zu einer Corioliskraft, welche die Form einer Lorentz-Kraft besitzt. Hier soll, dem Vorschlag aus [57] folgend, die Bewegungsgleichung für  $\Lambda$ -Schema DZPs bei rotierendem Materieanteil hergeleitet werden. Die Bewegungsgleichungen für  $\hat{\sigma}_{gr}$  und  $\hat{\sigma}_{ge}$  (3.13) gelten jetzt im rotierenden Bezugssystem, in dem die Atome stationär sind, und müssen ins Laborsystem transformiert werden:

$$i \left( \partial_t + i\nu_r \hat{L}_z \right) \hat{\sigma}_{gr} = \delta \hat{\sigma}_{gr} - \Omega \hat{\sigma}_{ge} \quad (3.21)$$

$$i \left( \partial_t + i\nu_r \hat{L}_z \right) \hat{\sigma}_{ge} = -i\Gamma \hat{\sigma}_{ge} - \Omega \hat{\sigma}_{gr} - g\sqrt{n} \hat{\mathcal{E}} \quad (3.22)$$

$$i \left( \partial_t + c\partial_z - i\frac{c}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \hat{\mathcal{E}} = -g\sqrt{n} \hat{\sigma}_{ge}. \quad (3.23)$$

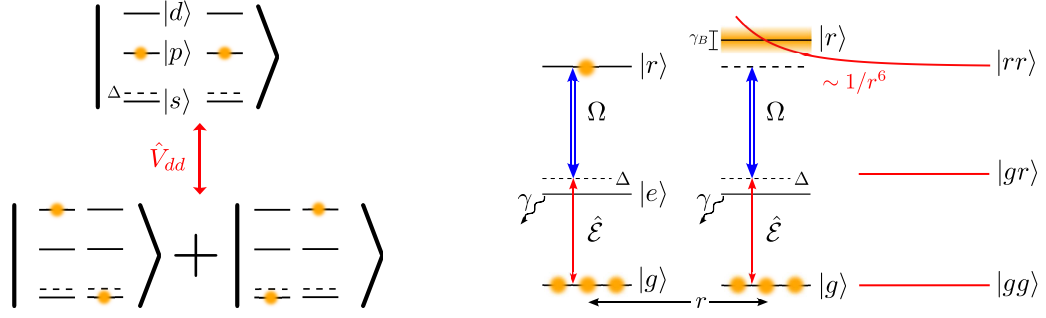
Hierbei ist ein reelles Kontrollfeld  $\Omega$  angenommen, und die transversalen kinetischen Terme sind berücksichtigt. Adiabatische Elimination von  $\hat{\sigma}_{ge}$  (d.h.  $\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ge} = 0$  im rotierenden Bezugssystem) und ein Wechsel in die Polaritonenbasis (3.16) liefern

$$\left( i\partial_t - \sin^2 \theta \nu_r \hat{L}_z + iv_g \partial_z + \frac{v_g}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \hat{\Psi} = -\cos \theta \sin \theta \left( \nu_r \hat{L}_z + ic\partial_z + \frac{c}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \hat{\Phi}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \left( i\partial_t - \cos^2 \theta \nu_r \hat{L}_z + ic \sin^2 \theta \partial_z + \frac{c \sin^2 \theta}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \hat{\Phi} = \\ -i \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Gamma} - \cos \theta \sin \theta \left( \nu_r \hat{L}_z + ic\partial_z + \frac{c}{2k} \nabla_\perp^2 \right) \hat{\Psi}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Der große Absorptionsterm  $\sim \Omega_{\text{eff}}^2/\Gamma$  in (3.25) erlaubt eine adiabatische Eliminierung von  $\hat{\Phi}$  (d.h.  $\partial_\mu \hat{\Phi} \rightarrow 0$  in (3.25),  $\mu = t, x, y, z$ ). Dies liefert

$$i\partial_t \hat{\Psi} = \left[ \frac{(\mathbf{p}_\perp - q\mathbf{A}_\perp)^2}{2m_\perp} - iv_g \partial_z + U \right] \hat{\Psi} - i \tan^2 \theta \frac{\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \left( \cos^2 \theta \nu_r \hat{L}_z + iv_g \partial_z + \frac{1}{2m_\perp} \nabla_\perp^2 \right)^2 \hat{\Psi}, \quad (3.26)$$



**Abbildung 3.2:** *Links:* Der dipol-dipol Wechselwirkungsoperator  $\hat{V}_{dd}$  koppelt die Zustände  $|pp\rangle$  und  $|sd\rangle + |ds\rangle$ , was effektiv zur Van-der-Waals Wechselwirkung führt. *Rechts:* Die Van-der-Waals Wechselwirkung führt zu einer zwei-Photonen Verstimmung  $\delta \sim 1/r^6$  für DZP in der Nähe einer stationären Anregung. Für genügend kleine Abstände kann der Zustand  $|rr\rangle$  nicht mehr angeregt werden (Rydberg-Blockade).

wobei die effektiven Eichpotentiale gegeben sind durch

$$q\mathbf{A}_\perp = -m_\perp \sin^2 \theta \nu_r (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_\perp), \quad U = -\frac{1}{2} r_\perp^2 m_\perp^2 \sin^4 \theta \nu_r^2. \quad (3.27)$$

Dies entspricht folgenden charakteristischen Größen:

$$\ell_B^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_0 v_g}{\sin^2 \theta \nu_r}, \quad \omega_c = 2 \sin^2 \theta \nu_r. \quad (3.28)$$

Die Terme ganz rechts in Gleichung (3.26) beschreiben nicht-adiabatische Korrekturen, die möglichst klein gehalten werden müssen.

### 3.4 Rydberg-Rydberg Wechselwirkungen für DZP

Für eine quantenoptische Realisierung des FQHEs werden starke Wechselwirkungen benötigt, die für Photonen im Allgemeinen schwer zu realisieren sind. Der große Materieanteil der DZPs kann aber zu starken, experimentell einfach zugänglichen Wechselwirkungen führen (z.B. Punktwechselwirkung in kalten Gasen oder dipolare sowie Van-der-Waals- Wechselwirkungen) [59]. Im slow-light limit ( $\sin \theta \approx 1$ ) können Streuungen der DZPs an BSPs vernachlässigt werden, und Wechselwirkungen  $V(r)$  zwischen Materieanteilen der DZPs liefern in der Polaritonenbasis

$$\mathcal{H}_{\text{int}} \approx \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \quad (3.29)$$

In dieser Arbeit werden Van-der-Waals Wechselwirkungen zwischen Rydbergzuständen betrachtet. Letztere sind für die Realisierung von DZPs gut geeignet, da ihre Lebensdauer mit der dritten Potenz ihrer Hauptquantenzahl  $n$  skaliert,  $1/\gamma_r \sim n^3$  [25], und daher Werte im Bereich von milli-Sekunden möglich sind.

Van-der-Waals Wechselwirkungen können als induzierte dipol-dipol Wechselwirkungen verstanden werden. Das Potential lässt sich aus einer störungstheoretischen Behandlung des dipol-dipol Operators (mit  $\mathbf{r}_{1,2}$ : Positionen der Rydberg-Elektronen,  $\mathbf{r}$ : Abstand der Rydberg Atome)

$$V_{dd}(r) = \frac{e^2}{r^5} [\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 r^2 - 3(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r})] \quad (3.30)$$

in einem effektiven drei-Niveau System  $|s\rangle, |p\rangle, |d\rangle$  herleiten [67], siehe Abbildung 3.2 (links). Die so gefundenen Eigenwerte von  $V_{dd}$  lauten

$$V_{\pm}(r) = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{C_6^2}{r^6} \mathcal{D}}, \quad (3.31)$$

wobei  $\mathcal{D}$  eine Konstante ist und  $\Delta = 2\omega_p - \omega_d - \omega_s$ . Für  $\Delta \neq 0$  und genügend große Abstände  $r$  ergibt sich eine Van-der-Waals Wechselwirkung

$$V_{\text{vdW}}(r) = \frac{C_6}{r^6}, \quad (3.32)$$

die für kleine Abstände in eine dipolare Wechselwirkung  $\sim 1/r^3$  übergeht. Für  $\Delta = 0$  ergibt sich ebenfalls eine  $1/r^3$  Wechselwirkung (*Förster Resonanz*).  $C_6$ -Werte für konkrete Wechselwirkungen können in [69] nachgeschlagen werden.

### 3.4.1 Rydberg-Blockade

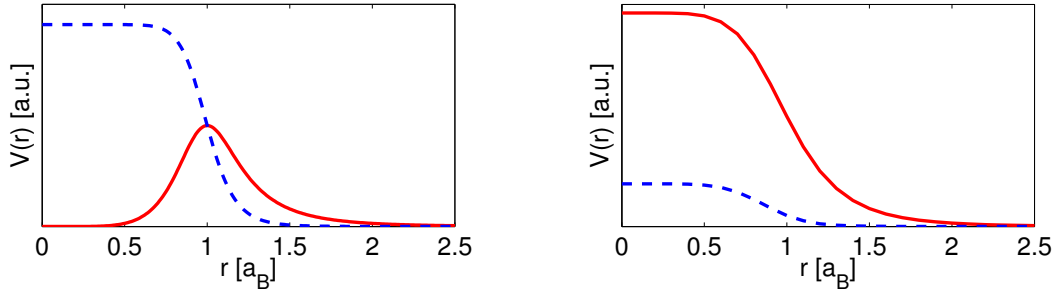
Für propagierende DZPs ergibt sich kein reines Van-der-Waals Potential (3.32), nachdem die Wechselwirkung für kleine Abstände zu großer zwei-Photonen Verstimmung  $\delta(r) = V_{\text{vdW}}(r)$  führt. Ist diese größer als die relevante Linienbreite  $\gamma_B$ , so kommt es zu keinen weiteren Rydberganregungen (siehe Abbildung 3.2). Dieser Effekt wird als *Rydberg-Blockade* bezeichnet. Sie tritt im Blockadevolumen,  $r < \alpha_B$ , auf. Dabei bezeichnet  $\alpha_B$  den *Blockaderadius*, der definiert ist durch

$$V(r = \alpha_B) = \gamma_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = \left( \frac{|C_6|}{\gamma_B} \right)^{1/6}. \quad (3.33)$$

In EIT-Systemen gibt es je nach dem Verhältnis  $\Delta/\gamma$  zwei relevante Linienbreiten. Im resonanten Fall,  $|\Delta| \ll \gamma$ , ist dies die EIT-Linienbreite  $\Omega^2/\gamma$ , im nicht-resonanten Fall,  $|\Delta| \gg \gamma$ , gilt  $\gamma_B = \Omega^2/|\Delta|$  [59]. Die zugehörigen Blockaderadien sind also

$$a_b = \left( \frac{|C_6|\gamma}{\Omega^2} \right)^{1/6} \quad (\text{resonant}), \quad a_B = \left( \frac{|C_6||\Delta|}{\Omega^2} \right)^{1/6} \quad (\text{nicht-resonant}). \quad (3.34)$$

Experimentell konnte die Rydberg-Blockade für zwei Atome im Abstand von  $\sim 10\mu\text{m}$  beobachtet werden [74].



**Abbildung 3.3:** Modifiziertes Van-der-Waals Potential (3.35),  $\mathcal{V}(r) = C_6/r^6$ . Blau (gestrichelt): Imaginärteil, rot (durchgezogen): Realteil. Gezeigt ist der resonante Fall  $|\Delta| \ll \gamma$  (links) und der nicht-resonante Fall  $|\Delta| \gg \gamma$  (rechts).

Innerhalb des Blockadevolumens kann die Kopplung an das Kontrollfeld  $\Omega$  wegen der großen zwei-Photonen Verstimmung vernachlässigt werden, und  $\hat{\mathcal{E}}$  sieht nur das zwei-Niveau System  $|g\rangle, |e\rangle$ . Daher stellen die Polaritonen in diesem Bereich eine schlechte Basis dar. Folglich muss die DZP-DZP Wechselwirkung (3.29) für kleine Abstände renormalisiert werden. Dazu wurden Rechnungen für eine stationäre Rydberganregung gemacht [59], in deren Umgebung also eine  $r$ -abhängige zwei-Photonen Verstimmung  $\delta(r) = \mathcal{V}(r)$  vorliegt. Das Ergebnis ist ein effektives Potential

$$V(r) \sim \frac{\mathcal{V}(r)}{\Omega^2 + i\Gamma \mathcal{V}(r)} \quad (3.35)$$

für propagierende Photonen. In Abbildung 3.3 sind der Real- und Imaginärteil dieses modifizierten Van-der-Waals Potentials ( $\mathcal{V}(r) = C_6/r^6$ ) für den resonanten (links) und nicht-resonanten Fall (rechts) gezeigt.

### 3.5 Zusammenfassung

Der Effekt der *elektromagnetisch induzierten Transparenz* (EIT) für kohärent getriebene 3-Niveau Atome lässt sich durch die Bildung schwach zerfallender sog. *Dunkelzustandspolaritonen* (DZP) verstehen. Aus den Grundgleichungen der Quantenoptik (quantisierte Maxwellgleichungen sowie Heisenbergsche Bewegungsgleichungen der atomaren Operatoren) wurde in diesem Kapitel hergeleitet, dass DZPs im vorgestellten  $\Lambda$ -Kopplungsschema eine transversale Masse besitzen. Außerdem genügen sie im Grenzfall kleiner Anregungsdichten *bosonischen* Kommutatorrelationen. Im *slow-light* Limit (kleine Gruppengeschwindigkeit) besitzen die DZPs einen großen Materieanteil, der sich zur Realisierung starker effektiver Magnetfelder nutzen lässt. Betrachtet man DZPs mit einem metastabilen Rydbergzustand (*Rydberg-Polaritonen*), so können auch starke, langreichweitige Van-der-Waals-artige Wechselwirkungen zwischen den DZPs existieren. Das Wechselwirkungspotential wird dabei durch die sog. *Rydberg-Blockade* für kleine Relativabstände modifiziert.



## 4 Exakte Diagonalisierung kleiner Systeme

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der exakten Diagonalisierung (ED) kleiner Systeme (bis zu  $N = 10$  bei  $\nu = 1/2$ ) vorgestellt. Dazu werden im ersten Teil die benötigten Vielteilchen Matrixelemente mit Hilfe der Pseudopotentiale für realistische Wechselwirkungen hergeleitet. Insbesondere werden analytische Näherungen für die Pseudopotentiale diskutiert. Im zweiten Teil werden die berechneten Yrast-Spektren vorgestellt und interpretiert. Die erwarteten FQHE Zustände in Scheiben- und Kugelgeometrie werden identifiziert und mit Ansatz-Wellenfunktionen verglichen.

### 4.1 Vielteilchen Matrixelemente

Die Vielteilchen Matrixelemente  $\langle m_1, m_2 | \mathcal{H} | m_3, m_4 \rangle$  können aus den Pseudopotentialen  $V_m$  einfach berechnet werden, siehe Abschnitte 2.3.1 sowie 9.6. Der Hamiltonoperator lässt sich dann in zweiter Quantisierung schreiben als

$$\mathcal{H} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \langle m_1, m_2 | \mathcal{H} | m_3, m_4 \rangle \hat{b}_{m_1}^\dagger \hat{b}_{m_2}^\dagger \hat{b}_{m_3} \hat{b}_{m_4} + \sum_{m_1, m_2} \langle m_1 | V_c | m_2 \rangle \hat{b}_{m_1}^\dagger \hat{b}_{m_2}. \quad (4.1)$$

Der erste Term beschreibt die Wechselwirkung der Teilchen und der zweite Term ein zusätzliches Fallenpotential, jeweils im LLL. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm entwickelt, mit dem die Operatoren  $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}$  und  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$  in der Fockbasis ausgedrückt werden können. Das Spektrum des Hamiltonoperators kann dann mit üblichen Diagonalisierungsverfahren bestimmt werden. Hier wurden neben dem Matlab Algorithmus `eigs` ein Lanczos-Verfahren [5], sowie ein Jacobi-Davidson Algorithmus [55] verwendet.

#### 4.1.1 Pseudopotentiale

Im Großteil der vorliegenden Arbeit wird nur der reelle Teil des Van-der-Waals Potentials (3.35) betrachtet,

$$V(r) = C_6 / (r^6 + a_B^6). \quad (4.2)$$

Dies ist für  $|\Delta| \gg \gamma$  gerechtfertigt. Verlustterme werden explizit im Abschnitt 8.2 behandelt. Es sei darauf hingewiesen, dass man ein identisches Potential für Atome mit einer (durch Laserkopplung erreichten) Beimischung von Rydberg-Anregungen (sog. Rydberg-dressing) erhält [35]. Bevor die konkreten Pseudopotentiale vorgestellt werden, sollen analytische Näherungen angegeben wer-

den. Nachdem sich im TDL für alle Geometrien dasselbe Pseudopotential ergibt, werden sich die Rechnungen hier auf die Scheibengeometrie beschränken. Der Blockaderadius soll dabei als cut-off-Parameter behandelt werden. Man gelangt von der dann verwendeten Energieeinheit  $C_6/\ell_B^6$  zur physikalisch relevanten Einheit  $\gamma_B = \mathcal{V}(a_B)$  durch

$$\frac{C_6}{\ell_B^6} = \left(\frac{a_B}{\ell_B}\right)^6 \gamma_B, \quad (4.3)$$

siehe Abschnitt 3.4.1. Dabei bezeichnet  $\mathcal{V}(r) = C_6/r^6$  das nicht abgeschirmte Van-der-Waals Potential.

### Scheibengeometrie

Zur Untersuchung des Skalierungsverhaltens der Pseudopotentiale mit verschwindendem Blockaderadius  $a_B \rightarrow 0$  lässt sich das Potential nähern als

$$V(r) = \frac{C_6}{r^6 + a_B^6} \lesssim \begin{cases} \frac{C_6}{a_B^6} & \text{wenn } r < a_B \\ \frac{C_6}{r^6} & \text{wenn } r \geq a_B \end{cases}. \quad (4.4)$$

Für Pseudopotentiale  $V_{m \geq 3}$  spielt der Bereich  $r < a_B$  im betrachteten Grenzfall keine Rolle, da der Integrand in (2.51) dann gegen Null konvergiert. Zur Berechnung der ersten Pseudopotentiale ( $m = 0, 2$  für Bosonen) müssen dagegen auch die Beiträge im Bereich  $r < a_B$  berücksichtigt werden. Die hieraus gefundenen Näherungen,

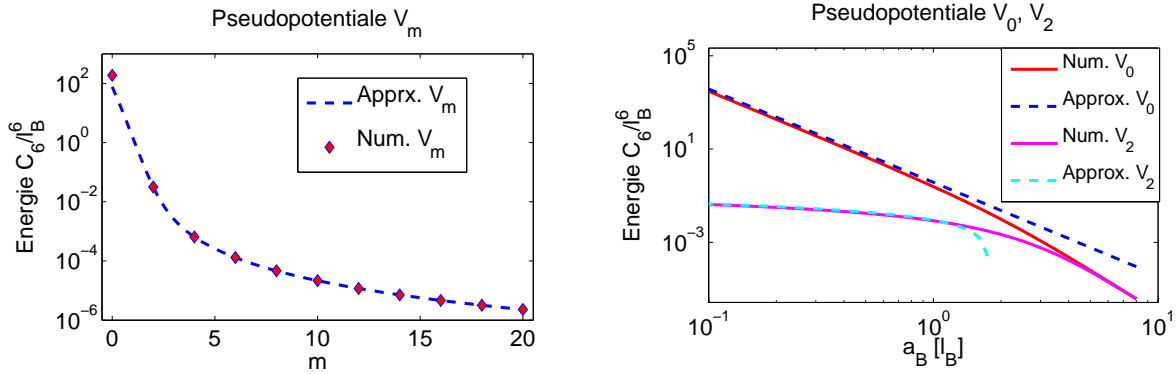
$$V_0 \approx \frac{3}{8} a_B^{-4} \frac{C_6}{\ell_B^2}, \quad V_2 \approx 2^{-6} \left( -\frac{\gamma}{2} + \log(2) - \log(a_B/\ell_B) + \frac{1}{6} \right) \frac{C_6}{\ell_B^6}, \quad (4.5)$$

$$V_m \approx C_6 \cdot 2^{-6} \cdot \frac{\Gamma(m-2, a_B^2/4)}{m!}, \quad m \geq 3 \quad (4.6)$$

mit der Eulerschen Zahl  $\gamma \approx 0.577$ , stimmen gut mit exakten numerischen Rechnungen überein, siehe Abbildung 4.1 (links). Die absolute Größe der Pseudopotentiale  $V_{0,2}$  wird nicht vollständig beschrieben, dafür aber das Skalierungsverhalten mit  $a_B$ , siehe Abbildung 4.1 (rechts). Die obige Näherung wird schlecht für  $a_B \gtrsim \ell_B$ . Insgesamt findet man also im Grenzwert  $a_B \rightarrow 0$  endliche Pseudopotentiale  $V_{m \geq 3}$ , und divergierende Pseudopotentiale  $V_{m \leq 2}$ .

Die Darstellung des  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustands in der Landau-Site Fock-Basis  $(\hat{b}_m^\dagger)^{n_m} |0\rangle$  kann durch ED bestimmt werden. Dazu verwendet man, dass der  $\nu = 1/2$  LN-Zustand exakter Eigenzustand der  $\delta$ -Wechselwirkung ist. Die zugehörigen Pseudopotentiale für  $V(r) = g\delta(r)$  lauten

$$V_m = \delta_{m,0} \frac{g}{4\pi}. \quad (4.7)$$



**Abbildung 4.1:** *Links:* Pseudopotentiale  $V_m$  in der Scheibengeometrie, bei  $a_B = 0.2\ell_B$ . Die Punkte sind numerische Daten, die Linie zeigt die Näherung (4.6). *Rechts:* Pseudopotentiale  $V_0$  und  $V_2$  in Abhängigkeit vom Blockaderadius, der hier als cut-off Parameter behandelt wird. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf die Näherungen in (4.5).

### Kugelgeometrie

Wie Pseudopotentiale in der Kugelgeometrie berechnet werden können, ist im Anhang 9.6 zusammengefasst. Verallgemeinert man die Rechnung für Coulomb Wechselwirkungen [19] für das relevante DZP Potential (4.2), so erhält man

$$V_J^{(Q)} = \frac{C_6}{a_B^6} 2\pi 3^{-3/2-2Q} \frac{\Gamma(2+2Q)}{\Gamma(2/3(1+Q)) \Gamma(1+2/3Q) \Gamma(2/3(2+Q))} \times \frac{\sum_{k=0}^J \binom{J}{k}^2 (J-k)!(J+k)!k!(2Q-k)! {}_4F_3(\dots)}{\sum_{k=0}^J \binom{J}{k}^2 (J-k)!(J+k)!k!(2Q-k)!}. \quad (4.8)$$

Dabei bezeichnet  ${}_pF_q$  die hypergeometrische Funktion, und  ${}_4F_3(\dots)$  steht abkürzend für

$${}_4F_3 \left( \left\{ 1, \frac{1}{3}(2Q+1-k), \frac{1}{3}(2Q+2-k), \frac{1}{3}(2Q+3-k) \right\}; \left\{ \frac{2}{3}(Q+1), 1 + \frac{2}{3}Q, \frac{2}{3}(Q+2) \right\}; - \left( \frac{2R}{a_B} \right)^6 \right).$$

Für die  $\delta$ -Wechselwirkung findet man im Vergleich dazu

$$V_J^{(Q)} = \delta_{J,2Q} \frac{g}{4\pi} \frac{(1+2Q)^2}{Q(1+4Q)}, \quad (4.9)$$

was sich für  $Q \rightarrow \infty$  wie zu erwarten auf das Ergebnis (4.7) reduziert.

## 4.2 Yrast-Spektren und prominente FQHE Zustände

Mit Hilfe der oben hergeleiteten Matrixelemente lassen sich die Hamiltonoperatoren für kleine Teilchenzahlen exakt diagonalisieren. Die grundlegenden Eigenschaften der so erhaltenen *Yrast-Spektren* [53] sind im Anhang 9.3 zusammengefasst. Im Folgenden sollen die Spektren der Van-

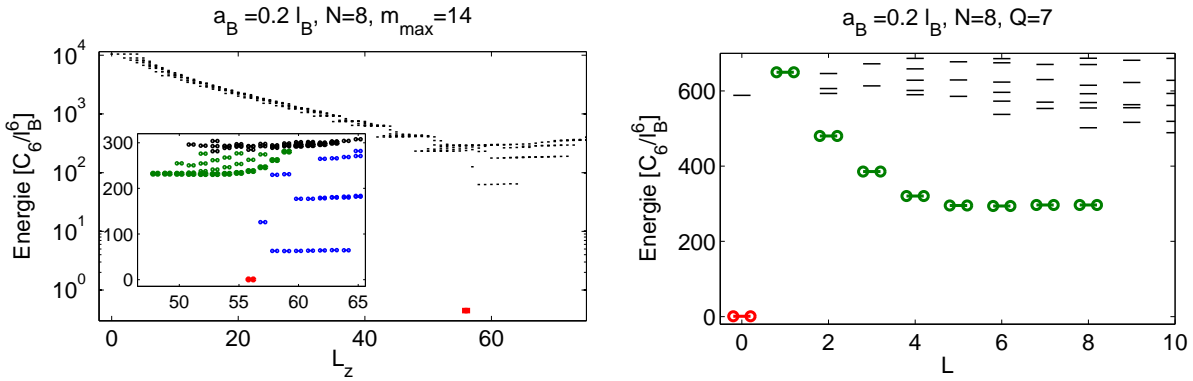
der-Waals Wechselwirkung mit Hilfe der in Kapitel 2 eingeführten FQHE-Zustände interpretiert werden. Dazu wird neben der Van-der-Waals Wechselwirkung (4.2) auch die Modellwechselwirkung (2.62) exakt diagonalisiert, woraus man die Laughlin- Zustände sowie ihre elementaren Anregungen als exakte Eigenzustände in der für die Numerik verwendeten Basis erhält.

### 4.2.1 Inkompressible Grundzustände

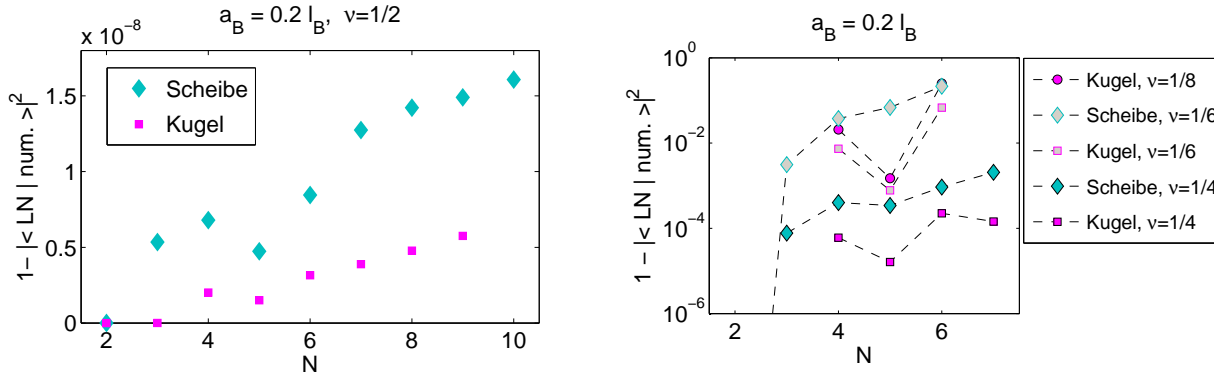
Inkompressible Grundzustände in der Scheibengeometrie zeichnen sich dadurch aus, dass sie vom energetisch kleinsten Zustand im Sektor nächst kleineren Drehimpulses  $L_z$  durch eine Anregungslücke getrennt sind. Solche Zustände im Yrast Spektrum werden als Knicke (*cusps*) bezeichnet. Um eine gegebene Ansatz-Wellenfunktion  $\psi$  eines inkompressiblen Zustandes in einem Spektrum zu finden, wird daher der zu  $\psi$  gehörige maximale Einteilchen-Drehimpuls  $m_{\max}$  bestimmt. Berechnet man dann das Vielteilchenspektrum für ein System dieser Größe, so ist der Knick mit maximalem  $L_z$  ein inkompressibler Grundzustandskandidat. Orbits mit größerem Einteilchen-Drehimpuls werden vernachlässigt, was prinzipiell durch ein starkes Fallenpotential für diese Zuständen erreicht werden kann (siehe Abschnitt 7.2). In der Kugelgeometrie wird analog vorgegangen, wobei hier die Größe der Kugel an die Größe des Ansatz-Zustandes angepasst wird.

In Abbildung 4.2 sind die beschriebenen Spektren für ein System der Größe des  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustandes für  $N = 8$  Teilchen gezeigt. Man erkennt in beiden Geometrien deutlich einen inkompressiblen Grundzustand, der durch eine große Anregungslücke von weiteren Zuständen getrennt ist. In der Scheibengeometrie findet man für größere  $L_z$  weitere Zustände, die im Inset in Abbildung 4.2 (links) blau markiert sind. Sie besitzen kein Pendant auf der Kugel (d.h. bei den entsprechenden Energien gibt es auf der Kugel keine Zustände) und sind demnach Randanregungen. Die Anregungslücke zu Zuständen mit kleinerem  $L_z$  stimmt dagegen größenordnungsmäßig mit der auf der Kugel überein. Um sich zu vergewissern, dass der gefundene Grundzustand tatsächlich im wesentlichen der  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustand ist, kann der Überlapp mit diesem berechnet werden. Das Ergebnis ist für verschiedene  $N$  in Abbildung 4.3 (links) gezeigt. Der Überlapp weicht dabei in beiden Geometrien nur um ca.  $10^{-9}$  von eins ab. Erwartungsgemäß ist der Überlapp wegen größerer finite-size Effekte auf der Scheibe kleiner.

Für kleinere Füllungen als  $\nu = 1/2$  findet man in der Kugelgeometrie ähnliche Spektren, und die Laughlin-Zustände können leicht als inkompressible Grundzustände identifiziert werden. Wie man in Abbildung 4.3 (rechts) erkennt, ergeben sich immer noch große Überlapp mit den exakten Laughlin-Zuständen, insbesondere wenn man bedenkt, dass die Größe des Hilbertraums exponentiell mit der Teilchenzahl wächst. Man beobachtet außerdem Oszillationen des Überlapps zwischen gerader und ungerader Teilchenzahl, was in Kapitel 6 ausführlicher behandelt wird. In der Scheibengeometrie können die Laughlin- Zustände nicht mehr als globale Grundzustände identifiziert werden. Trotzdem lässt sich im  $L_z(LN)$ -Sektor der Grundzustand mit dem Laughlin- Zustand vergleichen, und es ergeben sich immer noch große Überlapp (siehe Abbildung 4.3 rechts).



**Abbildung 4.2:**  $\nu = 1/2$ -Laughlin- Zustand (rot) und vermutetes Exziton Spektrum (grün) für  $N = 8$  Teilchen. *Links:* In Scheibengeometrie, weitere Randanregungen sind blau markiert. Die energetisch höheren Teilstücke des Exziton Spektrums können nicht identifiziert werden. *Rechts:* In Kugelgeometrie kann das gesamte Exziton Spektrum identifiziert werden.



**Abbildung 4.3:** Überlapp zwischen exaktem Laughlin-Zustand und dem Grundzustand der Van-der-Waals Wechselwirkung ( $a_B = 0.2\ell_B$ ) im  $L_z = L_z(LN)$  Sektor. Gezeigt sind verschiedene Teilchenzahlen  $N$  in Kugel- und Scheibengeometrie. *Links:* Füllung  $\nu = 1/2$ . *Rechts:* Verschiedene Füllungen,  $\nu = 1/4, 1/6, 1/8$ .

Die Laughlin- Zustände stellen nach Abschnitt 2.3.4 nur einen Spezialfall einer größeren Klasse von FQHE Zuständen dar. Die Zustände der Jain-Sequenz (2.77) sind ebenfalls als inkompressible Grundzustände der Van-der-Waals Wechselwirkung zu erwarten. Im Grenzfall reiner Punktwechselwirkung (d.h.  $V_0 \gg V_{m>0}$ , was im Grenzfall  $a_B \rightarrow 0$  erreicht wird) wurden diese Zustände bereits ausführlich untersucht [64]. Auch für endliche Blockaderadien konnten im Rahmen der vorliegenden Arbeit Indizien für diese Zustände gefunden werden, systematische Untersuchungen wurden jedoch nicht durchgeführt. Ebenso existieren Hinweise auf den Pfaffian oder Anti-Pfaffian Zustand bei  $\nu = 1$ , siehe Anhang 9.10.

## 4.2.2 Bulk-Anregungen

Nach den Kandidaten für inkompressible Grundzustände sollen nun deren *bulk Anregungen* untersucht werden. Diese sind im Rahmen der CF Theorie durch CF-Exzitonen beschrieben, siehe

Abschnitt 2.3.4. In Abbildung 4.2 sind die Exziton-Spektren gezeigt (grün). In der Kugelgeometrie lassen sich diese leicht als die niederenergetischen Anregungen auf dem Laughlin- Zustand identifizieren. Die Anzahl und Lage ( $L = 1, \dots, 8$ ) solcher Zustände stimmen mit den erwarteten Werten (2.82) überein. In der Scheibengeometrie ist eine Identifikation des Exziton Spektrums schwieriger, da weitere niederenergetische Randanregungen für  $L_z > L_z(\text{LN})$  existieren (in der Abbildung blau markiert). Die Exziton Quantenzahlen  $l_z, l'_z$  liefern (in der Notation aus 2.3.4) ein Exziton Spektrum der Form

$$\Delta L_z \equiv l'_z - l_z = -N, \dots, N - 1, \quad n(\Delta L_z) = \min(|N - \Delta L_z|, |N + 1 + \Delta L_z|). \quad (4.10)$$

Dabei gibt  $n(\Delta L_z)$  die Anzahl der Exziton-Zustände bei  $\Delta L_z$  an. Im Spektrum aus Abbildung 4.2 (links) sind alle anhand der Lage und Anzahl identifizierbaren Exziton Zustände grün markiert. Auf der Seite kleineren Drehimpulses  $L_z < L_z(\text{LN})$  findet man in der Scheibengeometrie eine charakteristische Stufenstruktur. Diese lässt sich mit Hilfe von CF in höheren  $\Delta \text{LN}$  verstehen [40].

### 4.2.3 Rand-Anregungen

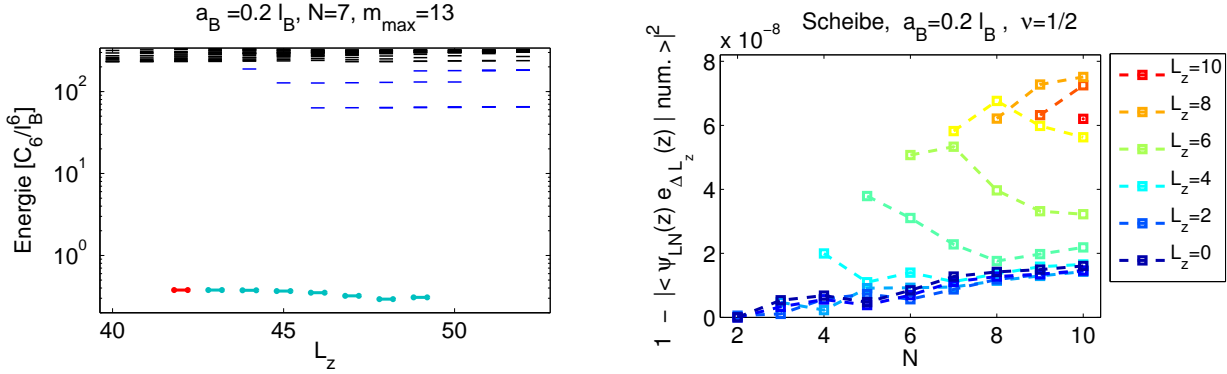
Neben den eben diskutierten bulk Anregungen gibt es auch Randanregungen auf den inkompressiblen FQHE Grundzuständen<sup>1</sup>. Dabei wird das System derart verdünnt, dass ein weiteres Flussquantum Platz hat. Im Falle der Laughlin- Zustände stellen Quasiloach-Anregungen (siehe Abschnitt 2.3.4) derartige Randanregungen dar. In Abbildung 4.4 (links) ist ein Quasiloach- Spektrum für  $N = 8$  Teilchen gezeigt, welches sich einfach als die Mannigfaltigkeit der niederenergetischen Zustände identifizieren lässt. Diese liegen bei den erwarteten Drehimpulsen  $L_z = L_z(\text{LN}) + 1, \dots, L_z(\text{LN}) + N$ . Um sicher zu gehen, dass es sich hierbei tatsächlich um die erwarteten CF Quasiloach-Zustände handelt, wurde der Überlapp zu letzteren berechnet, siehe Abbildung 4.4 (rechts). Er weicht für einen realistischen Blockaderadius von  $a_B = 0.2\ell_B$  nur um ca.  $10^{-8}$  von eins ab. Man erkennt außerdem, dass der Laughlin- Quasiloach-Zustand  $e_N(z)\psi_{\text{LN}}(z)$  meistens den kleinsten Überlapp besitzt und damit die größten finite-size Effekte aufweist. Vergrößert man das System (d.h.  $m_{\text{max}}$ ), so findet man weitere Quasiloach- Zustände.

In der Kugelgeometrie findet man den erwarteten Quasiloach-Zustand bei  $Q = Q_{\text{LN}} + 1/2$  mit  $L = N/2$ , siehe Abbildung 4.5 (links). Der Überlapp mit dem exakten Quasiloach- Zustand ist etwas größer als auf der Scheibe (kleinere finite-size Effekte) und zeigt ein ähnliches Verhalten für wachsendes  $N$ . Dies ist in Abbildung 4.5 (rechts) gezeigt.

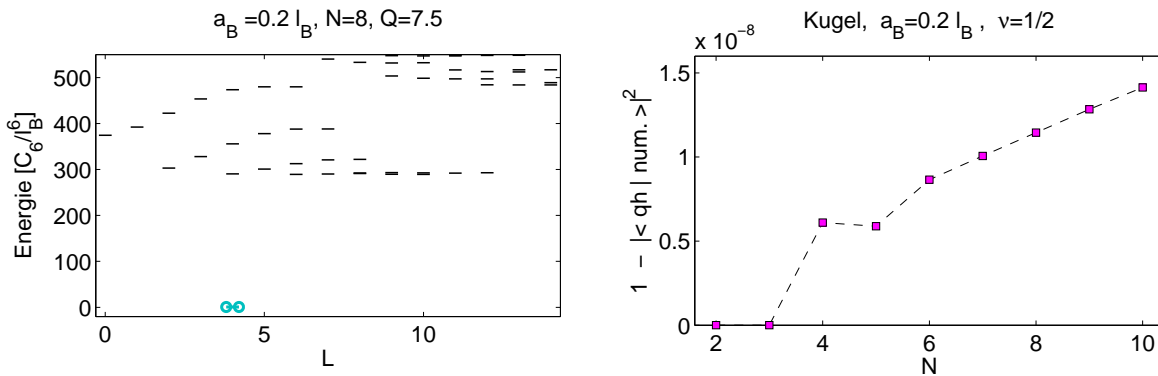
Quasiloach- Zustände bei kleinern Füllungen zeigen - wie schon die Grundzustände - einen deutlich kleineren Überlapp mit den Ansatz- Wellenfunktionen. Dies lässt sich durch konkurrierende bulk Anregungen erklären, und wurde für dipolare Systeme bereits in [56] diskutiert.

---

<sup>1</sup>In Abschnitt 7.1 werden weitere Eigenschaften solcher Randzustände diskutiert.



**Abbildung 4.4:** Links: Grundzustände für ein System der Größe eines Quasilochs auf dem  $\nu = 1/2$  Laughlin- Zustand (Rot) in Scheibengeometrie. Türkis: Quasiloach- Spektrum. Blau: weitere Randzustände. Rechts: Überlapp der Zustände im Quasiloach- Spektrum mit den Ansatz Wellenfunktionen  $\psi_{LN} \cdot e_n(z)$ , siehe Gleichung (2.78).  $\Delta L_z$  bezeichnet den Abstand des Drehimpulses von dem des Laughlin- Zustandes.



**Abbildung 4.5:** Links: Niederenergetische Zustände für eine Kugel der Größe eines Quasilochs auf dem  $\nu = 1/2$  Laughlin- Zustand. Türkis: Quasiloach- Zustand. Rechts: Überlapp des Quasiloach- Zustands mit dem exakten Quasiloach-Eigenzustand für die Punktwechselwirkung.

### 4.3 Zusammenfassung

Die zur exakten Diagonalisierung (ED) benötigten Matrixelemente lassen sich aus den Haldane-Pseudopotentialen berechnen. Für die Van-der-Waals-artige Wechselwirkung der DZPs ergibt sich ein mit dem Blockaderadius  $a_B$  logarithmisch divergierendes Pseudopotential  $V_2$  sowie ein algebraisch divergierendes Pseudopotential  $V_0$ . Für realistische  $a_B = 0.2\ell_B$  stellen erwartungsgemäß die  $\nu = 1/2$  und  $\nu = 1/4$  Laughlin-Zustände inkompressible Grundzustände dar, was in numerischen Untersuchungen für bis zu  $N = 10$  Teilchen in Scheiben- und Kugelgeometrie gezeigt wurde. Außerdem konnten die zugehörigen elementaren Anregungen (Quasiloeh- und CF-Exziton) in den jeweiligen Spektren identifiziert werden. Für kleinere Füllungen  $\nu \leq 1/6$  dominieren auf der Scheibe für die erreichbaren Systemgrößen Randeffekte.



# 5 Abschätzung der Anregungslücken

In diesem Kapitel sollen die Anregungslücken zu den elementaren Anregungen (Quasilo- und Exziton-Zustände) untersucht werden. Diese sind wichtig um die Stabilität - und damit die Kontrollierbarkeit - solcher Anregungen abzuschätzen. Zunächst werden dazu die Grundzustandsenergien der Laughlin-Zustände betrachtet und deren Dichte-Dichte- Korrelationsfunktionen berechnet. Im zweiten Abschnitt werden neutrale Anregungen diskutiert, deren Lücke mit Hilfe der GMP-Theorie berechnet wird [28]. Am Schluss wird ein neues semi-analytisches Verfahren zur Auswertung der Quasilo- Lücke entwickelt. Im gesamten Kapitel werden die analytischen Ergebnisse mit denen der exakten Diagonalisierung verglichen.

## 5.1 Grundzustandsenergie der Laughlin-Flüssigkeit

Um die Variationsenergie pro Teilchen,

$$\epsilon_0 = \frac{\langle \psi | \mathcal{H}_{int} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \frac{1}{N}, \quad (5.1)$$

zu berechnen, wird die  $g^{(2)}$ -Funktion des LN-Zustandes benötigt, siehe Gleichung (2.58). Dies kann man sich leicht anhand der Definition der Korrelationsfunktion (siehe Anhang 9.2) klar machen.

### 5.1.1 Korrelationsfunktionen

Im Folgenden wird die analytische Berechnung der  $g^{(2)}$ -Funktion von Girvin [27] vorgestellt. Dabei werden die Ergebnisse hier auf Bosonen verallgemeinert und explizit hergeleitet. Für ein System homogener Dichte  $\rho = \frac{\nu}{2\pi}$  (wie z.B. für die LN-Zustände) gilt nach (9.5)

$$g^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{(2\pi)^2 N(N-1)}{\nu^2} \int d^2 z_3 \dots d^2 z_N |\psi(z_1, \dots)|^2. \quad (5.2)$$

Führt man Schwerpunkts- und Relativkoordinaten  $Z_+ = z_1 + z_2$  und  $z = z_1 - z_2$  ein, so folgt für eine LLL Wellenfunktion

$$\psi(z_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} a_{nw}(z_3, \dots, z_N) z^w Z_+^n e^{-(|Z_+|^2 + |z|^2)/8}. \quad (5.3)$$

Für die LN-Wellenfunktionen  $\psi_{1/m}$ , die  $m$  Jastrow-Faktoren enthalten, gilt

$$a_{nw} = 0 \quad \text{für} \quad w < m. \quad (5.4)$$

Mit der physikalischen Restriktion, dass die LN- Zustände eine homogene, isotrope Flüssigkeit beschreiben, folgt

$$g^{(2)}(z_1, z_2) \equiv g^{(2)}(|z|), \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} g^{(2)}(|z|) = 1. \quad (5.5)$$

Dies ist z.B. aus den ausführlichen Untersuchungen des 2DOCP ersichtlich [13]. Man erhält dann den analytischen Ausdruck

$$g^{(2)}(|z|) = \sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} b_w |z|^{2w} e^{-|z|^2/4}. \quad (5.6)$$

Es stellt sich als sinnvoll heraus, anstelle der  $b_w$  neue Koeffizienten einzuführen, von denen nur wenige verschieden von Null sind. Dazu wird zunächst der fermionische Fall  $\nu = 1$  betrachtet, in dem alle Korrelationsfunktionen analytisch exakt berechnet werden können [26]. (In diesem Fall kann die Vielteilchenwellenfunktion als einfache Determinante geschrieben werden.) Führt man Koeffizienten  $c_w$  ein, gemäß

$$b_w = \frac{2}{w!} 4^{-w} (1 + c_w), \quad (5.7)$$

so lässt sich zeigen dass für  $\nu = 1$  alle  $c_w$  verschwinden. Unter Verwendung von (5.7) lautet (5.6)

$$g^{(2)}(|z|) = 1 + e^{-|z|^2/2} + \sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} \frac{2}{w!} \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2w} c_w e^{-|z|^2/4}. \quad (5.8)$$

Für Fermionen muss das erste  $+$  durch  $-$  ersetzt und die Summe über alle ungeraden  $w$  betrachtet werden. Die neuen Koeffizienten  $c_w$  müssen wegen (5.4)

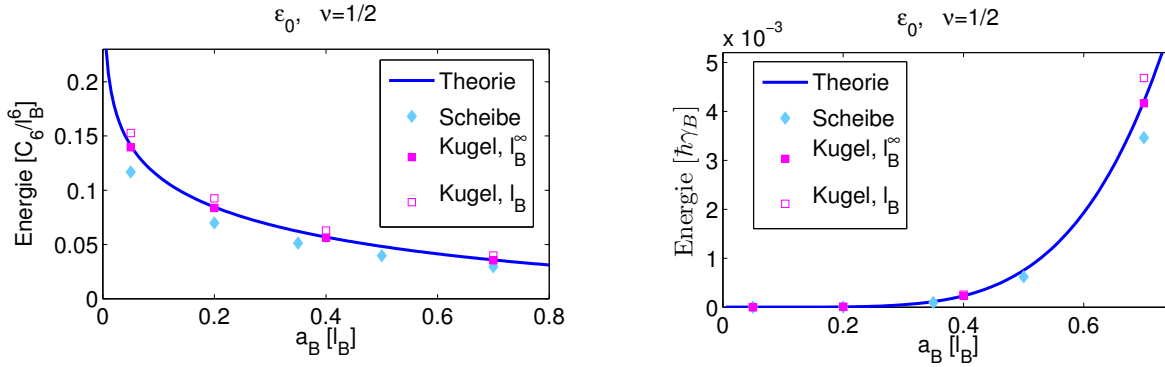
$$c_w = -1 \quad \text{für} \quad w < m \quad (5.9)$$

erfüllen. Außerdem lassen sich die drei Summenregeln aus der 2DOCP-Analogie verwenden [13],

$$2\pi\rho \int_0^\infty (g^{(2)}(r) - 1) r dr = -1 \quad (5.10)$$

$$2\pi\rho \int_0^\infty (g^{(2)}(r) - 1) r^3 dr = -2 \quad (5.11)$$

$$2\pi\rho \int_0^\infty (g^{(2)}(r) - 1) r^5 dr = 16 \left(\frac{m}{2} - 1\right), \quad (5.12)$$



**Abbildung 5.1:** Ergebnisse für Füllung  $\nu = 1/2$ : *Links:* Grundzustandsenergie pro Teilchen in Einheiten von  $C_6/\ell_B^6$ , d.h.  $a_B$  stellt einen Cut-off dar. *Rechts:* Grundzustandsenergie pro Teilchen in Einheiten von  $\gamma_B$ , wobei  $\gamma_B$  die für die Definition des Blockaderadius verwendete Linienbreite ist. (Gemäß (4.3) gilt  $C_6/\ell_B^6 = (a_B/\ell_B)^6 \gamma_B$ )

um zusätzliche Bedingungen an die  $c_w$  zu stellen:

$$\sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} c_w = -\frac{m+1}{4}, \quad (5.13)$$

$$\sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} (w+1)c_w = -\frac{1}{8}(1+m), \quad (5.14)$$

$$\sum_{w=0, \text{gerade}}^{\infty} (w+1)(w+2)c_w = \frac{1}{8}(m^2 - 2m - 1). \quad (5.15)$$

Motiviert durch das Verschwinden der  $c_w$  für  $\nu = 1$  werden im Folgenden nur die ersten  $c_m, c_{m+2}, \dots, c_{2n_{\max}}$  verschieden von Null gewählt und aus (5.13) - (5.15) bestimmt.

Das Integral in (2.58) lässt sich teilweise analytisch auswerten, und man erhält

$$\epsilon_0 = \nu \left( \sum_{n=0}^{n_{\max}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{r^2}{4}} r^{4n+1}}{a_B^6 + r^6} dr \cdot \frac{2^{1-4n} c_{2n}}{(2n)!} + \frac{18\sqrt{3}}{\pi a_B^{10}} G_{1,4}^{4,1} \left( \frac{a_B^6}{216} \middle| \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}a_B^4} \right). \quad (5.16)$$

Hierbei wurde  $a_B$  in Einheiten von  $\ell_B$  angenommen, was  $\epsilon_0$  in Einheiten von  $\frac{C_6}{\ell_B^6}$  liefert.  $G_{1,4}^{4,1}(\cdot)$  bezeichnet die Meijer-G-Funktion. Das verbleibende Integral lässt sich einfach numerisch auswerten, und man erhält die theoretischen Kurven in Abbildung 5.1 und 5.2.

### 5.1.2 Numerische Ergebnisse

In Abbildung 5.1, 5.2 werden theoretische und verschiedene numerische Ergebnisse für den  $\nu = 1/2$  LN-Zustand verglichen. Die numerischen Daten sind Ergebnisse von finite-size Approximationen an Systeme mit numerisch handhabbarer Teilchenzahl. Dazu werden einfache Fits in  $1/N$  an die Daten gelegt. In Abbildung 5.3 sind diese Approximationen in Scheiben- und Kugelgeometrie bei

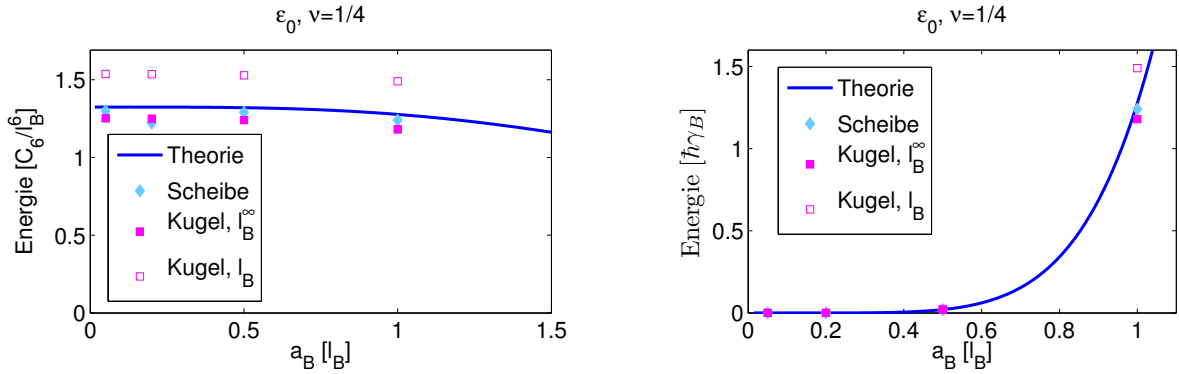


Abbildung 5.2: Wie Abbildung 5.1, aber für Füllung  $\nu = 1/4$ .

$\nu = 1/2$  beispielhaft für  $a_B = 0.2\ell_B$  gezeigt. In der Kugelgeometrie wird ein Großteil der finite-size Effekte durch eine Abweichung der Dichte,

$$\rho = \frac{N}{4\pi Q \ell_B^2}, \quad (5.17)$$

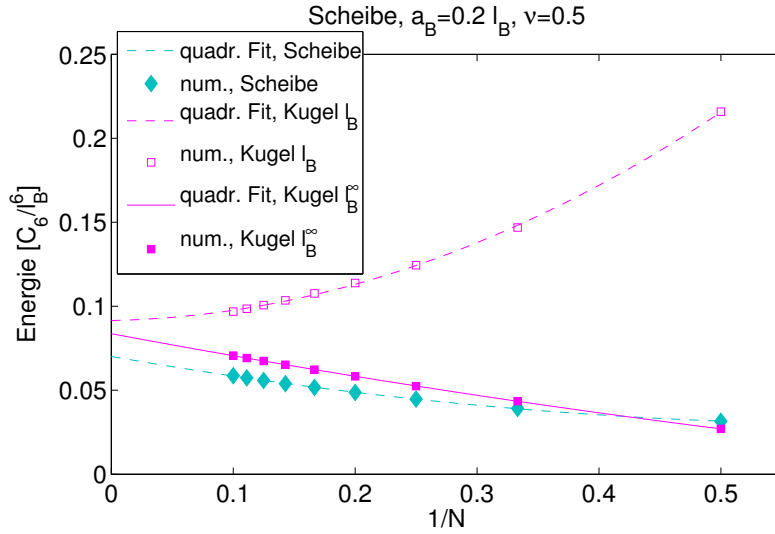
von ihrem Wert im TDL,  $\rho = \nu/2\pi\ell_B^2$ , verursacht. Durch die größeren Dichten für Systeme endlicher Größe<sup>1</sup> erhält man deutlich erhöhte Wechselwirkungsenergien. Dieser Effekt lässt sich aber einfach eliminieren, indem man die magnetische Länge  $\ell_B$  reskaliert, gemäß [16]

$$\ell_B \rightarrow \ell_B^\infty = \sqrt{\frac{2Q\nu}{N}} \ell_B, \quad (5.18)$$

derart dass die tatsächliche Dichte  $\rho = N/4\pi Q (\ell_B^\infty)^2$  dem Wert im TDL entspricht. In Abbildung 5.3 ist die so korrigierte (gefüllte Kästen) sowie die unkorrigierte Grundzustandsenergie (offene Kästen) gezeigt. Die korrigierten Werte zeigen den gleichen qualitativen Verlauf wie die Ergebnisse auf der Scheibe, wo es keine vergleichbaren finite-size Effekte gibt. Auch quantitativ ergibt sich eine gute Übereinstimmung, und die Werte in Scheibengeometrie sind für große  $N$  wegen Randeffekten kleiner als in der Kugelgeometrie. Alle extrapolierten Werte für  $N \rightarrow \infty$  liegen dennoch nahe beieinander.

In Abbildung 5.4 werden die numerischen mit den analytischen (TDL) Dichten sowie Dichte-Dichte-Korrelationen verglichen, jeweils bei den größten zugänglichen Teilchenzahlen. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Im Falle der Dichte-Dichte-Korrelationen werden außerdem die Ergebnisse für verschieden viele Koeffizienten  $c_w$  verglichen. Je mehr dieser  $c_w$  berücksichtigt werden, desto detaillierter werden die schwachen Oszillationen von  $g^{(2)}(r)$  beschrieben, die für freie Fermionen  $\nu = 1$  nicht existieren. Die entsprechenden Funktionen für den *exakten* LN-Zustand sind

<sup>1</sup>Mit der flux-matching Bedingung für endliche Systeme,  $2Q_{\text{LN}} = (N-1)/\nu_{\text{TDL}}$ , folgt, dass für  $\nu_{\text{TDL}} < 1$  der tatsächliche Füllfaktor  $\nu_{\text{tat}} = N/(2Q_{\text{LN}} + 1) > \nu_{\text{TDL}}$  ist.



**Abbildung 5.3:** Finite-size Approximationen in Kugel- und Scheibengeometrie für die Energie pro Teilchen des  $\nu = 1/2$  LN-Zustandes. Die Bedeutung der Größen wird im Text erläutert.

nicht gezeigt. Wegen des extrem großen Überlapps (siehe Abschnitt 4.2.1) unterscheiden sich die numerischen Ergebnisse praktisch nicht.

## 5.2 “Neutrale“ Anregungen

Die elementaren neutralen Anregungen können als CF Exzitonen verstanden werden, siehe Abschnitt 2.3.4. Ihre Energien auf einem  $\nu = 1/m$  LN-Zustand skalieren mit dem letzten vom LN-Zustand abgeschirmten Pseudopotential,

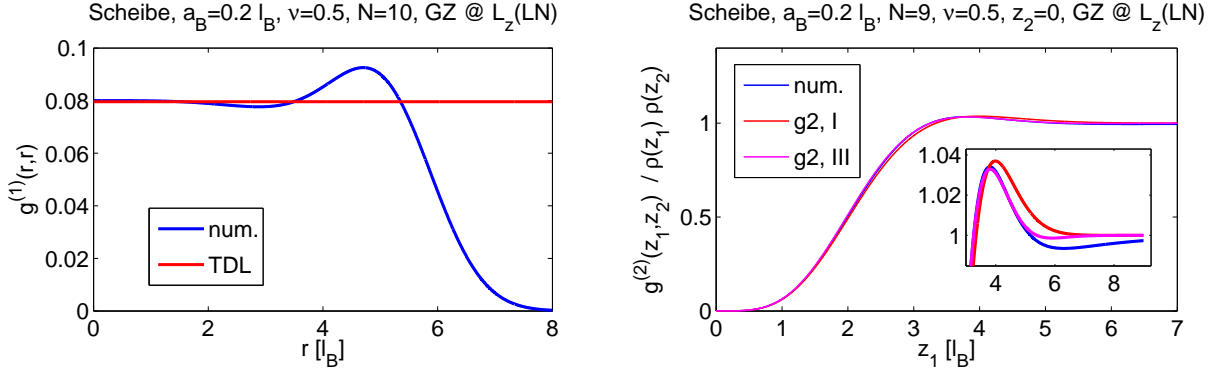
$$\Delta \sim V_{m-2} \gg V_m \sim \epsilon_0(\text{LN}|1/m). \quad (5.19)$$

Dabei ist  $\Delta = E(\text{ex}|1/m) - E(\text{LN}|1/m)$  die Anregungslücke zum LN- Zustand. Die angegebene Ungleichung gilt für typische Potentiale, für die der LN- Zustand ein guter Grundzustandskandidat ist. Sie erklärt, weshalb LN- Zustände *inkompressibel* sind.

### 5.2.1 GMP-Theorie

Schon vor der Einführung der CF-Theorie und damit des CF Exzitons, wurde von Girvin, MacDonald und Platzmann eine Theorie der elementaren neutralen Anregungen entwickelt, die nach ihren Urhebern benannte *GMP-Theorie* [28]. Im Folgenden wird eine für Bosonen modifizierte Form der GMP-Theorie vorgestellt.

Die GMP-Theorie baut auf Feynmans Theorie für elementare Anregungen in suprafluidem  $^4\text{He}$  [21, 20, 22] auf. Feynman setzte die neutralen Anregungen als Dichte-Wellen auf einem bekannten



**Abbildung 5.4:** Links: Vergleich der Dichte des numerisch bestimmten Grundzustandes bei  $L_z = L_z(\text{LN}, 1/2)$  mit dem TDL Ergebnis  $\rho = \nu/2\pi$ . Rechts: Vergleich der Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion des numerisch bestimmten Grundzustandes bei  $L_z = L_z(\text{LN}, 1/2)$  mit den im Text hergeleiteten Korrelationsfunktionen für den TDL. Näherung I bedeutet dass nur  $c_2$  verschieden von Null gewählt wurde, während für Näherung III  $c_2, c_4, c_6$  verschieden von Null gewählt wurden. Es gilt jeweils  $c_0 = -1$ .

Grundzustand  $\Psi(\{\mathbf{r}_j\})$  an,

$$\phi_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\}) = N^{-1/2} \rho_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\}) \Psi(\{\mathbf{r}_j\}). \quad (5.20)$$

$\rho_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\})$  ist dabei die Fourier-Transformation des Dichte-Operators,

$$\rho_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\}) = \int d^2\mathbf{R} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \hat{\rho}(\mathbf{R}) = \sum_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}_j), \quad \hat{\rho}(\mathbf{R}) = \sum_j \delta(\mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}_j). \quad (5.21)$$

Konfigurationen mit einer Dichte-Modulation bei einer Frequenz nahe bei  $\mathbf{k}$  besitzen also eine große Amplitude in der Wellenfunktion  $\phi_{\mathbf{k}}$ . Außerdem sind die vorteilhaften Korrelationen des Grundzustandes durch den Faktor  $\Psi(\{\mathbf{r}_j\})$  im wesentlichen beibehalten. Die Eleganz der Feynmanschen Idee liegt darin, dass alle Eigenschaften der Anregungen unmittelbar aus den Grundzustandseigenschaften folgen.

Für Zustände im LLL muss (5.20) projiziert werden, um sinnvolle Wellenfunktionen zu erhalten. Dies führt zum GMP Ansatz,

$$\phi_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\}) = N^{-1/2} \mathcal{P}_{LLL} \rho_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\}) \mathcal{P}_{LLL} \Psi(\{\mathbf{r}_j\}) \equiv N^{-1/2} \overline{\rho_{\mathbf{k}}}(\{\mathbf{r}_j\}) \Psi(\{\mathbf{r}_j\}). \quad (5.22)$$

Im Folgenden soll für den TDL explizit Translationsinvarianz angenommen werden. Es gilt also  $[\mathcal{P}_{LLL}, \mathbf{P}] = 0$ , wobei  $\mathbf{P}$  der Gesamtimpuls ist. Damit und mit der Tatsache dass  $\Psi(\{\mathbf{r}_j\})$  ein  $\mathbf{P}$ -Eigenzustand ist, folgt, dass auch  $\phi_{\mathbf{k}}(\{\mathbf{r}_j\})$  ein solcher ist. Insbesondere gilt  $\langle \phi_{\mathbf{k}} | \phi_{\mathbf{q}} \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ , d.h. es ergibt sich ein Spektrum orthogonaler Zustände. Die zugehörigen Variationsenergien (bzgl. des Grundzustandes) sind dann

$$\Delta(k) = \frac{\langle \phi_{\mathbf{k}} | \mathcal{H} - E_0 | \phi_{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \phi_{\mathbf{k}} | \phi_{\mathbf{k}} \rangle} = \frac{\overline{f}(k)}{\overline{s}(k)}. \quad (5.23)$$

Dabei wurden die Definitionen

$$\bar{f}(k) = \langle \phi_{\mathbf{k}} | \mathcal{H} - E_0 | \phi_{\mathbf{k}} \rangle, \quad \bar{s}(k) = \langle \phi_{\mathbf{k}} | \phi_{\mathbf{k}} \rangle \quad (5.24)$$

der projizierten *Oszillatorstärke*  $\bar{f}$  sowie des projizierten *statischen Strukturfaktors*  $\bar{s}$  verwendet. Einige Details zur physikalischen Bedeutung dieser Größen und zur Interpretation der berechneten Anregungslücke sind in Anhang 9.5 zu finden.  $\bar{s}$  und  $\bar{f}$  können wie im fermionischen Fall bei Girvin et. al. berechnet werden. Der Ausgangspunkt für alle Rechnungen ist die Kommutatorrelation

$$[\bar{\rho}_{\mathbf{k}}, \bar{\rho}_{\mathbf{q}}] = \left( e^{k^*q/2} - e^{kq^*/2} \right) \bar{\rho}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}, \quad \bar{\rho}_{\mathbf{k}}^\dagger = \bar{\rho}_{-\mathbf{k}}. \quad (5.25)$$

Hierbei bezeichnen  $k, q$  in den Exponenten die zu den 2D-Vektoren  $\mathbf{k}, \mathbf{q}$  gehörigen  $\mathbb{C}$ -Zahlen. Der projizierte statische Strukturfaktor kann aus dem unprojizierten,

$$s(\mathbf{k}) = N^{-1} \langle \Psi | \rho_{\mathbf{k}}^\dagger \rho_{\mathbf{k}} | \Psi \rangle = 1 + \rho \int d^2\mathbf{r} \left( g^{(2)}(\mathbf{r}) - 1 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \rho(2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}) \quad (5.26)$$

mit  $\rho = \frac{\nu}{2\pi}$  berechnet werden. Unter Verwendung von

$$\mathcal{P}_{LLL} \rho_{\mathbf{k}}^\dagger \rho_{\mathbf{k}} \mathcal{P}_{LLL} = \bar{\rho}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{\rho}_{\mathbf{k}} + \left( 1 - e^{-|\mathbf{k}|^2/2} \right) N \quad \Rightarrow \quad \bar{s}(k) = s(k) - 1 + e^{-|\mathbf{k}|^2/2} \quad (5.27)$$

und  $g^{(2)}$  aus (5.8) findet man

$$s(k) = 1 + \nu \left( e^{-k^2/2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} {}_1F_1(1+2n; 1; -k^2) \right). \quad (5.28)$$

$\bar{f}(k)$  erhält man durch Umschreiben als

$$\bar{f}(k) = \frac{1}{2N} \langle \Psi | \left[ \rho_{\mathbf{k}}^\dagger, [\mathcal{P}_{LLL} \mathcal{H} \mathcal{P}_{LLL}, \rho_{\mathbf{k}}] \right] | \Psi \rangle, \quad (5.29)$$

was nach einiger Algebra auf

$$\begin{aligned} \bar{f}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{q} v(|\mathbf{q}|) & \left( \bar{s}(|\mathbf{q}|) e^{-|\mathbf{k}|^2/2} 2 \left( \cosh((q^*k + k^*q)/2) - 1 \right) \right. \\ & \left. + \bar{s}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) \left( 2e^{(q^*k + k^*q)/2} - e^{q^*k} - e^{qk^*} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

führt. Dabei ist  $v(|\mathbf{q}|)$  die Fouriertransformierte des Potentials. Im Fall der betrachteten Van-der-Waals Wechselwirkung  $V(r) = C_6/(r^6 + a_B^6)$  erhält man

$$v(q) = C_6 \frac{\pi}{3} a_B^{-4} G_{06}^{40} \left( \frac{a_B^6 q^6}{46656} \left| \begin{array}{c} \{ \} \\ (0, 1/3, 2/3, 2/3, 0, 1/3) \end{array} \right. \right), \quad (5.31)$$

mit der Meijer-G Funktion  $G_{06}^{40}(\cdot|\cdot)$ . Wegen der Rotationssymmetrie reicht es, sich auf  $\mathbf{k} = (k_x, 0)$  zu beschränken. Man erhält dann insgesamt

$$\bar{f}(k_x) = \frac{C_6}{3\pi a_B^4} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_0^{\infty} dq_y G_{06}^{40} \left( \frac{a_B^6 q^6}{46656} \middle| \left( \begin{matrix} \{\} \\ 0, 1/3, 2/3, 2/3, 0, 1/3 \end{matrix} \right) \right) (\cos(q_y k_x) - 1) e^{-k_x^2/2} \\ e^{-(q_x^2 + q_y^2)} 4\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \left[ {}_1F_1(-2n; 1; q_x^2 + q_y^2) - {}_1F_1(-2n; 1; q_x^2 + q_y^2 + k_x^2 + 2k_x q_x) e^{-k_x^2/2 - q_x k_x} \right] \quad (5.32)$$

Hieraus sind einige allgemeine Ergebnisse ersichtlich, die wieder von [28] übernommen werden können:

- (i) Eine Reihenentwicklung zeigt, dass  $\bar{f}(k) \sim |k|^4$ . Weil repulsive Wechselwirkungen betrachtet werden, gilt  $\bar{f}(k) > 0$ .
- (ii) Mit Hilfe der 2DOCP Kompressibilitäts-Summenregel (5.15) zeigt eine weitere Reihenentwicklung  $\bar{s}(k) = \frac{1-\nu}{8\nu} |k|^4 + \mathcal{O}(|k|^5)$ . Folglich gilt  $\Delta(k=0) > 0$  für jeden Laughlin-Zustand, solange die Ein-Moden Näherung (SMA) gilt. Die SMA wird im Anhang 9.5 definiert und diskutiert.

Gleichung (5.32) kann numerisch ausgewertet werden, in Abbildung 5.5 (links) ist das Ergebnis für  $\nu = 1/2$  gezeigt ( $L$  hängt linear mit  $k$  zusammen, wie weiter unten gezeigt wird). Von großen zu kleinen Wellenlängen nimmt  $\Delta(k)$  zunächst ab und erreicht dann einen minimalen Wert. Dieses Minimum folgt aus einem großen Wert von  $\bar{s}(k)$ , der wiederum mit dem *Magneto-Roton* identifiziert werden kann (siehe Anhang 9.5). Das Magneto-Roton entspricht einem energetisch niedrigen CF-Exziton (CF-Theorie) oder einer Dichtewelle mit spezieller Wellenlänge (GMP-Theorie). Daraus folgt, dass eine Dichtemodulation mit eben dieser Wellenlänge energetisch günstig ist, so dass das Magneto-Roton als Vorstufe eines Kristalls interpretiert werden kann. Für einen solchen erwartet man dann einen Gitterabstand der Wellenlänge des Magneto-Rotons. Kristallisation im LLL wird im folgenden Kapitel 6 näher diskutiert.

### 5.2.2 Numerische Ergebnisse

In der GMP Rechnung wurde ein translationsinvarianter Grundzustand angenommen, was numerisch nur auf der Kugeloberfläche realisiert ist. Um die dortigen Ergebnisse mit den GMP Rechnungen zu vergleichen, kann der lineare Impuls durch den Drehimpulsbetrag  $L(L+1) = \mathbf{L}^2$  ersetzt werden, gemäß  $kR = L$  [39]. Im Folgenden werden die Ergebnisse für verschiedene Füllungen diskutiert.

#### Füllung $\nu = 1/2$

In Abbildung 5.5 (links) ist für  $\nu = 1/2$  und  $N = 10$  ein Spektrum auf der Kugel mit dem zugehörigen GMP-Ergebnis gezeigt. Dieses liegt als Variationsergebnis oberhalb des Exziton-Spektrums.



Für kleine  $k$  stimmt die GMP Vorhersage quantitativ gut mit der Numerik überein. Die Position des schwer zu identifizierbaren Magneto-Roton-Minimums  $k_{\text{MR}}$  wird vom GMP Spektrum ungefähr wiedergegeben. Für größere  $k \gtrsim k_{\text{MR}}$  ergibt sich eine deutliche qualitative Abweichung, die durch die Ungültigkeit der SMA in diesem Bereich zu erklären ist. Sobald mehr als eine Mode einen wesentlichen Beitrag zur Oszillatorstärke  $\bar{f}$  liefert, wird die Anregungslücke zum (gewichteten) Mittelwert dieser Modenenergien geschoben. So lässt sich das Verhalten für große  $k$  verstehen: Die GMP Vorhersage liegt hier im unteren Bereich des Kontinuums. Außerdem findet man dass sich für kleinere Teilchenzahlen wegen finite-size Effekten niedrigere Exziton-Energien ergeben, wie aus den finite-size Approximationen in Abbildung 5.6 ersichtlich ist.

Auf der Kugel lässt sich das CF-Exziton einfach identifizieren, siehe Kapitel 4.2.2, und es gibt keine weiteren niederenergetischen Anregungen. Auf der Scheibe ist dies schwieriger, und es gibt niederenergetische Anregungen für größere Drehimpulse als  $L_z(\text{LN}|1/2)$ , siehe Abschnitt 4.2.1. Für  $L_z < L_z(\text{LN}|1/2)$  erkennt man aus Abbildung 4.2 (links) die aus der CF-Theorie erwarteten Stufen. Die erste Stufe oberhalb des LN-Zustandes besteht aus Zuständen im CF-Exziton Spektrum. In Abbildung 5.6 wurde daher für die Anregungslücke zum CF-Exziton

$$\Delta_- = E_0(L_z = L_z(\text{LN}|1/2) - 1) - E_0(L_z = L_z(\text{LN}|1/2)) \quad (5.33)$$

betrachtet, wobei  $E_0(L_z)$  die GZ-Energie im  $L_z$ -Sektor bezeichnet. Die Exziton-Dispersion  $\sim V_2$  wird dabei gegenüber der Exziton-Ruheenergie  $\sim V_0$  vernachlässigt, so dass es genügt den GZ im  $L_z(\text{LN}) - 1$  Sektor zu betrachten. Die so erhaltene CF-Exziton Energie in Scheibengeometrie stimmt gut mit dem Ergebnis aus der Kugelgeometrie überein, wie aus der näherungsweise Konvergenz von Rauten und Quadraten für  $N \rightarrow \infty$  in Abbildung 5.6 ersichtlich ist. Beide zusammen stimmen außerdem gut mit dem Ergebnis der GMP-Theorie überein, siehe Abbildung 5.5 (rechts). Dort wurden für verschiedene Blockaderadien  $a_B$  GMP-Spektren numerisch berechnet und die zugehörigen Energien des Magneto-Rotons bestimmt. Die numerischen Daten sind die Ergebnisse aus finite-size Approximationen. Die GMP Ergebnisse liefern wegen ihres Variationscharakters um  $\sim 15\%$  zu große Ergebnisse. Numerik und GMP-Theorie folgen jedoch dem gleichen Potenz-Gesetz  $\propto a_B^2$ .

Die Anregungslücke zu den Randanregungen bei  $L_z > L_z(\text{LN}|1/2)$  ist durch

$$\Delta_+ = \min_{n \neq \text{LN}} [E_n - E(L_z(\text{LN}|1/2))] \quad (5.34)$$

gegeben, wobei  $n$  die GZ sämtlicher  $L_z$ -Sektoren abzählt. Abbildung 5.6 zeigt, dass  $\Delta_-$  im Gegensatz zu  $\Delta_+$  einem Potenzgesetz  $\sim N^{-0.6}$  folgt. Insbesondere folgt  $\Delta_- \xrightarrow{\text{TDL}} 0$ , wie für Randanregungen zu erwarten.

### Füllung $\nu \leq 1/4$ und Komposit-GMP

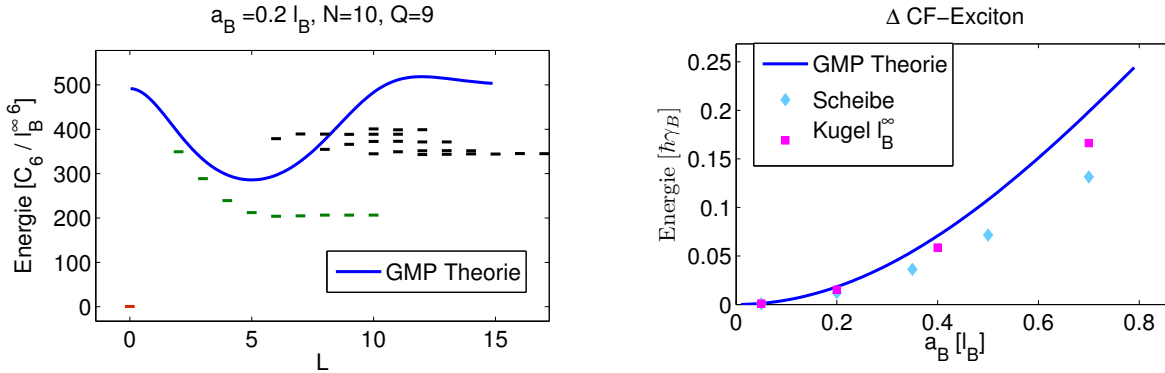
Für  $\nu = \frac{1}{4}$  und nicht zu große Blockade-Radien liefert die GMP-Theorie unbefriedigende Ergebnisse, siehe Abbildung 5.7 (links). Für größere Blockade-Radien, und damit ein kleineres Pseudopotential  $V_0$  (in Einheiten  $C_6/\ell_B^6$ ), findet man bessere Übereinstimmung. Das lässt sich durch Komponenten in der Wellenfunktion erklären, die keinen Jastrow-Faktor enthalten und somit wie  $V_0 \gg V_{m \geq 2}$  skalieren. Das Skalierungsverhalten der GMP-Theorie widerspricht also für  $\nu < 1/3$  dem der CF-Theorie. Letztere erklärt die elementaren Anregungen auf dem  $1/\mu$  LN-Zustand als  $\mu^{-1}$ CF Exzitonen mit einem Quasiteilchen im nächsthöheren  $\Lambda$ L. Ihre Energie skaliert also mit  $V_{\mu-2}$ . Die GMP-Theorie projiziert den Dichteoperator  $\rho_{\mathbf{k}}$  auf das LLL, und die Anregungsenergie skaliert mit  $V_0$ .

Deutlich bessere Ergebnisse sind zu erwarten, wenn man den GMP Dichteoperator  $\rho_{\mathbf{k}}$  auf das LAL der  $\mu^{-2}$ CB projiziert. Im Falle  $\nu = 1/4$  garantiert ein solches Vorgehen Energien, die mit  $V_2$  skalieren. Die zugehörigen Modell-Wellenfunktionen für neutrale Anregungen auf einem  $\nu = \frac{n}{\rho n + 1}$  FQHE-Zustand haben die Form

$$\phi_{\mathbf{k}}^{\text{compGMP}} = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\rho} \bar{\rho}_{\mathbf{k}} \Phi_n, \quad (5.35)$$

wobei  $\rho$  für Bosonen ungerade (für Fermionen gerade) sein muss, und  $\Phi_n$  die Slaterdeterminante für  $n$  volle LL bezeichnet. Ansätze dieser Art wurden schon von Kamilla et. al. [42] betrachtet, und haben sich als wesentlich erfolgreicher als die ursprüngliche GMP-Theorie herausgestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur eine grobe Abschätzung des Spektrums neutraler Anregungen auf dem  $\nu = 1/4$  LN-Zustand gegeben. Anstatt die Wellenfunktion (5.35) mit Hilfe von Monte-Carlo Integrationsmethoden auszuwerten, wird die GMP-Theorie auf  ${}^2$ CB der Füllung  $\nu^* = 1/2$  angewandt. Deren Wechselwirkung wird wie in [46] als reine zwei-Teilchen Wechselwirkung genähert, und es lässt sich leicht zeigen, dass für die zugehörigen Pseudopotentiale  $V_m^*$  gilt:  $V_m^* = V_{m+2}$ . Aus den Van-der-Waals Wechselwirkungen zu verschiedenen Blockaderadien  $a_{B,j}$  lässt sich durch Linearkombination näherungsweise eine Wechselwirkung mit den gewünschten Pseudopotentialen konstruieren,  $V^*(r) = \sum_j \alpha_j V(r|a_{B,j})$ . Hierraus lässt sich wiederum leicht das GMP-Spektrum bestimmen,  $\Delta(k) = \sum_j \alpha_j \Delta(k|a_{B,j})$ . In Abbildung 5.7 (links) ist ein so bestimmtes  ${}^2$ CB GMP-Spektrum gezeigt. Die ersten vier Pseudopotentiale  $V_0^*, \dots, V_6^*$  der Modell-Wechselwirkung werden hierbei exakt reproduziert (relative Genauigkeit  $\sim 10^{-11}$ ), während es für höhere Pseudopotentiale zu relativen Abweichungen  $\sim 10\%$  kommt. Deren Betrag liegt jedoch um etwa vier Größenordnungen unterhalb  $V_0^*$ , so dass diese Fehler vernachlässigt werden können. Aus der Abbildung erkennt man, dass die  ${}^2$ CB GMP-Theorie qualitativ gut mit dem exakten Exziton-Spektrum übereinstimmt. Die Lage des Roton-Minimums wird sehr gut wiedergegeben und das Skalierungsverhalten mit  $a_B$  korrekt beschrieben, siehe Abbildung 5.7 (rechts). Die Größe der vorhergesagten Anregungslücke ist um etwa einen Faktor  $1/2$  zu groß. Die numerischen Daten in Abbildung 5.7 (rechts) sind



**Abbildung 5.5:** *Links:* Resultat  $\Delta(k)$  der  $\nu = 1/2$  GMP-Theorie im Vergleich mit dem numerisch erhaltenen Exziton-Spektrum. Dabei gilt  $kR = L$ , mit dem Kugelradius  $R$ . *Rechts:* Vergleich von GMP-Theorie und Numerik für verschiedene Blockaderadien, bei  $\nu = 1/2$ . Für die Scheibengeometrie wurden finite-size Approximationen der Anregungslücke  $\Delta_-$  verwendet.

aus finite-size Approximationen bestimmt, siehe Abbildung 5.8. Die Abweichungen der  ${}^2\text{CB}$  GMP-Theorie hängen vermutlich mit der Vernachlässigung von Drei- und Mehrkörper-Wechselwirkungen der  ${}^2\text{CB}$  zusammen.

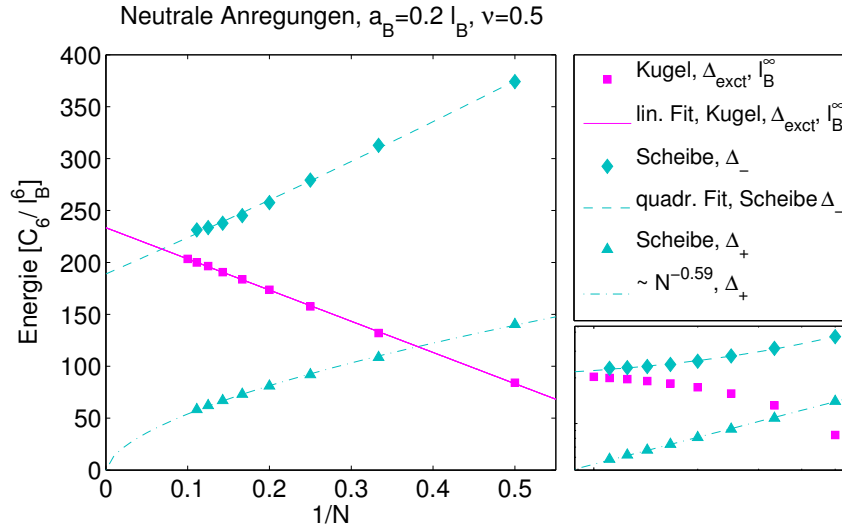
## 5.3 "Geladene" Anregungen

Die elementaren Anregungen bei einer Änderung der Systemgröße sind Quasiloach - (qh) und Quasiteilchen - (qp) Zustände, siehe Abschnitt 2.3.4. Sie weisen für  $\nu = 1/\mu$  anyonische Statistik und fraktionale Teilchenzahl auf ( $\pi/\mu$ -Anyonen,  $1/\mu$ -Teilchen), was in einer Realisierung des FQHE mit Hilfe von DSPs direkt gemessen werden kann (siehe Kapitel 8). Im Folgenden wird die Anregungsenergie des qh-Zustandes aus der zugehörigen  $g^{(2)}$  Funktion hergeleitet. Aus der CF-Theorie ist klar, dass sie mit dem ersten nicht abgeschirmten Pseudopotential skaliert,  $\Delta_{\text{qh}} \sim V_\mu$ . Um dieses Skalierungsverhalten zu erhalten, wird eine neue, semianalytische Theorie für die  $g^{(2)}$ -Funktion des qh-Zustandes entwickelt. Die Anregungslücke zum Quasiteilchen kann näherungsweise aus der des CF-Exzitons und des CF-qh bestimmt werden,  $\Delta_{\text{qp}} = \Delta_{\text{ex}} - \Delta_{\text{qh}}$ . Dabei wird die Exziton-Bindungsenergie vernachlässigt. Quasiteilchen werden daher im Folgenden nicht im Detail diskutiert.

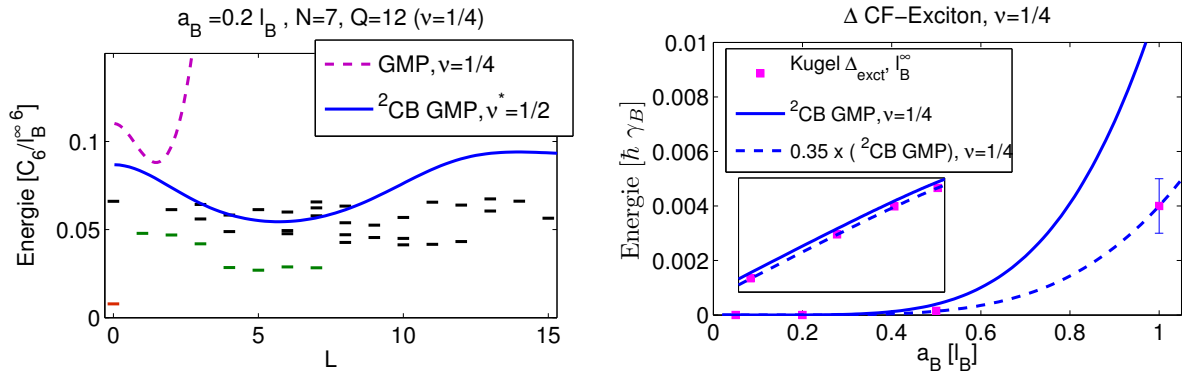
### 5.3.1 Definition der Anregungslücke

Ein Quasiloach-Zustand kann auf verschiedene Arten erzeugt werden, die dann zu verschiedenen definierten Anregungslücken führen [30]. Dieser Veröffentlichung folgend können drei Anregungsarten unterschieden werden:

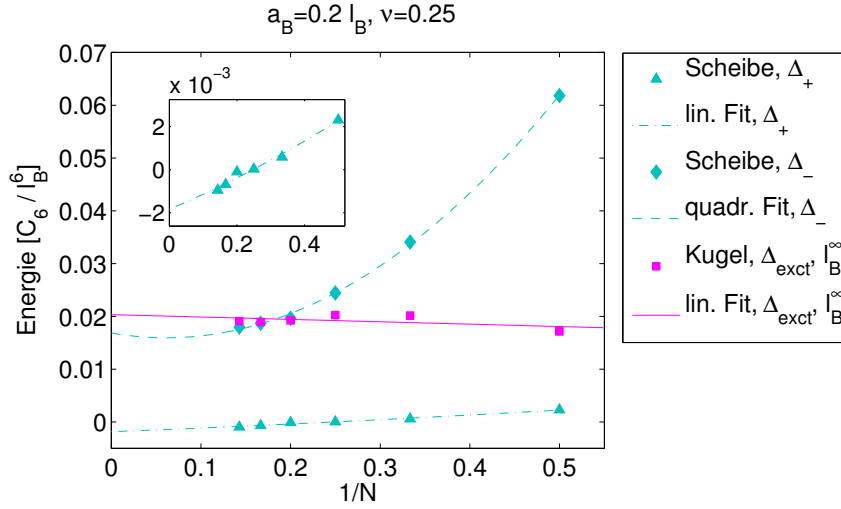
- (i) das Entfernen von Teilchen bei konstanter Systemgröße und konstantem Magnetfeld (Anregungslücke  $\Delta$ ),



**Abbildung 5.6:** Finite-size Approximation der Energie neutraler Anregungen auf dem  $\nu = 1/2$  LN- Zustand. In der Kugelgeometrie kann das CF-Exziton als solches identifiziert werden. In der Scheibengeometrie existieren zusätzliche Randanregungen, weshalb zwei numerisch einfach zugängliche Anregungslücken  $\Delta_{\pm}$  (siehe Text) gezeigt sind. Unten rechts ist die Abbildung in doppelt-logarithmischer Auftragung gezeigt.



**Abbildung 5.7:** Links: Vergleich des CF Exziton-Spektrums (grün) auf dem  $\nu = 1/4$  LN-Zustand (rot) mit theoretischen Erwartungen. Die  $\nu^* = 1/2$  GMP-Theorie der  ${}^2\text{CB}$  beschreibt die neutralen Anregungen wesentlich besser als die  $\nu = 1/4$  GMP-Theorie. Rechts: Vergleich von  $\nu^* = 1/2$   ${}^2\text{CB}$  GMP-Theorie und Numerik für verschiedene Blockaderadien, bei  $\nu = 1/4$ . Die numerischen Ergebnisse liegen für alle  $a_B$  bei ca. 34% der theoretischen Ergebnisse, d.h. das Skalierungsverhalten stimmt überein. Dies ist auch aus der doppelt-logarithmischen Auftragung im Inset zu erkennen.



**Abbildung 5.8:** Finite-size Approximation der Energie zu neutralen Anregungen auf dem  $\nu = 1/4$  LN-Zustand. Im Inset ist die Anregungslücke  $\Delta_+$  zu den beobachteten Randanregungen auf der Scheibe gezeigt, die negative Werte annimmt.

- (ii) die Veränderung der Systemgröße bei konstanter Teilchenzahl und konstantem Magnetfeld (Anregungslücke  $\Delta_N$ ),
- (iii) die Veränderung des Magnetfeldes (d.h. von  $\ell_B$ ) bei konstanter Teilchenzahl und Größe (Anregungslücke  $\Delta_V$ ).

Nur im zweiten Fall ( $\Delta_N$ ) kann die Energie wie bisher üblich relativ zur Zyklotron Grundzustandsenergie  $\frac{N}{2}\omega_c$  gemessen werden. Im ersten Fall ( $\Delta$ ) ergibt sich eine zusätzliche Änderung  $\omega_c/2$  und im letzten Fall ( $\Delta_V$ ) muss wegen  $\ell_B \rightarrow \ell'_B$  auch  $\omega_c \rightarrow \omega'_c$  berücksichtigt werden.

In einem typischen elektronischen FQHE Setup ist besonders die Anregungslücke  $\Delta_V$  von Interesse. In solchen Systemen wird der Füllfaktor durch eine Variation des Magnetfeldes verändert, und Energien werden relativ zu einem von außen vorgegebenen chemischen Potential gemessen. Für diese Systeme gibt es außerdem Wechselwirkungen mit dem positiven Ladungshintergrund, die ebenfalls berücksichtigt werden müssen. Sie führen im TDL zu einem zusätzlichen positiven Beitrag zu  $\Delta_N$ , der durch das Fehlen der attraktiven Ladungs-Hintergrund Wechselwirkung verursacht ist.

Konzeptionell anders funktionieren FQHE-Setups, in denen eine feste Zahl neutraler Teilchen (z.B. in einer Falle) einem künstlichen Magnetfeld ausgesetzt ist. Solche Systeme können mit schnell rotierenden, quasi-2D BECs realisiert werden[75, 68], weshalb sie hier als Kalte-Gase-FQHE-Setups bezeichnet werden sollen. Auch für die in dieser Arbeit diskutierte Realisierung des FQHE mit DZPs (siehe Abschnitt 8) liegen derartige Bedingungen vor. Hier ist die Anregungslücke  $\Delta_N$  relevant, die unter anderem durch die Anregungsenergie im äußeren Fallenpotential bestimmt wird. Der Beitrag der Wechselwirkungsenergie wirkt dem Beitrag der Fallenpotentiale wegen der betrach-

teten *repulsiven* Wechselwirkung entgegen, das heißt ohne äußeren Einschluss ist der LN-Zustand in diesem Fall instabil gegen die Bildung von Quasilöchern. (Es gibt auch keine stabilisierende Ladungs-Hintergrund Wechselwirkung.) Solange das Magnetfeld hinreichend konstant gehalten werden kann, ist  $\Delta_V$  - im Gegensatz zur Behauptung in [30] - nicht die relevante Anregungslücke zur Abschätzung der Stabilität des LN-Zustandes gegen die Erzeugung von Quasilöchern.

Der LN-Zustand kann auch bei fehlendem äußeren Einschluss stabilisiert werden, sobald die nicht-abgeschirmten Pseudopotentiale negativ werden. Die abgeschirmten Pseudopotentiale müssen dagegen groß und positiv sein, so dass der LN-Zustand inkompressibler Grundzustand ist. In kalten Gasen könnte eine Kombination aus langreichweitigen, attraktiven und kurzreichweitigen, repulsiven Wechselwirkungen derartige Pseudopotentiale realisieren. Dadurch können leicht überkompensierte Zentrifugalpotentiale toleriert werden.

In kompakten Systemen ohne Rand (wie in der Kugelgeometrie) sind die einzig relevanten Anregungen neutrale Quasiloch-Quasiteilchen-Paare. Durch Variation der Systemgröße ist es hier auch möglich fraktionale Quasiloch- oder Quasiteilchen-Zustände als *Grundzustände* zu realisieren.

### 5.3.2 Theoretische Berechnung

Im Folgenden soll die Anregungslücke zum Quasiloch-Zustand aus den zugehörigen TDL- Korrelationsfunktionen bestimmt werden. Für die Anregungslücke gilt (siehe Anhang 9.2)

$$\Delta = \int d^2 Z d^2 z V(|z|) \left( g_{\text{qh}}^{(2)}(z_1, z_2) - g_{\text{LN}}^{(2)}(z_1, z_2) \right), \quad (5.36)$$

wobei die  $g^{(2)}$  Funktionen (wie im gesamten Abschnitt) nicht auf die Dichte normiert sind, d.h.  $g^{(2)} = \langle \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \rangle$ .  $Z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  und  $z = z_1 - z_2$  bezeichnen die Schwerpunkts- und Relativkoordinate. Für  $|z| \rightarrow \infty$  gilt jeweils  $g^{(2)} \rightarrow (\nu/2\pi)^2$ , d.h. für große  $|z|$  verschwindet der Integrand. Weil nach Abschnitt 2.3.4 ein Quasiloch dem Fehlen von  $\nu$  Teilchen entspricht, beschreibt (5.36) die Energiedifferenz des homogenen LN- Zustandes mit  $N$  Teilchen und des Quasiloch- Zustandes mit  $N - \nu$  Teilchen, wobei  $N \rightarrow \infty$  im TDL. Demnach hängt  $\Delta$  mit  $\Delta_N$  zusammen, gemäß [30]

$$\Delta_N = \Delta + \nu \cdot \epsilon_0. \quad (5.37)$$

### MacDonald Methode

Die Korrelationsfunktion des Quasiloch- Zustandes wurde von MacDonald et. al. aus der des LN- Zustandes hergeleitet[49]. Dazu wird er näherungsweise geschrieben als

$$|\text{qh}, \nu\rangle = \prod_{n=\infty}^0 (\hat{b}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n + 1 - \hat{n}_n) |\text{LN}, \nu\rangle. \quad (5.38)$$

Der zugehörige Quasiloch Erzeugungsoperator  $\hat{q}^\dagger \equiv \prod_{n=-\infty}^0 (\hat{b}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n + 1 - \hat{n}_n)$  wirkt auf Fock-Zustände mit maximal einfacher Besetzung *bis auf einen Vorfaktor* wie Laughlins Quasiloch Operator  $\prod_j z_j$ . Nach [49] erhält man so eine Quasiloch-Wellenfunktion, die nur in der Region um das Quasiloch von Laughlins Ansatz abweicht. Für Bosonen ist auch Mehrfachbesetzung von Landausites erlaubt, und die neue Quasiloch-Wellenfunktion ist kein Teilchenzahl Eigenzustand. Nachdem aber die dominanten Fock-Zustände im LN- Zustand keine solche Mehrfachbesetzung aufweisen [9], sollen die Rechnungen von MacDonald et. al. [49] hier dennoch für Bosonen verallgemeinert werden.

Die Quasiloch-Dichte ist für Bosonen die gleiche für wie für Fermionen,

$$\rho_{\text{qh}}(z) \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}(z) \rangle = \frac{\nu}{2\pi} \left( 1 - e^{-|z|^2/2} \right), \quad (5.39)$$

während sich die Korrelationen ändern,

$$g_{\text{qh}}^{(2)}(z_1, z_2) = \rho_{\text{qh}}(z_1) \rho_{\text{qh}}(z_2) - \frac{\nu^2}{(2\pi)^2} e^{-|z_1|^2/2} e^{-|z_2|^2/2} \left[ - \left| e^{z_1 z_2^*/2} - 1 \right|^2 - 2 \sum_{m=0, \text{gerade}}^{\infty} \frac{c_m}{4^m m!} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{|F_{m,K}(z_1, z_2)|^2}{4^K K!} \right]. \quad (5.40)$$

Für Fermionen muss das rot markierte "-" Zeichen durch "+", und "m gerade" durch "m ungerade" ersetzt werden. Außerdem gilt

$$F_{m,K}(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{2} \sum_{t,t'} \binom{K}{t} \binom{m}{t'} \frac{(-1)^{t'} z_2^{K+m-t-t'} z_1^{t+t'}}{\sqrt{(K+m-t-t'+1)(t+t'+1)}}. \quad (5.41)$$

Die Koeffizienten  $c_m$  sind aus der Korrelationsfunktion des LN-Zustandes (5.8) bekannt. Die in (5.36) benötigte Differenz der Korrelationsfunktionen lässt sich schreiben als

$$g_{\text{qh}}^{(2)}(z_1, z_2) - g_{\text{LN}}^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{\nu^2}{(2\pi)^2} \left\{ \left( 1 - e^{-|z_1|^2/2} \right) \left( 1 - e^{-|z_2|^2/2} \right) + \left| e^{z_1 z_2^*/2} - 1 \right|^2 e^{-|z_1|^2/2} e^{-|z_2|^2/2} - 1 - e^{-|z_1 - z_2|^2/2} + 2e^{-|z_1|^2/2} e^{-|z_2|^2/2} \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{4^{2n+K} (2n)! K!} \left( |F_{2n,K}(z_1, z_2)|^2 - |z_1 - z_2|^{4n} |z_1 + z_2|^{2K} \right) \right] \right\}. \quad (5.42)$$

Im Falle einer divergenten  $1/r^\gamma$  Wechselwirkung können die Integrale  $\int d^2 Z d^2 z$  in (5.36) in Polarkoordinaten geschrieben und nach der Ordnung in Potenzen von  $r$  und  $R$  berechnet werden. Die Summe  $\sum_K$  muss ausgewertet werden, bis hinreichende Konvergenz erreicht ist. Dabei ergibt sich jedoch folgendes Problem:

### Divergenzen in der MacDonald Methode

Für kurzreichweitige Wechselwirkungen, die für  $r \rightarrow 0$  stärker oder wie  $1/r^2$  divergieren, ergibt sich eine divergente Anregungslücke  $\Delta \rightarrow \infty$ . Der Grund hierfür ist, dass das Verfahren nach MacDonald die Korrelationen um  $|z| = 0$  nicht korrekt beschreibt, so dass die divergenten Pseudopotentiale von  $g_{\text{qh}}^{(2)}$  nicht vollständig abgeschirmt werden. Wegen der Jastrow-Faktoren in der Quasiloche-Wellenfunktion gilt  $g^{(2)}(z = 0, Z) = 0$ , MacDonalds Verfahren liefert jedoch um die Position  $Z \approx \xi = 0$  des Quasiloche  $g^{(2)}(z = 0, Z) \neq 0$ . Dies ist in Abbildung 5.9 (links) für eine vollständig konvergierte  $g^{(2)}$ -Funktion (siehe Abbildung 5.9, rechts) gezeigt. Der Grund für das falsche Verhalten der Korrelationsfunktion auf kurzen Längenskalen um das Quasiloche ist im Wesentlichen die unzureichende Näherung (5.38) des Quasiloche-Erzeugers.

Auch für Fermionen findet man numerisch, dass das erwartete Skalierungsverhalten mit  $|z| \rightarrow 0$  bei  $Z \approx 0$  falsch ist, wobei hier wegen des Pauli-Prinzips  $g^{(2)}(z = 0, Z) = 0$  exakt gilt. In anderen Arbeiten [30, 7, 49] wurde die Anregungslücke zum Quasiloche-Zustand mit Hilfe der MacDonald Methode bestimmt. Dabei sind die Rechnungen für Fermionen mit einer  $1/r$  Coulomb- bzw. einer  $1/r^3$  Dipol-Dipol Wechselwirkung durchgeführt worden. Das erste relevante Pseudopotential  $V_1$  skaliert in diesen Fällen wie

$$V_1 \sim \int dr r^3 \frac{1}{r^3} e^{-r^2/4} < \infty, \quad \text{bzw.} \quad V_1 \sim \int dr r^3 \frac{1}{r^1} e^{-r^2/4} < \infty, \quad (5.43)$$

wobei  $r^3 = r^{2m+1}$  aus dem Integranden für  $V_1$  (2.51) kommt. In diesen Rechnungen treten demnach keine Divergenzen auf. Weil es nur in einem kleinen Bereich um  $Z = \xi$  zu geringen Abweichung vom exakten Skalierungsverhalten kommt, fällt der Fehler in der Anregungslücke also klein aus. Das ist in Abbildung 5.9 (links) zu erkennen, woraus man abliest

$$\max_Z g^{(2)}(z = 0, Z) \approx 0.02 \nu^2 / (2\pi)^2 \ll \nu^2 / (2\pi)^2 \equiv g^{(2)}(z = \infty, Z). \quad (5.44)$$

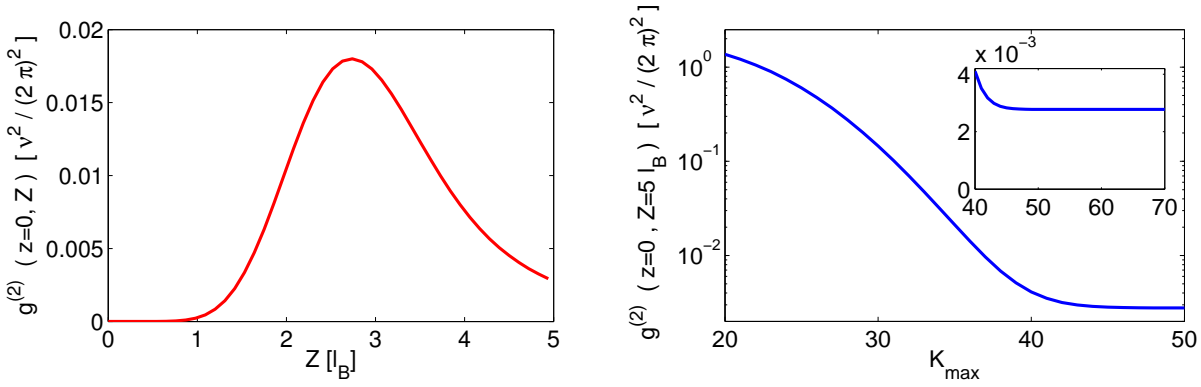
Im Falle von Rydberg-Rydberg Wechselwirkungen wirkt sich das falsche Skalierungsverhalten fatal aus. Es führt zu Beiträgen  $\sim V_0$ , die stark divergieren:

$$V_0 \sim \int dr r \frac{1}{r^6} e^{-r^2/4} \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Für die realistische Rydberg-Rydberg Wechselwirkung  $V(r) = C_6 / (r^6 + a_B^6)$  ergeben sich zwar wegen des endlichen Blockaderadius  $a_B$  auch endliche Anregungslücken, sie weisen aber das falsche Skalierungsverhalten mit  $a_B$  auf. Letzteres lässt sich einfach abschätzen, indem man  $g^{(2)}$  durch eine Konstante in der Nähe des Maximums bei  $Z_0$  approximiert,

$$g^{(2)}(z \in [-\Delta z, \Delta z]; Z \in [Z_0 - \Delta Z_0, Z_0 + \Delta Z_0]) \approx \text{const.} > 0. \quad (5.46)$$





**Abbildung 5.9:** *Links:* Ergebnis der vollständig konvergierten  $g^{(2)}$  Funktion für zwei Teilchen am selben Ort  $z_1 = z_2 = Z$ . Es wurden jeweils die ersten drei nicht-trivialen Koeffizienten  $c_m, c_{m+2}, c_{m+4}$  berücksichtigt. *Rechts:* Konvergenzverhalten der Funktion  $g^{(2)}(z=0, Z)_{K_{\max}}$ , wobei in (5.42)  $\sum_{K=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{K=0}^{K_{\max}}$  verwendet wurde.

Aus Abbildung 5.9 (links) liest man z.B.  $Z_0 \approx 2.7\ell_B$  ab. Nimmt man o.B.d.A. für die Bereiche  $\Delta z < a_B$  an, so lässt sich das Skalierungsverhalten mit  $a_B$  ableiten,

$$\Delta_{\text{MacDonald}} \sim \frac{C_6}{a_B^6} 2\pi Z_0 \Delta Z_0 \pi(\Delta z)^2 \sim a_B^{-6}, \quad \Delta \sim V_2 \sim \log(a_B) \quad \Rightarrow \quad \Delta \approx \Delta_{\text{MacDonald}}. \quad (5.47)$$

Es entspricht nicht dem aus Abschnitt 4.1.1 bekannten Skalierungsverhalten (4.5) von  $V_2$ .

### Neue analytische Form der Quasiloch-Korrelationsfunktion

Um die Divergenzprobleme der MacDonald Methode zu umgehen wird im Folgenden eine neue analytische Form der Quasiloch-Korrelationsfunktion  $g_{\text{qh}}^{(2)}$  (im TDL) vorgeschlagen. Sie ist ähnlich motiviert wie die von Girvin hergeleitete Korrelationsfunktion des LN-Zustandes [27].

Aus der allgemeinen Form einer LLL Wellenfunktion (5.3) folgt, dass sich  $g^{(2)}$  darstellen lässt als

$$g^{(2)}(z, Z) = \sum_{\substack{m, m'=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \sum_{n, n'=0}^{\infty} e^{-|Z|^2} e^{-|z|^2/4} (z^*)^m z^{m'} (Z^*)^n Z^{n'} \cdot C_{n, m}^{n', m'}, \quad (5.48)$$

wobei  $C_{n, m}^{n', m'}$  zunächst unbekannte Konstanten sind. Die Korrelationsfunktion  $g^{(2)}$  der Quasiloch-Wellenfunktion  $\psi_{\text{qh}} = \psi_{\text{LN}} \cdot \prod_j z_j$  muss folgenden physikalisch einsichtigen Bedingungen genügen:

- (i)  $\partial_{\Phi+\varphi} g^{(2)}(z = re^{i\varphi}, Z = Re^{i\Phi}) = 0$ , d.h. der Quasiloch Zustand ist isotrop um das Quasiloch,
- (ii)  $\lim_{r \rightarrow \infty} g^{(2)}(re^{i\varphi}, Re^{i\Phi}) = \rho_{\text{qh}}(z_1) \cdot \rho_{\text{qh}}(z_2)$ , d.h. es gibt keine langreichweitigen Korrelationen. Das ist für die Laughlin-*Flüssigkeit* zu erwarten.
- (iii)  $\lim_{|z_1|, |z_2| \rightarrow \infty} g^{(2)}(re^{i\varphi}, Re^{i\Phi}) = g_{\text{LN}}^{(2)}(r)$ , d.h. außerhalb des Quasilochs bleibt der Zustand

unverändert der Laughlin-Zustand.

Außerdem lassen sich einige Eigenschaften direkt aus der analytischen Form der Wellenfunktion  $\psi_{\text{qh}}$  mit Hilfe von Gleichung (9.5) ablesen,

$$(iv) \quad g^{(2)}(r \approx 0, Re^{i\Phi}) \propto r^{2/\nu}, \text{ folgt direkt aus den Jastrow-Faktoren } \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{1/\nu},$$

$$(v) \quad g^{(2)}(|z_1| \approx 0, |z_2| \approx 0) \propto |z_1|^2 |z_2|^2, \text{ folgt aus dem Vorfaktor } e_N = \prod_j z_j.$$

Alle diese Eigenschaften werden automatisch von

$$g_{\text{qh,pp}}^{(2)}(z_1, z_2) = g_{\text{LN}}^{(2)}(r) \cdot \rho_{\text{qh}}(z_1) \cdot \rho_{\text{qh}}(z_2) \quad (5.49)$$

erfüllt, wobei die Quasiloche Dichten auf  $\rho(r) \rightarrow 1$  für  $r \rightarrow \infty$  normiert seien. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist (5.49) nicht die allgemeinste Funktion, die (i)-(v) erfüllt, die wesentlichen Korrelationen des Quasiloche-Zustandes sollten aber in dieser Näherung enthalten sein. Sie wird daher als *Hauptteil* (pp) bezeichnet. Auch für diese Korrelationsfunktion werden die von Girvin eingeführten Parameter  $c_m$  benötigt um  $g_{\text{LN}}^{(2)}(r)$  zu berechnen (siehe (5.8)). Weiterhin lässt sich zeigen, dass  $g_{\text{qh,pp}}^{(2)}$  von der geforderten Form (5.48) ist, und die Koeffizienten  $C_{n,m}^{n',m'}$  können explizit angegeben werden. Schreibt man  $g_{\text{qh}}^{(2)} = g_{\text{qh,pp}}^{(2)} + g_{\text{corr}}^{(2)}$ , so sind also auch die Korrekturen  $g_{\text{corr}}^{(2)}$  von der Form (5.48). Unter Verwendung von (i) und (iv) lässt sich der Ausdruck für die Korrekturen vereinfachen, und nach der Einführung neuer Koeffizienten  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  (anstelle der  $C_{n,m}^{n',m'}$ ) findet man<sup>2</sup>

$$g_{\text{corr}}^{(2)} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1/\nu}^{\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\infty} e^{-R^2} e^{-r^2/4} e^{i2\delta(\varphi-\Phi)} r^{2\beta} R^{2\alpha} \gamma_{\alpha,\beta}^\delta. \quad (5.50)$$

Solange nur wenige Koeffizienten  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  einen substantiellen Beitrag liefern, sind die Bedingungen (i) - (iv) erfüllt. Um gleichzeitig (v) zu erfüllen wird ein Faktor  $|z_1|^2 |z_2|^2$  vor die Summen geschrieben, was wiederum neue Koeffizienten  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  liefert, die direkt mit  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  zusammenhängen. Als Ergebnis findet man dann

$$g^{(2)}(z, Z) = g_{\text{qh,pp}}^{(2)}(z, Z) + e^{-R^2} e^{-r^2/4} \cdot \left( \frac{r^4}{4} + 4R^4 - r^2 R^2 \left( e^{i2(\varphi-\Phi)} + e^{-i2(\varphi-\Phi)} \right) \right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1/\nu}^{\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\infty} e^{i2\delta(\varphi-\Phi)} r^{2\beta} R^{2\alpha} \Gamma_{\alpha,\beta}^\delta. \quad (5.51)$$

Wie schon beim LN-Zustand kann die Summenregel (5.10) verwendet werden, um einen der Koeffizienten  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  zu bestimmen. Diese Summenregel lässt sich aus der Normiertheit der Wellenfunktion

<sup>2</sup>Die exakte Korrelationsfunktion  $g^{(2)}$  ist ebenfalls von der angegebenen Form, für sie gilt aber  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta = 0$ , falls  $\beta + \delta$  ungerade ist. Diese Bedingung gilt nicht für die Korrekturen, weil entsprechende - falsche - Terme in  $g_{\text{pp}}^{(2)}$  vorkommen und demnach kompensiert werden müssen.

in (9.5) ableiten,

$$\int_{A'} d^2 Z d^2 z g^{(2)}(z, Z) = N(N-1). \quad (5.52)$$

Dabei muss im TDL über eine Fläche  $A'$  integriert werden, die  $N$  Teilchen enthält, und anschließend  $N \rightarrow \infty$  betrachtet werden. Um die bekannten Ergebnisse vom LN-Zustand zu verwenden, empfiehlt es sich über eine Fläche  $A = \frac{2\pi N}{\nu}$  zu integrieren, die *im LN-Zustand*  $N$  Teilchen enthält. Weil der Quasiloeh-Zustand dem Fehlen von  $\nu$  Teilchen entspricht (wie aus (5.39) leicht abzuleiten ist), enthält der Quasiloeh-Zustand in  $A$  also nur  $N - \nu$  Teilchen, und es gilt

$$\int_A d^2 Z d^2 z g^{(2)}(z, Z) = (N - \nu)(N - 1 - \nu). \quad (5.53)$$

Unter Verwendung der Summenregel (5.13) für den LN- Zustand findet man dann

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1/\nu}^{\infty} \gamma_{\alpha,\beta}^0 2^{2\beta} \alpha! \beta! = -\frac{\nu^2}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} c_{2n} \right]. \quad (5.54)$$

Motiviert durch die Tatsache, dass für  $\nu = 1$  der Hauptteil  $g_{\text{qh,pp}}^{(2)}(z, Z)$  eine sehr gute Näherung für die Korrelationsfunktion darstellt (siehe Anhang 9.8), wird nun angenommen, dass fast alle  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\delta = 0$  sind. Um die Summenregel (5.54) zu erfüllen wird nur der Koeffizient  $\Gamma_{0,1/\nu}^0 \equiv \Gamma$  berücksichtigt, der lokale Abweichungen um das Quasiloeh  $r, R \approx 0$  beschreibt. Dann gilt

$$\gamma_{0,1/\nu+2}^0 = \frac{\Gamma}{4}, \quad \gamma_{2,1/\nu}^0 = 4\Gamma, \quad \gamma_{1,1/\nu+1}^1 = \gamma_{1,1/\nu+1}^{-1} = -\Gamma, \quad (5.55)$$

und mit der Summenregel findet man

$$\Gamma = \frac{\nu^2}{(2\pi)^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} c_{2n}}{2^{2/\nu+2} (1/\nu)! (1/\nu^2 + 3/\nu + 4)}. \quad (5.56)$$

### Korrelationsfunktionen für das gesamte Quasiloeh Spektrum

Bisher wurde nur der Fall eines Laughlin-Quasiloehs  $\psi_{\text{qh}} = e_N \cdot \psi_{\text{LN}}$  betrachtet. Im Folgenden soll von einem beliebigen Quasiloeh-Zustand mit Drehimpuls-Quantenzahl  $l_z$  ausgegangen werden, siehe Abschnitt 2.3.4. Arbeiten zu einer Erweiterung der MacDonald Methode für diese Zustände sind dem Autor nicht bekannt. Hier sollen die Grundlagen für eine solche gelegt werden und das oben entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Quasiloeh-Korrelationen für das gesamte Quasiloeh-Spektrum verallgemeinert werden. Es müssen nach wie vor die Bedingungen (i)-(iv) gelten, nicht jedoch (v). Es wird dann wieder der Ansatz

$$g_{\text{qh},l_z}^{(2)}(z_1 - z_2) = \underbrace{g_{\text{LN}}^{(2)}(z_1 - z_2) \rho_{\text{qh},l_z}(z_1) \rho_{\text{qh},l_z}(z_2)}_{=g_{\text{pp},l_z}^{(2)}(z_1 - z_2)} + g_{\text{corr},l_z}^{(2)}(z_1, z_2) \quad (5.57)$$

gemacht. Die Korrekturen  $g_{\text{corr},l_z}^{(2)}$  haben die Form (5.50), die durch die Koeffizienten  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  bestimmt wird. Gleichung (5.51) mit Koeffizienten  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  gilt nicht, nachdem (v) von einer allgemeinen Quasiloeh-Wellenfunktion nicht erfüllt wird.

Um den Hauptteil  $g_{\text{pp},l_z}^{(2)}$  zu bestimmen werden die Quasiloeh-Dichten benötigt. Diese sind gegeben durch

$$\rho_{\text{qh},l_z}(z) = \frac{\nu}{2\pi} \left( 1 - \frac{|z|^{2l_z^*}}{2^{l_z^*} \cdot l_z^{*!}} e^{-|z|^2/2} \right), \quad l_z = N - \nu \cdot l_z^* \quad (5.58)$$

was auf zwei unterschiedliche Arten hergeleitet werden kann. Die erste Methode nimmt naiv an, dass ein Quasiloeh einem freien fraktionalem Teilchen im Magnetfeld  $B_\perp$  entspricht (Bruchteil  $\nu$  eines ganzen Teilchens). Die zugehörige Wellenfunktion ist aus Abschnitt 2.1.2 bekannt,

$$\phi_{l_z^*}^{(\text{qh})}(z) = \bar{N}_{l_z^*} z^{l_z^*} e^{-|z|^2/4}, \quad (5.59)$$

wobei  $\bar{N}_{l_z^*}$  derart bestimmt ist, dass  $\phi_{l_z^*}^{(\text{qh})}$  einer *fraktionalem* Normierungsbedingung genügt,

$$\int d^2z |\phi_{l_z^*}^{(\text{qh})}|^2 = \nu, \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_{l_z^*} = \left( \frac{\nu}{2\pi 2^{l_z^*} \cdot l_z^{*!}} \right)^{1/2}. \quad (5.60)$$

Mit  $\rho_{\text{qh},l_z}(z) = \frac{\nu}{2\pi} - |\phi_{l_z^*}^{(\text{qh})}|^2$  folgt dann Gleichung (5.58).  $l_z^*$  darf dabei nur Vielfache von  $1/\nu$  annehmen, so dass der echte Vielteilchenzustand  $\psi_{\text{qh},l_z} = e_{l_z} \cdot \psi_{\text{LN}}$  einen korrekt quantisierten (d.h. ganzzahligen) Drehimpuls

$$L_z(\text{LN}, \nu) + N - \nu \cdot l_z^* \equiv L_z(\text{LN}, \nu) + l_z \quad (5.61)$$

besitzt. Hierbei wird berücksichtigt, dass der Drehimpuls  $L_z$  vom LN qh- Zustand ( $l_z = N$ ) ausgehend mit zunehmendem  $l_z^*$  erniedrigt wird.

Die zweite Herleitung geht von einer Verallgemeinerung der Darstellung des Quasiloeh-Zustandes (5.38) von MacDonald und Girvin [49] aus,

$$|\text{qh}, l_z^*, \nu\rangle = \prod_{n=\infty}^{l_z^*} (\hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n + 1 - \hat{n}_n) |\text{LN}, \nu\rangle. \quad (5.62)$$

Dabei werden Besetzungszahlkonfigurationen oberhalb von  $l_z^* - 1$  um eine Stelle verschoben, zum Beispiel

$$\prod_{n=\infty}^{l_z^*} (\hat{b}_{n+1}^\dagger \hat{b}_n + 1 - \hat{n}_n) \underbrace{|\circ \bullet \dots \circ \circ \bullet \circ \bullet \dots\rangle}_{l_z^*} = \underbrace{|\circ \bullet \dots \circ \circ \circ \bullet \bullet \dots\rangle}_{l_z^*}. \quad (5.63)$$

Wieder sind nur Fockzustände mit maximal einfacher Besetzung der einzelnen Plätze betrachtet. Damit der Erwartungswert  $\langle \text{qh}, l_z^*, \nu | \hat{L}_z | \text{qh}, l_z^*, \nu \rangle$  ganzzahlig wird, muss wieder  $l_z^* = (N - l_z) / \nu$  ein

Vielfaches von  $1/\nu$  sein<sup>3</sup>. Eine analoge Rechnung wie in [49] liefert dann wieder die gesuchte Gleichung (5.58). (5.63) kann außerdem für eine Verallgemeinerung der MacDonald Methode genutzt werden.

In zwei Grenzfällen kann die Quasiloeh-Dichte (5.58) exakt hergeleitet werden: Für  $l_z = N$  ergibt sich das Ergebnis von MacDonald (5.39), für  $\nu = 1$  sind die Rechnungen im Anhang 9.8 zu finden. Im Abschnitt 5.3.3 werden die numerisch bestimmten Dichten mit dem theoretischen Ergebnis verglichen und gute Übereinstimmung festgestellt.

Wie im Fall  $l_z = N$  lässt sich die Summenregel (5.53) ausnutzen, um den Einfluss der Korrekturterme abzuschätzen. Zerlegt man das Integral über  $g_{pp}^{(2)}$  in Summanden

$$I_1(\nu, l_z) = -\frac{\nu^2}{(2\pi)^2} \int d^2 Z d^2 z \left( g_{LN}^{(2)}(|z_1 - z_2|) - 1 \right) \left( |\phi_{l_z^*}^{(qh)}(z_1)|^2 + |\phi_{l_z^*}^{(qh)}(z_2)|^2 \right), \quad (5.64)$$

$$I_2(\nu, l_z) = \frac{\nu^2}{(2\pi)^2} \int d^2 Z d^2 z g_{LN}^{(2)}(|z_1 - z_2|) |\phi_{l_z^*}^{(qh)}(z_1)|^2 |\phi_{l_z^*}^{(qh)}(z_2)|^2, \quad (5.65)$$

so lässt sich herleiten,

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1/\nu}^{\infty} \gamma_{\alpha,\beta}^0 2^{2\beta} \beta! \alpha! = \frac{(\nu(\nu+1) - I_1 - I_2)}{(2\pi)^2}. \quad (5.66)$$

Die mit diesen Koeffizienten definierten Korrelationsfunktionen sind auf  $g^{(2)}(r \rightarrow \infty) \rightarrow \nu^2 / (2\pi)^2$  normiert. Weitere Aussagen über die Art der Korrekturen sind in diesem Fall schwierig, da keine analytischen Einschränkungen wie (v) für  $l_z = N$  vorliegen. Wie sich im folgenden Abschnitt jedoch herausstellen wird, reicht die gegebene Abschätzung für ein Verständnis der Energiekorrekturen.

## Berechnung der Anregungslücke

Die Anregungslücke (5.36) zerfällt nun in den Beitrag  $\Delta_{pp}$  vom Hauptteil der Korrelationsfunktion  $g_{pp}^{(2)}$  sowie Korrekturen  $\Delta_{corr}$ . Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei Methoden zur Berechnung von  $\Delta_{pp}$  entwickelt. Die erste beruht darauf, dass die Integrale für eine Wechselwirkung  $\mathcal{V}(r) = C_\gamma/r^\gamma$  mit einem cut-off bei  $r = \epsilon$  exakt berechnet werden können, siehe Anhang 9.7. Wählt man eine Superposition dieser Potentiale (mit verschiedenen  $\gamma, \epsilon$ ), so dass die relevanten Pseudopotentiale  $V_2, V_4, \dots$  mit denen der eigentlichen Wechselwirkung  $V(r) = C_6/(r^6 + a_B^6)$  hinreichend genau übereinstimmen, so lässt sich die Anregungslücke als Summe der einzelnen Lücken berechnen. Das zweite Verfahren ist numerisch weniger aufwendig und beruht darauf, möglichst viele Integrale exakt auszuwerten. Das übrige radiale Integral  $\int dr$  enthält dann noch die Wechselwirkung und

<sup>3</sup>Das folgt aus  $\langle LN | \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m | LN \rangle \approx \nu$  [49].

muss numerisch berechnet werden. Beispielsweise findet man für  $l_z^* = 0$  und  $\nu = 1/2$

$$\Delta_{\text{pp}} = \int_0^\infty dr \frac{e^{-\frac{3r^2}{8}} r}{393216} \left( r^8 - 960r^4 - 98304 \cosh\left(\frac{r^2}{4}\right) + 98304 \right) \left( 5 \sinh\left(\frac{r^2}{8}\right) + 3 \cosh\left(\frac{r^2}{8}\right) \right) V(r), \quad (5.67)$$

und für  $l_z^* = 2$  und  $\nu = 1/2$

$$\Delta_{\text{pp}} = \int_0^\infty dr \frac{rV(r)}{256\pi} \left( e^{-\frac{r^2}{2}} + e^{-\frac{r^2}{4}} \left( -\frac{r^8}{49152} + \frac{5r^4}{256} - 2 \right) + 1 \right) \left( \frac{1}{512} \pi e^{-\frac{r^2}{4}} (r^8 + 128r^4 + 6144) - 128\pi \right). \quad (5.68)$$

Für die Korrekturen lassen sich alle Integrationen einfach analytisch ausführen, und man erhält den einfachen Ausdruck

$$\Delta_{\text{corr}} = (2\pi)^2 \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=1/\nu}^{\infty} V_\beta \cdot \gamma_{\alpha,\beta}^0 \cdot \alpha! \beta! 2^{2\beta}. \quad (5.69)$$

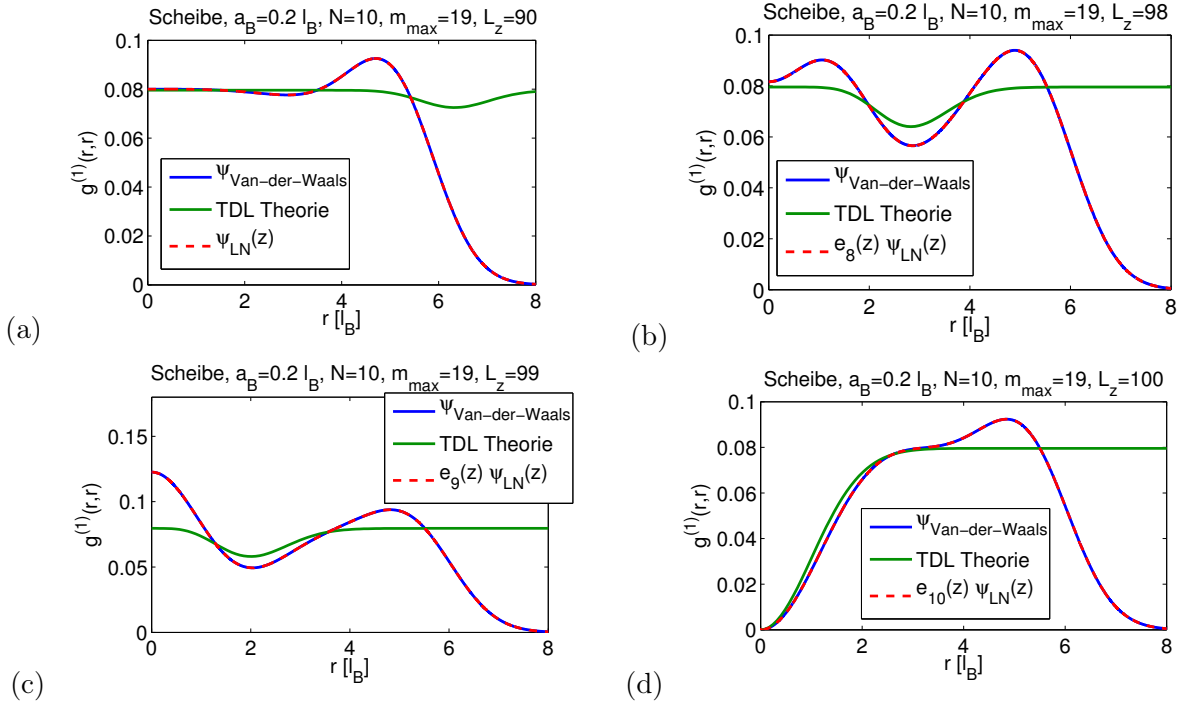
Dabei sind  $V_\beta$  die Pseudopotentiale auf der Scheibe (2.51). Es kommen auch ungerade Pseudopotentiale vor, nachdem in  $g_{\text{corr}}^{(2)}$  entsprechende Fehler von  $g_{\text{pp}}^{(2)}$  korrigiert werden können.

Aus dem Ausdruck (5.69) lässt sich ein wichtiger Schluss für die Form des Quasiloch-Spektrums ziehen. Der Zustand  $l_z^* = 0$  genügt der zusätzlichen Bedingung (v), woraus folgt, dass die Korrekturen von der in (5.51) angegebenen Form sind. Der zur Energie am meisten beitragende Korrekturterm  $\Gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  ist dann durch  $\Gamma_{0,1/\nu}^0 = \Gamma$  gegeben, und nach Gleichung (5.55) gibt es verschiedene  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$ -Terme, u.a. solche mit  $\beta = 2 + 1/\nu$ . Die Summenregel (5.54) erzwingt für  $l_z^* = 0$  folglich ein kleines  $\Gamma$ , um den großen Term  $\sim 2^{2\beta}\beta!$  für  $\beta = 2 + 1/\nu$  zu kompensieren. Dies bedeutet einen *kleinen* Beitrag von  $V_{1/\nu}$  in den Korrekturen für  $l_z^* = 0$ . Für  $l_z^* \neq 0$  kann die Summenregel (5.54) dagegen im allgemeinen mit großen  $\gamma_{0,1/\nu}^0$  erfüllt werden. Folglich gibt es auch größere Beiträge von  $V_{1/\nu}$  in  $\Delta_{\text{corr}}$ , und es ist zu erwarten, dass es für  $l_z^* \neq 0$  zu größeren Korrekturen als bei  $l_z^* = 0$  kommt.

Für  $l_z^* \neq 0$  lassen sich die Korrekturen der Anregungsenergie abschätzen, wenn man wie oben ausnutzt, dass wegen  $V_{1/\nu} \gg V_{m \geq 1/\nu+2}$  im wesentlichen  $\beta = 1/\nu$ -Terme relevant sind. Dann gilt

$$\Delta_{\text{corr}} \approx -V_{1/\nu} (I_1 + I_2 - \nu(\nu + 1)), \quad (5.70)$$

mit  $I_{1,2}$  aus (5.64), (5.65). Die so vorhergesagten Anregungsenergien werden im folgenden Abschnitt diskutiert und mit numerischen Resultaten verglichen.



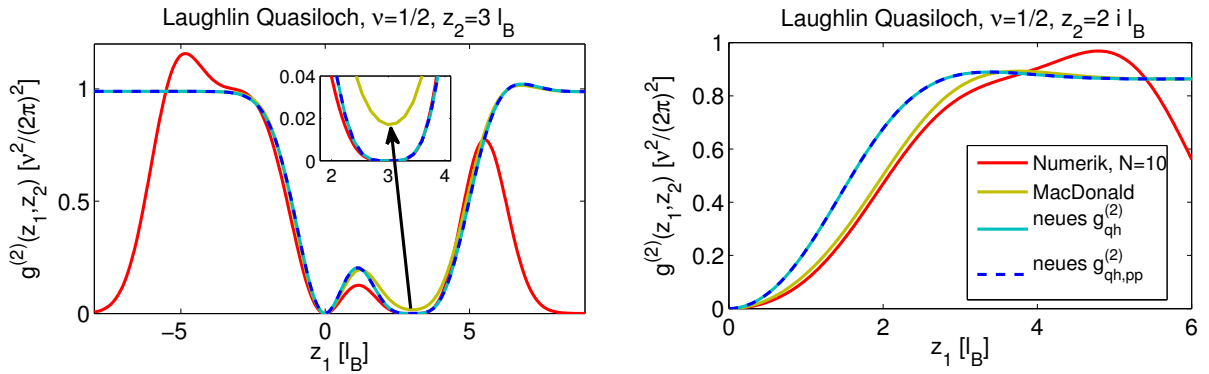
**Abbildung 5.10:** Dichten verschiedener Zustände im Quasiloch-Spektrum. Sie werden mit der analytischen Vorhersage (5.58) verglichen (TDL Theorie). (a)  $l_z = 0$  (LN- Zustand) (b)  $l_z = 8$  (c)  $l_z = 9$  (d)  $l_z = 10$  (LN qh- Zustand).

### 5.3.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die Annahmen und Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts 5.3.2 mit Hilfe der exakten Diagonalisierung kleiner Systeme überprüft werden.

#### Quasiloch Dichten

In Abbildung 5.10 werden die Quasiloch-Dichten (5.58) mit denen numerischer Ergebnisse für die Van-der-Waals Wechselwirkung  $C_6/(r^6 + a_B^6)$  sowie denen exakter Ansatz-Wellenfunktionen verglichen. Die theoretischen Kurven reproduzieren sehr genau die Lage der Dichte-Minima. Für den Fall  $l_z = N$  stimmt die Vorhersage in der Nähe des Dichteminimums sehr gut mit der Numerik überein. Die Abweichungen für kleinere  $l_z$  können durch zunehmende finite-size Effekte erklärt werden. So erreicht man für  $l_z = 0$  den LN-Zustand, und das "Quasiloch" befindet sich außerhalb des Quanten-Hall-Tropfens. In diesem Fall können Randeffekte nicht vernachlässigt werden. Es ist zu vermuten, dass die beobachteten Dichte-Oszillationen um den mittleren Bahnradius des Quasilochs auch im TDL existieren. Sie werden auch in der Dichte des Quasiloch-Zustandes auf der Sphäre gefunden. Dieser Effekt wird von den einfachen theoretischen Ansatz-Wellenfunktionen (5.62) jedoch nicht beschrieben.



**Abbildung 5.11:** Vergleich der verschiedenen  $g^{(2)}(z_1, z_2)$  Funktionen des LN Quasiloeh-Zustandes bei Füllung  $\nu = 1/2$ .  $z_1$  durchläuft jeweils die  $x$ -Achse. Links:  $z_2 = 3$ , rechts:  $z_2 = 2i$ .

### Korrelationsfunktionen

In Abbildung 5.11 und 5.12 werden die beiden theoretischen Korrelationsfunktionen (MacDonalds  $g^{(2)}$  sowie der hier gemachte Vorschlag (5.51)) mit numerischen Ergebnissen verglichen. Letztere wurden durch ED von  $N = 10$  Teilchen bei Füllung  $\nu = 1/2$  erhalten. Beide analytischen Korrelationsfunktionen liefern qualitativ richtige Ergebnisse, die im Bereich des bulks gut mit der Numerik übereinstimmen.

Zur Berechnung der Quasiloeh-Energie ist das Verhalten für kleine Relativabstände  $|z_1 - z_2| \approx 0$  entscheidend. Aus dem Inset in 5.11 (links) ergibt sich ein endlicher Wert für  $g_{\text{MacDonald}}^{(2)}(z_1 = z_2) \neq 0$ . Dies führt zu großen Fehlern in  $|\Delta g^{(2)}(z_1, z_2)| / (|z_1 - z_2|^6 + a_B^6)$  (siehe Abbildung 5.12) und folglich zu großen Abweichungen der Quasiloeh-Energie vom tatsächlichen Wert. Daher ist die neue Korrelationsfunktion der MacDonaldischen vorzuziehen.

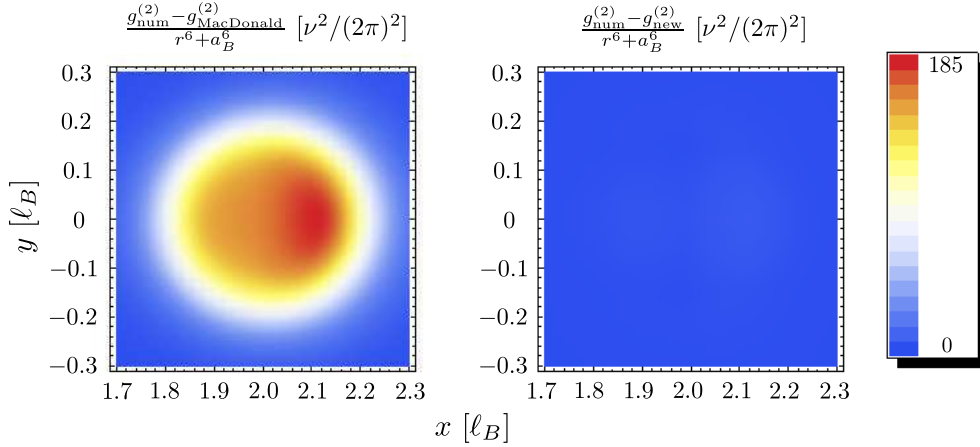
Zwischen der Quasiloeh-Position  $\xi = 0$  und  $z_2$  stimmen die Vorhersagen beider analytischer Funktionen überein, ihr Wert weicht allerdings signifikant vom numerischen Ergebnis ab. Möglicherweise ist dies ein finite-size Effekt. Liegen  $z_1$  und  $z_2$  nicht auf einer Achse, die radial vom Quasiloeh weg zeigt, so verschlechtern sich die Vorhersagen der neuen Korrelationsfunktion, siehe Abbildung 5.11 (rechts).

Im Anhang 9.9 werden außerdem die entsprechenden Korrelationsfunktionen für Füllung  $\nu = 1/4$  verglichen und analoge Schlussfolgerungen gezogen.

### Anregungslücken

Die Anregungslücken des Quasiloeh-Spektrums im TDL können numerisch durch finite-size Approximationen bestimmt werden. In Abbildungen 5.13 sind die Ergebnisse der Scheiben- und Kugelgeometrie für halbe Füllung  $\nu = 1/2$  zusammengefasst. Für die Scheibengeometrie werden die Anregungslücken zum LN Quasiloeh-Zustand  $e_N \psi_{\text{LN}}$  sowie zum Quasiloeh-Zustand minimaler Energie  $e_n \psi_{\text{LN}}(z)$  mit  $n + L_z(\text{LN}) = L_z(\text{min})$  untersucht. Die numerisch bestimmten Kurven zeigen wegen





**Abbildung 5.12:** Vergleich der zur Berechnung der Anregungslücke relevanten Größe  $|\Delta g^{(2)}(z_1, z_2)| / (|z_1 - z_2|^6 + a_B^6)$  für die MacDonaldsche (links) und die neu vorgeschlagene (rechts) Korrelationsfunktionen  $g^{(2)}$ . Beide Funktionen werden mit dem durch ED bestimmten exakten Resultat für  $N = 10$  Teilchen verglichen. Es ist jeweils  $a_B = 0.2\ell_B$  und  $z_2 = 2\ell_B$  gewählt. Die MacDonaldsche liefert im Vergleich zur neuen Methode bei der Berechnung der Quasiloch-Energie große Fehler.

starker finite-size Effekte zunächst kein klares Konvergenzverhalten. Es wird angenommen, dass die finite-size Effekte ab  $N \approx 7$  eine untergeordnete Rolle spielen, so dass die Anregungslücken im TDL durch lineare Fits an die letzten vier Datenpunkte  $N = 7, 8, 9, 10$  bestimmt wurden. In der Kugelgeometrie sind alle Quasiloch-Zustände entartet, und ihre Energie (relativ zum LN-Zustand) zeigt wesentlich schwächere finite-size Effekte. Deren größter Anteil ist durch die im Abschnitt 5.1.2 diskutierte Abweichung der Dichte vom Wert im TDL gegeben und kann analog eliminiert werden. Dazu wird die Energie des LN-Zustandes sowie des Quasiloch-Zustandes mit Hilfe der renormierten magnetischen Länge  $\ell_B^\infty$  (siehe Gleichung (5.18)) in Einheiten von  $C_6 / (\ell_B^\infty)^6$  ausgedrückt. Dabei muss jedoch für den Quasiloch-Zustand die magnetische Länge, die zur Unterscheidung von der für den LN-Zustand verwendeten Größe, mit  $\ell'_B$  bezeichnet sei, so renormiert werden, dass die tatsächliche Dichte des Quasiloch-Zustandes an Orten, die *nicht* in der Nähe des Quasilochs liegen, durch den TDL Wert  $\nu / (2\pi (\ell_B^\infty)^2)$  gegeben ist. Dies folgt aus der Beobachtung, dass ein Quasiloch dem *lokalen* Fehlen eines Bruchteils  $\nu$  eines Teilchens entspricht, und ist aus dem theoretischen Ausdruck für die Quasiloch-Dichte (Gleichung (5.39)) ersichtlich. Damit gilt

$$\rho = \frac{N + \nu}{2Q} \cdot \frac{1}{2\pi (\ell'_B)^2} = \frac{\nu}{2\pi (\ell_B^\infty)^2}, \quad (5.71)$$

und es folgt die zu (5.18) äquivalente Gleichung,

$$\ell'_B \rightarrow \ell_B^\infty = \sqrt{\frac{2Q\nu}{N + \nu}} \ell'_B. \quad (5.72)$$

In Abbildung 5.13 ist die so bestimmte Anregungslücke in der Legende mit  $\ell_B^\infty$  bezeichnet. Man erkennt, dass die zugehörigen Datenpunkte deutlich reduzierte finite-size Effekte zeigen und näherungsweise linear in  $1/N$  skalieren.

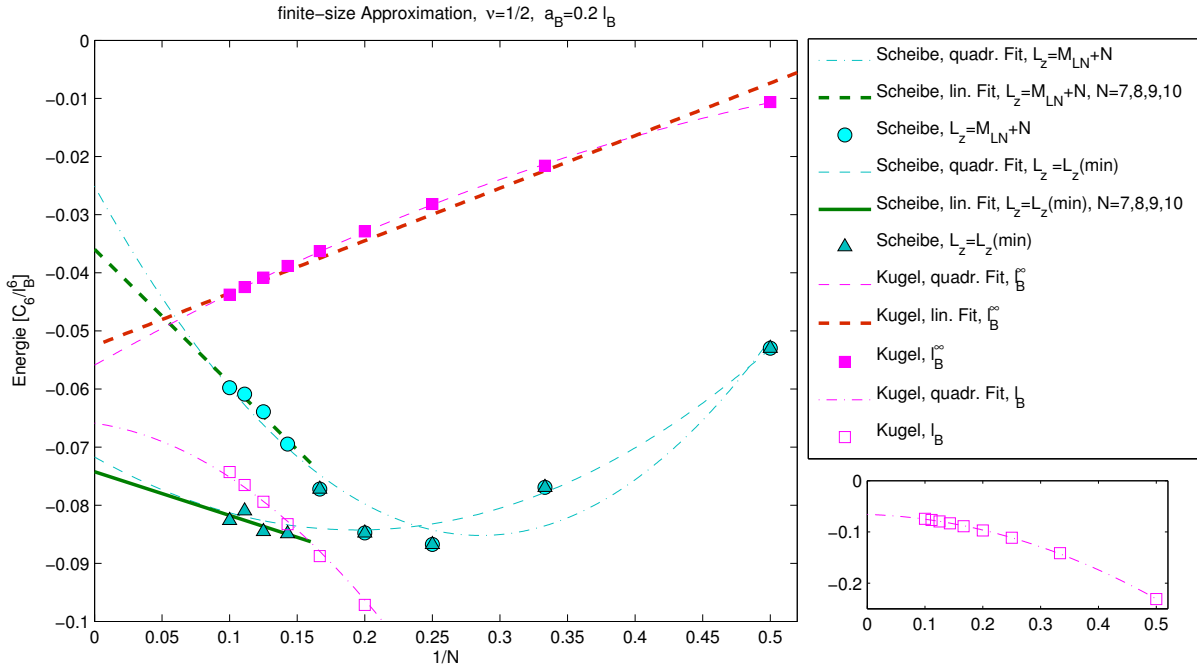
In Abbildung 5.14 sind die finite-size Approximationen für Füllung  $\nu = 1/4$  gezeigt. Die Bezeichnungen sind die des bereits diskutierten Falls  $\nu = 1/2$ . In der Kugelgeometrie zeigt die reskalierte Anregungslücke wieder deutlich reduzierte finite-size Effekte und skaliert linear in  $1/N$ . In der Scheibengeometrie sind die Ergebnisse weniger eindeutig, und finite-size Effekte spielen im gesamten erreichbaren Parameterbereich  $N = 2, \dots, 7$  eine wichtige Rolle. Es ist daher nicht möglich einen verlässlichen Wert für die Anregungslücke im TDL mit Hilfe der Scheibengeometrie anzugeben. Man erkennt außerdem, dass die Energiedifferenz zwischen dem LN Quasiloach-Zustand  $e_N(z)\psi_{LN}(z)$  und der minimalen Energie innerhalb des Quasiloach-Spektrums mit steigendem  $N$  stark zunimmt. Dieser Effekt ist auf die Existenz von Randanregungen anderer FQHE Zustände zurückzuführen, die zu weiteren niederenergetischen Zuständen führen. So liegt der Grundzustand in einem System der Größe eines  $\nu = 1/4$  Quasiloachs bei einem Drehimpuls  $L_z > L_z(LN) + N$  und kann somit nicht im Rahmen der  ${}^3\text{CF}$  Theorie des  $\nu = 1/4$  LN- Zustandes verstanden werden. Das zugehörige Spektrum ist in den Abbildungen 5.15 (links) gezeigt.

In Abbildung 5.16 werden bei  $\nu = 1/2$  die numerischen Ergebnisse für verschiedene Blockaderadien mit den theoretischen Werten aus dem vorangegangenen Abschnitt verglichen. Die Anregungslücke zum LN Quasiloach-Zustand ( $l_z = N$ ) wird sehr gut durch die in dieser Arbeit entwickelte Theorie beschrieben. Die minimale Energie im Quasiloach-Spektrum wird gut durch die Anregungslücke  $\Delta$  beschrieben. Man kann sich leicht klar machen, dass  $\Delta$  eine untere Schranke für die Anregungsenergie eines Zustandes im Quasiloach-Spektrum ist. Geht man vom LN Quasiloach-Zustand aus, so kann die Dichte um die Quasiloach-Position  $\xi = 0$  wieder erhöht werden. Die hierfür zu  $\xi = 0$  hingeführten Teilchen spüren wegen der kleinen Dichte dort zunächst nur eine schwache Wechselwirkung. Im Extremfall verschwindender Wechselwirkung und weil maximal  $\nu$  Teilchen nachgeführt werden können, folgt

$$\Delta_N^{\min} > \Delta_N - \nu\epsilon_0 \equiv \Delta. \quad (5.73)$$

Die Tatsache, dass die minimale Quasiloach-Energie so nahe bei  $\Delta$  verläuft, ist vermutlich durch zusätzliche finite-size Effekte zu erklären. Diese nehmen bei dem gedachten Zurückführen von Teilchen an die Position  $\xi = 0$  zu, nachdem sich das Verhältnis von Rand zu Fläche vergrößert. Die eingeführten Korrekturen liefern für  $l_z^* = 2, 4, \dots$  zu kleine Werte um die minimale Quasiloach-Energie zu erklären, was wiederum auf finite-size Effekte hindeutet. So liefern diese Korrekturen eine gute Beschreibung für die Anregungslücke auf der Kugel, wo finite-size Effekte deutlich reduziert sind. Dass die Quasiloach-Energie auf der Kugel in etwa mittig innerhalb des Quasiloach-Spektrums der Scheibe liegt, ist zu erwarten, nachdem das Quasiloach auf der Kugel nirgends eine verschwindende Dichte aufweist.

Die oben eingeführte neue analytische Form der Quasiloach-Korrelationsfunktion ist nicht nur in



**Abbildung 5.13:** Finite-size Approximation für die Anregungslücken im  $\nu = 1/2$  Quasiloch-Spektrum. Der Blockaderadius beträgt dabei  $a_B = 0.2\ell_B$ . Unten rechts ist das Verhalten der unkorrigierten Anregungslücke ( $\ell_B$ ) der Kugelgeometrie gezeigt.

der Lage für moderate  $a_B$  die Anregungslücke zum Quasiloch vorherzusagen, sondern sie liefert auch das korrekte Skalierungsverhalten mit  $a_B \rightarrow 0$ . In Abbildung 5.15 (rechts) wird gezeigt, dass die Anregungslücke  $\Delta_N$  wie  $\log(a_B)$  skaliert, also wie das Pseudopotential  $V_2$ . Dies steht im Widerspruch zum Skalierungsverhalten der MacDonald Methode (5.47) und zeigt dass die neue Korrelationsfunktion vorzuziehen ist, sobald stark divergente Potentiale betrachtet werden.

In Abbildung 5.17 werden bei  $\nu = 1/4$  die numerischen Ergebnisse auf der Kugel mit den theoretischen Rechnungen verglichen. Die Abschätzung der Quasiloch-Energie nach unten (5.73) wird dabei bestätigt. Die tatsächliche Anregungslücke  $\Delta_N$  liefert hier allerdings zu kleine Ergebnisse, wie auch die Ausdrücke für  $l_z^* = 2, 4, \dots$ -Zustände unter Einbeziehung weiterer Korrekturen. Als Grund für diese Abweichungen kommt nicht in Frage, dass der Grundzustand nicht exakt der LN-Zustand ist. Die Variationsenergie des *exakten* LN- Zustandes weicht für die betrachteten Teilchenzahlen nur um ca. 0.1% von der tatsächlichen Grundzustandsenergie ab. Es ist daher zu vermuten, dass der hier eingeführte analytische Ausdruck für die Korrelationsfunktion nicht hinreichend genau ist, um den exakten Wert der Quasilochenergie bei  $\nu = 1/4$  zu berechnen. Die Größenordnung der Vorhersage stimmt jedoch.

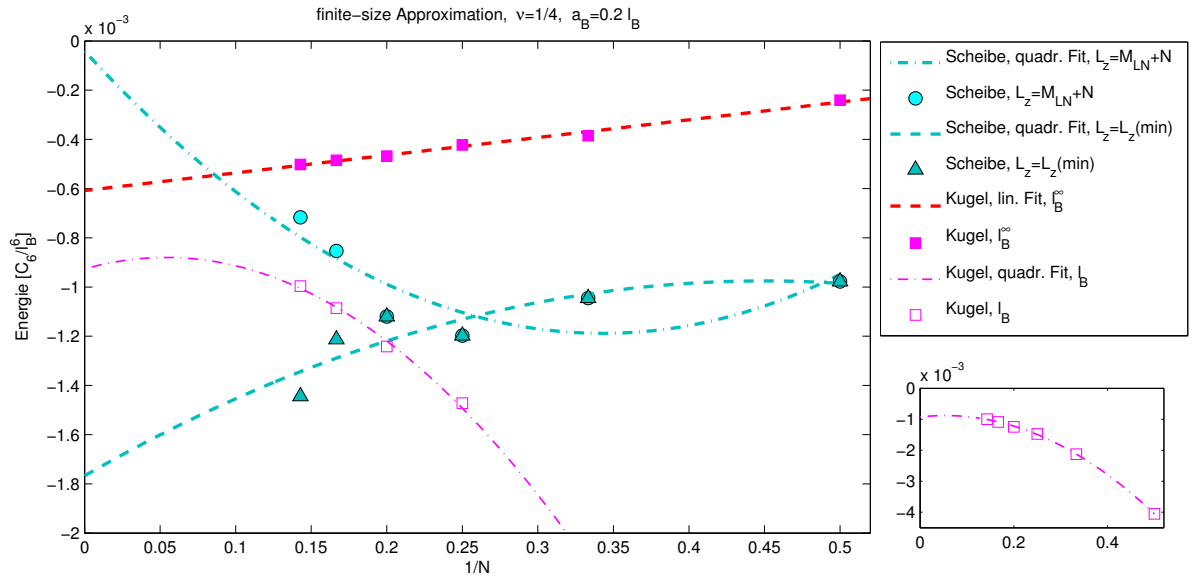


Abbildung 5.14: Wie Abbildung 5.13, jedoch für Füllung  $\nu = 1/4$ .

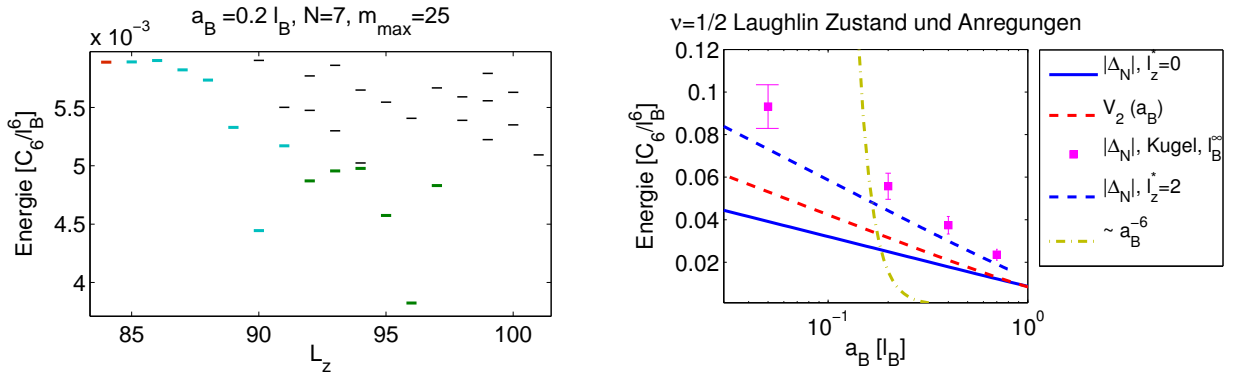
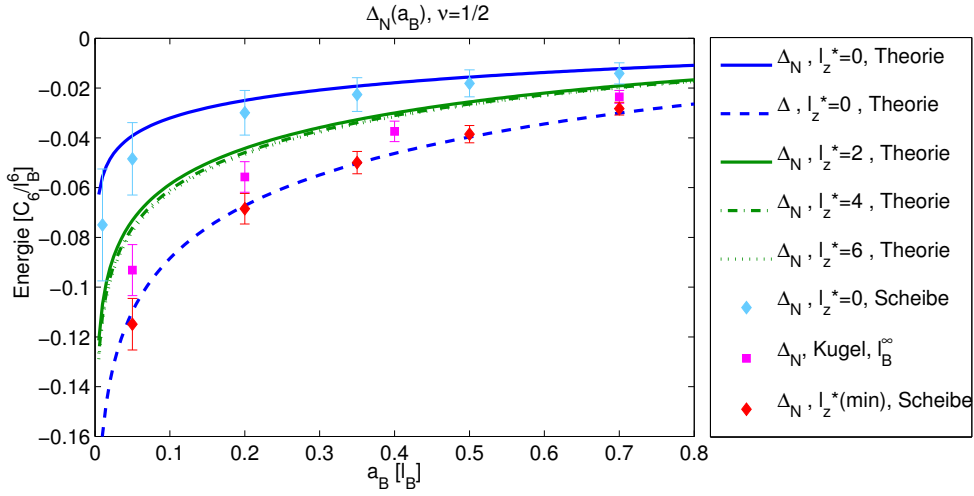
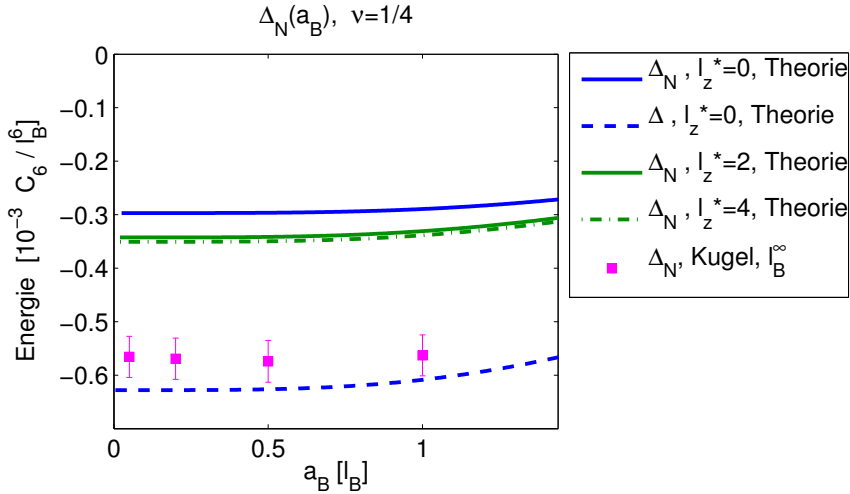


Abbildung 5.15: *Links*: Spektrum des Systems bei einer Größe  $m_{\max} = m_{\max, \text{LN}} + 1 = m_{\max, 1 \times \text{qh}}$  des ein-Quasiloche Zustandes. Rot:  $\nu = 1/4$  LN Zustand, türkis: Quasiloche-Spektrum, grün: weitere niederenergetische Randanregungen. *Rechts*: Vergleich des Skalierungsverhaltens der Anregungslücke  $\Delta_N(a_B)$  mit dem des Pseudopotentials  $V_2(a_B)$  sowie den theoretischen Berechnungen. Außerdem ist das aus der MacDonald Methode erwartete Skalierungsverhalten  $\sim a_B^{-6}$  gezeigt, (5.47). Der Blockaderadius  $a_B$  ist dabei logarithmisch aufgetragen, so dass linearer Kurvenverlauf auf ein Skalierungsverhalten  $\sim \log(a_B)$  schließen lässt.



**Abbildung 5.16:** Anregungslücke zum Quasiloch bei halber Füllung  $\nu = 1/2$ . Die Fehlerbalken bei  $l_z^* = 0$  sind definiert als Betrag der Differenz zwischen dem linearen Fit der Punkte  $N = 7, \dots, 10$  und dem quadratischen Fit aller Punkte, die für die Kugel als Betrag der Differenz zwischen dem linearen und dem quadratischen Fit aller Punkte und die bei  $l_z^*(\min)$  als Betrag der Differenz zwischen dem linearen Fit bei  $N = 7, \dots, 10$  und  $N = 7, 8, 9$ .



**Abbildung 5.17:** Anregungslücke zum Quasiloch bei Füllung  $\nu = 1/4$ . Die Fehlerbalken für die Kugel sind definiert als Betrag der Differenz zwischen dem linearen und dem quadratischen Fit aller Punkte.

## 5.4 Zusammenfassung

Die Grundzustandsenergie der bosonischen Laughlin-Flüssigkeit skaliert wie  $V_2$  und lässt sich mit Hilfe der bekannten Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion berechnen. Mit Hilfe der *GMP-Theorie* kann für bosonische Systeme der Füllung  $\nu = 1/2$  aus den Grundzustandseigenschaften die Energie neutraler Anregungen (d.h. das *Exziton-Spektrum*) angegeben werden. Sie skaliert wie  $V_0$ , der in realistischen Systemen größten Energieskala. Für kleinere Füllungen  $\nu \leq 1/4$  muss die GMP-Dichtewelle durch CF-Exzitonen ersetzt werden, um neutrale Anregungen korrekt zu beschreiben. Deren Energie wurde hier aus einer GMP-Rechnung für Komposit-Bosonen näherungsweise bestimmt.

Die Anregungslücke vom Laughlin- zum Quasiloche-Zustand bei konstanter Teilchenzahl ist negativ,  $\Delta_{\text{qh}} < 0$ . Das heißt, ohne Ladungs-Hintergrund- Wechselwirkung oder externe Fallenpotentiale sind Laughlin-Zustände wegen der betrachteten repulsiven Wechselwirkung instabil gegenüber Verdünnung (Bildung "geladener" Quasilöcher (qh)). Dies ändert sich, wenn (externe) Potentiale oder attraktive langreichweitige Wechselwirkungen betrachtet werden. Die Energie  $\Delta_{\text{qh}}$  solcher qh-Zustände skaliert wie  $V_2$ , und ist wichtig zur Abschätzung ihrer Kontrollierbarkeit. Das übliche Verfahren von MacDonald und Girvin [49] zur Berechnung von  $\Delta_{\text{qh}}$  liefert für stark divergente Wechselwirkungen eine divergente Anregungslücke. In diesem Kapitel wurde daher ein neues Verfahren entwickelt, welches das korrekte Skalierungsverhalten liefert und darüber hinaus numerisch wesentlich einfacher zu handhaben ist.

Alle analytisch berechneten Energien wurden detailliert mit numerischen Ergebnissen verglichen. Das Skalierungsverhalten mit den relevanten Pseudopotentialen  $V_{0,2}$  konnte in allen Fällen bestätigt werden, und quantitativ liegen die Vorhersagen weniger als 10% neben den aus finite-size Approximationen gewonnenen numerischen Resultaten.

## 6 Kristalline Grundzustände

Für kleine Füllungen spielen die langreichweitigen Anteile der Wechselwirkung eine zunehmende Rolle, was im Verhältnis aufeinanderfolgender Pseudopotentiale zum Ausdruck kommt,

$$\text{für } m \rightarrow \infty : \quad 1 - \frac{V_{m+2}}{V_m} \sim \frac{6}{m} \rightarrow 0. \quad (6.1)$$

Für kleine Füllfaktoren wurden vor der Entdeckung des FQHEs *kristalline Zustände* als mögliche Grundzustandskandidaten vorgeschlagen [48]. In elektronischen (Coulomb) Systemen wurde ein Übergangspunkt von einer Laughlin-Flüssigkeit zu einem Kristall im LLL bei  $\nu_c \approx 1/7$  gefunden<sup>1</sup> [43]. Für dipolare Fermionen wurde ebenfalls ein stabiler Wigner-Kristall (WC) bei  $\nu < \nu_c \approx 1/7$  vorhergesagt [6]. In diesem Kapitel wird der Frage nach dem kritischen Füllfaktor für Van-der-Waals wechselwirkende Bosonen nachgegangen.

Für die Punktwechselwirkung ist die LN-Flüssigkeit der exakte Grundzustand, so dass auch hier für  $a_B \rightarrow 0$  (d.h. für divergierende Pseudopotentiale  $V_0$  und  $V_2$ ) diese Zustände (für  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ) zu exakten Eigenzuständen der Van-der-Waals Wechselwirkung werden. Es stellt sich demnach die Frage, was der Effekt eines endlichen Blockaderadius  $a_B$  ist und ob für große  $a_B$  noch immer die LN-Flüssigkeit den Grundzustand beschreibt.

### 6.1 Nicht-korrelierter Wigner-Kristall

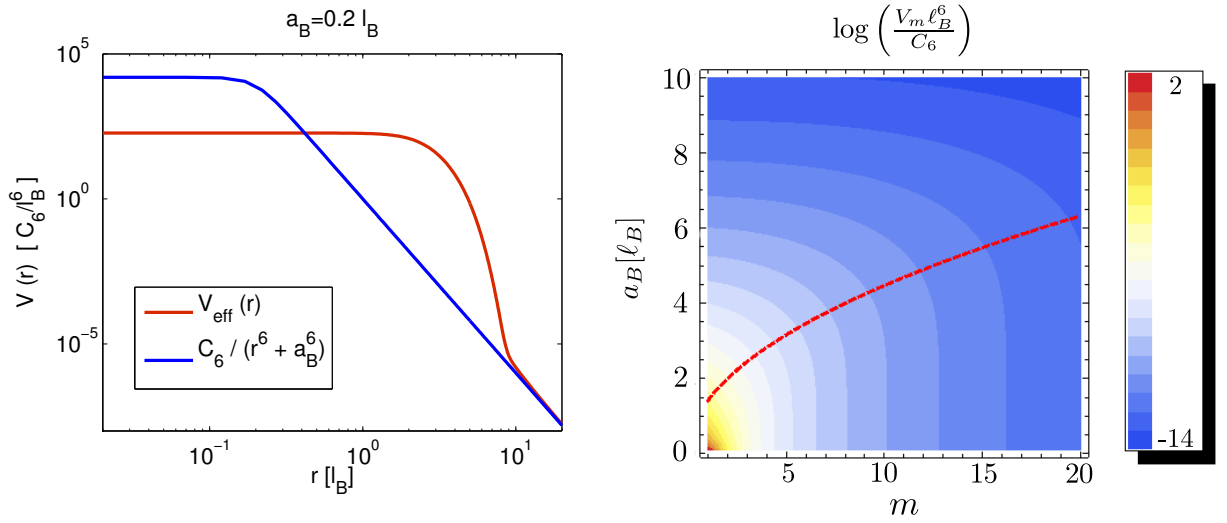
Der *nicht-korrelierte Wigner-Kristall* [77] im untersten LL ist definiert durch [50]

$$\psi_{\text{WC}}[z] = \mathcal{S} \prod_j \exp \left[ - (|z_j - R_j|^2 + z_j R_j^* - z_j^* R_j) / 4 \right], \quad (6.2)$$

wobei  $\mathcal{S}$  für die (für Bosonen nötige) vollständige Symmetrisierung steht. Die Vektoren  $R_j \in \mathbb{C}$  definieren das Kristallgitter. Die Faktoren

$$\exp \left[ - (|z - \rho|^2 + z \rho^* - z^* \rho) / 4 \right] = \exp \left[ -\frac{1}{4} |z - \rho|^2 + i (\mathbf{z} \times \rho) \cdot \mathbf{e}_z \right] \equiv \sqrt{2\pi} \phi_\rho(z) \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>Die genaue Lage dieses Punktes ist nicht bekannt. Verschiedene theoretische Rechnungen liefern unterschiedliche  $\nu_c$ , und auch experimentell gibt es an verschiedenen Stellen Hinweise auf einen kristallinen Grundzustand.



**Abbildung 6.1:** *Links:* Vergleich des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}(r)$  für die Berechnung der Variationsenergie des WCs mit dem ursprünglichen Potential  $V(r) = \frac{C_6}{r^6 + a_B^6}$  für die Quantenteilchen. *Rechts:* Pseudopotentiale für verschiedene Blockaderadien. Die gestrichelte Linie  $a_B = \sqrt{2m} \ell_B$  trennt den Bereich konstanter Pseudopotentiale  $V_1 \approx \dots \approx V_m$  vom Bereich stark fallender Pseudopotentiale  $V_m > V_{m+1} > \dots$

sind kohärente Zustände (bzgl.  $\hat{b}$ ) im LLL, d.h. es gilt

$$\hat{a}\phi_\rho = 0, \quad \text{und} \quad \hat{b}\phi_\rho = \frac{\rho^*}{\sqrt{2}}\phi_\rho. \quad (6.4)$$

Aus der rechten Gleichung für  $\phi_\rho$  in (6.3) sieht man, dass  $\psi_{\text{WC}}$  lokalisierte Zustände auf dem Gitter  $R_j$  beschreibt. Die zugehörige Variationsenergie (pro Teilchen) dieses WCs beträgt

$$\epsilon_{\text{WC}} = \frac{\langle \psi_{\text{WC}} | \sum_{i \neq j} \frac{C_6}{r^6 + a_B^6} | \psi_{\text{WC}} \rangle}{N \cdot \langle \psi_{\text{WC}} | \psi_{\text{WC}} \rangle}. \quad (6.5)$$

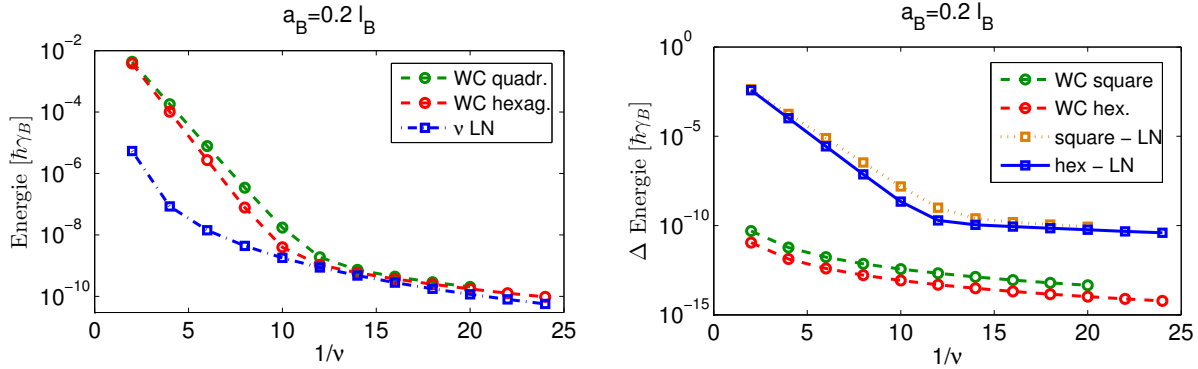
Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Berechnung für Fermionen [50] auf Bosonen verallgemeinert und unter Einbeziehung der Austauschsterme gefunden, dass gilt

$$\epsilon_{\text{WC}, \pm} = \frac{1}{2} \frac{C_6}{\ell_B^6} \sum_{j \neq 0} \frac{e^{-|R_j|^2/4}}{1 \pm e^{-|R_j|^2/2}} \int_0^\infty dr \frac{r e^{-r^2/4}}{r^6 + a_B^6} \left( I_0 \left( \frac{r|R_j|}{2} \right) \pm J_0 \left( \frac{r|R_j|}{2} \right) \right), \quad (6.6)$$

wobei für Bosonen (Fermionen) “+” (“−”) verwendet werden muss.  $j$  steht dabei für einen Gitterplatz, der durch zwei Indizes  $i_x, i_y$  charakterisiert ist. Für ein hexagonales Gitter gilt

$$R_{j=(i_x, i_y)} = a_0 \left( i_x + \frac{1}{2} i_y + i \frac{\sqrt{3}}{2} i_y \right), \quad |R_j|^2 = a_0^2 (i_x^2 + i_y^2 + i_x i_y), \quad a_0 = \sqrt{\frac{4\pi \ell_B^2}{\sqrt{3}\nu}}. \quad (6.7)$$





**Abbildung 6.2:** *Links:* Vergleich der Grundzustandsenergie pro Teilchen des LN-Zustandes mit der zweier nicht-korrelierter WCs (quadratisches und hexagonales Gitter). *Rechts:* Vergleich der erwarteten numerischen Fehler in der Kristallenergie mit den Differenzen zwischen WC und LN-Zustand.

Die Summe  $\sum_{j \neq 0}$  kann dann numerisch ausgewertet werden. Das hexagonale Gitter ist für dipolare Fermionen [6] und Elektronen [50] energetisch bevorzugt und wird daher auch für die betrachtete Van-der-Waals Wechselwirkung als Grundzustand erwartet.

Gleichung (6.6) beschreibt die Energie eines klassischen Kristalls, wobei die Teilchen durch ein effektives Potential  $V_{\text{eff}}$  wechselwirken. Dieses wird derart aus (6.6) bestimmt, dass gilt

$$\epsilon_{\text{WC}} = \sum_{j \neq 0} V_{\text{eff}}(|R_j|). \quad (6.8)$$

Für große  $R_j$  verhält sich dieses Potential wie  $\frac{C_6}{|R_j|^{6+a_B^6}}$ , nachdem unter diesen Voraussetzungen Korrelationseffekte vernachlässigt werden können. Diese führen jedoch bei kleinen Abständen  $R_j \lesssim a_B$  zu einem reduzierten, verbreiterten Potential, siehe Abbildung 6.1.

### 6.1.1 Vergleich mit der Laughlin-Flüssigkeit

Die Energie der LN-Flüssigkeit ist durch die Pseudopotentiale bestimmt, siehe Abschnitt 5.1. In Abbildung 6.1 (rechts) sind diese für verschiedene  $m$  und  $a_B$  gezeigt. Da das Potential  $C_6/(r^6 + a_B^6)$  für  $r < a_B$  näherungsweise konstant ist, sind die Pseudopotentiale  $V_m$  mit Relativabstand-Wellenfunktionen der Ausdehnung  $R_m = \sqrt{2m}l_B < a_B$  (siehe Gleichung 2.18) ebenfalls näherungsweise konstant (bzgl.  $m$ ). Für größere  $m$  fällt das Potential  $\sim 1/r^6$  ab, und damit auch die zugehörigen  $V_m$ . Die zwei so charakterisierten Bereiche sind also durch  $a_B = \sqrt{2m}l_B$  getrennt, siehe gestrichelte Linie in Abbildung 6.1 (rechts).

In Abbildung 6.2 (links) wird die Energie des WC mit der der LN-Flüssigkeit bei  $a_B = 0.2l_B$  verglichen. Dabei sind auch Rechnungen für ein quadratisches Kristallgitter gezeigt, die erwartungsgemäß über dem hexagonalen Gitter liegen. Man erkennt, dass hier *kein* Übergang zum WC stattfindet. In Abbildung 6.2 (rechts) wird die Energiedifferenz der beiden Grundzustandskandi-

daten gezeigt und mit den erwarteten numerischen Fehlern bei der Summation (6.8) verglichen. Weil das effektive Potential wie  $1/r^6$  abfällt und  $\sum_j 1/j^6$  sehr schnell konvergiert, sind die Fehler um einige Größenordnungen kleiner als die Energiedifferenzen. Als Energieeinheit wurde hier  $\gamma_B$  verwendet, was aber für festen Blockaderadius direkt mit  $C_6/\ell_B^6$  zusammenhängt (siehe (4.3)).

In Abbildung 6.3 (links) ist das  $T = 0$  Phasendiagramm gezeigt, das sich aus einem Vergleich der Grundzustandsenergien ergibt. Für große Blockaderadien  $\gtrsim 3\ell_B$  findet man Parameter-Regionen  $(\nu, a_B)$ , in denen ein nicht-korrelierter WC energetisch bevorzugt ist. In Gebieten (stark) monoton fallender Pseudopotentiale, die wie in Abbildung 6.1 (rechts) durch  $a_B = \sqrt{2/\nu}\ell_B$  charakterisiert sind, bildet erwartungsgemäß der LN-Zustand den Grundzustand. In Gebieten (näherungsweise) gleicher Pseudopotentiale ist im allgemeinen der WC energetisch günstiger, da er im Gegensatz zur LN-Flüssigkeit gleichzeitig den Effekt aller relevanter Pseudopotentiale  $V_0 \approx V_2 \approx \dots$  berücksichtigen kann. Dies ist daraus ersichtlich, dass dort  $V_{\text{eff}}(r) < \frac{C_6}{r^6 + a_B^6}$  gilt, siehe Abbildung 6.1 (links). Man findet jedoch einen Streifen, in dem die LN-Flüssigkeit energetisch günstiger ist, was auf das verschiedene Skalierungsverhalten mit  $m$  von  $V_{\text{eff}}(R(\nu = 1/m))$  und  $V_m$  in diesem Bereich zurückgeführt werden kann.

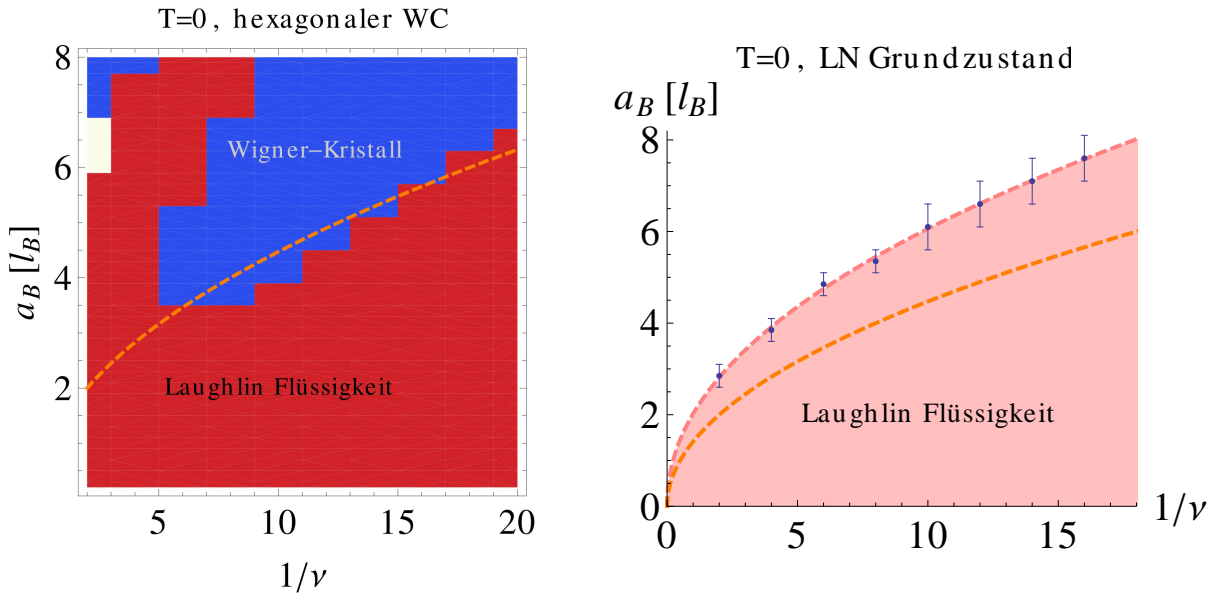
Wie eingangs erwähnt, findet man für dipolare Fermionen einen Übergang zum WC bei  $\nu_c \approx 1/7$  [6]. Für dipolare Bosonen ist das erste Pseudopotential divergent, so dass es sinnvoll ist, eine regularisierte Wechselwirkung  $\sim 1/(r^3 + a_B^3)$  zu betrachten. Die oben entwickelten Verfahren erlauben eine einfache Auswertung, und man findet z.B. für  $a_B = 2\ell_B$  einen Phasenübergang von der LN-Flüssigkeit zum WC bei  $\nu_c(a_B = 2\ell_B) \approx 1/6$ . Dies deutet darauf hin, dass nicht die Quantenstatistik, sondern im wesentlichen die Form der Wechselwirkung die kritische Füllung  $\nu_c$  bestimmt.

### 6.1.2 Korrelierter Wigner-Kristall

Wie bereits erwähnt, hat der nicht-korrelierte Wigner-Kristall den Vorteil, dass er gleichzeitig den Effekt mehrerer Pseudopotentiale berücksichtigt. Die LN-Flüssigkeit kann dagegen einzelne Pseudopotentiale vollständig abschirmen. Für sehr kleine Füllfaktoren liegt es daher nahe, die Vorteile beider Systeme zu vereinen und gemäß (6.2) Wigner-Kristalle aus Komposit-Teilchen zu bilden. Dies liefert den *korrelierten Wigner-Kristall* [81],

$$\psi(z_1, \dots) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^\mu \Phi_{\text{CP}}(z_1, \dots), \quad \Phi_{\text{CP}}(z_1, \dots) = \psi_{\text{WC}}(z_1, \dots) \quad \text{bei } \nu^*. \quad (6.9)$$

Solche korrelierten Zustände liefern in Coulomb Systemen größere Überlappe mit den exakten Grundzuständen und liegen energetisch unterhalb des nicht-korrelierten WC [81]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden derartige Zustände nicht im Detail untersucht, nachdem aufwendige Monte-Carlo Integrationen der Ansatz-Wellenfunktionen durchgeführt werden müssten. Es wird allerdings prinzipiell ein Übergang zum korrelierten WC erwartet, nachdem die effektiven Pseudopotentiale



**Abbildung 6.3:** *Links:* Analytisches  $T = 0$  Phasendiagramm im TD-L. Rot: LN-Flüssigkeit, Blau: WC. Im weißen Bereich ist der numerische Fehler in der Berechnung der WC Energie größer als der halbe Abstand zwischen WC und LN-Flüssigkeit. Die gestrichelte Linie  $a_B = \sqrt{2/\nu}l_B$  trennt die Bereiche konstanter und stark fallender Pseudopotentiale. *Rechts:* Numerisch (aus Überlappen auf der Kugel) bestimmter Bereich, in dem der LN-Zustand den Grundzustand darstellt. Die Fehlerbalken sind als der größtmögliche Bereich für einen Phasenübergang definiert, der aus allen zugänglichen Teilchenzahlen bestimmt ist. Die Punkte wurden mit  $\alpha\nu^{-\beta}$  gefittet, und man findet  $\alpha \approx 2.0l_B$ ,  $\beta \approx 0.48$ . Zum Vergleich ist auch hier  $a_B = \sqrt{2/\nu}l_B$  gezeigt (orange, gestrichelt).

$V_m^* = V_{\mu+m}$  [46] der Komposit-Teilchen wegen (6.1) mit abnehmender Füllung zunehmend dicht liegen. Wie stark dabei drei- und Mehrteilchen-Wechselwirkungen werden und welche Rolle sie bei der Kristallisation spielen, ist dabei unklar. Zur korrekten Interpretation der im Folgenden vorgestellten numerischen Ergebnisse ist es aber wichtig, die Möglichkeit korrelierter WC in die Diskussion einzubeziehen.

## 6.2 Numerische Ergebnisse

Um das vorhergesagte Phasendiagramm 6.3 (links) zu überprüfen, wurden ausführliche numerische Simulationen in der Kugelgeometrie durchgeführt. Hier existieren keine niederenergetischen Randanregungen und finite-size Effekte spielen eine untergeordnete Rolle. Ein möglicher Phasenübergang von der *topologisch* charakterisierten ( $\mathbf{L}^2 = 0$ ) Laughlin-Flüssigkeit zu einem die Rotations-symmetrie brechenden ( $\mathbf{L}^2 \neq 0$ ) kristallinen Grundzustand kann anhand der Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl  $L$  einfach identifiziert werden. Die beiden durch  $a_B = \sqrt{2/\nu}l_B$  getrennten Bereiche (großer Blockaderadius und kleine Füllung) werden hier detailliert untersucht.

### 6.2.1 Numerisches Phasendiagramm

Nachdem die LN-Zustände als Ansatz-Wellenfunktionen in der für die Numerik verwendeten Basis vorliegen, kann leicht überprüft werden, in welchem Bereich der Grundzustand eine LN-Flüssigkeit darstellt. In Abbildung 6.4 sind die Überlappung zwischen Grund- und Laughlin-Zustand gezeigt, und man erkennt einen Phasenübergang für große  $a_B$ . Für kleine Füllungen und große Teilchenzahlen (6.4, rechts) sinkt der Überlapp zunächst kontinuierlich und fällt dann abrupt auf 0 ab. Um sicher zu gehen, dass es tatsächlich zu einem Phasenübergang kommt, wird in Abbildung 6.5 außerdem die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl  $L$  betrachtet. Für  $\nu \leq 1/4$  kommt es an den erwarteten Positionen zu einer Änderung von  $L$ , d.h. zur spontanen Symmetriebrechung.

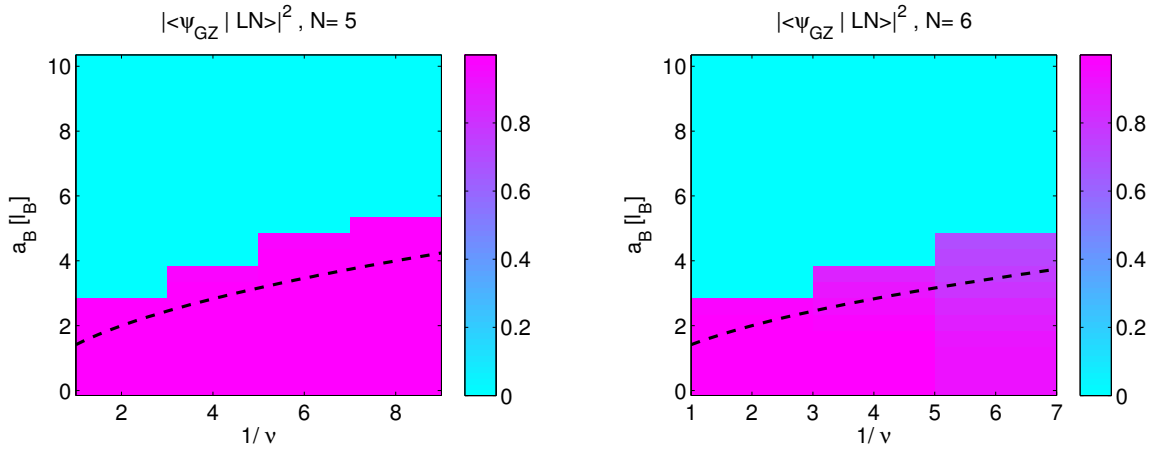
In Abbildung 6.3 (rechts) ist der aus den Überlappen bestimmte Bereich gezeigt, in dem der Grundzustand eine LN-Flüssigkeit darstellt. Für kleine Füllungen liegt die Phasengrenzkurve etwas oberhalb der analytischen Vorhersage, was durch finite-size Effekte verursacht sein kann. Der Kristall wird wegen der langreichweitigen Wechselwirkungen bevorzugt, so dass der TDL erst für relativ große Systeme erreicht ist. Für große Füllungen  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  kommt es, entgegen der analytischen Erwartungen, zu einem Phasenübergang für große  $a_B$ . Im restlichen Bereich skaliert die Phasengrenze, wie erwartet, näherungsweise mit der Trennlinie zwischen konstanten und stark abnehmenden dominierenden Pseudopotentialen,  $a_{B,c} \sim \nu^{-1/2}$ .

Die Grundzustands- Gesamtdrehimpulse (siehe Abbildung 6.5) zeigen für alle numerisch zugänglichen  $N$  stark unterschiedliches Verhalten bei großen  $a_B$  für gerade bzw. ungerade Teilchenzahl  $N$ . Für ungerade  $N$  besitzt der Grundzustand einen großen Drehimpuls, während er für gerade  $N$  verschwindet. Im letzteren Fall wird also für große  $a_B$  die Rotationssymmetrie nicht gebrochen. Dieses Verhalten widerspricht den Erwartungen für einen Grundzustand, der durch einen Wigner-Kristall beschrieben wird. In beiden Fällen existiert ein symmetriebrechender Übergangsbereich mit  $L \neq 0$ , der mit einem Wigner-Kristall in Verbindung gebracht werden könnte.

Aus dem Vergleich von numerischem und analytischem Phasendiagramm wird klar, dass der nicht-korrelierte WC nur für moderate  $a_B$  eine sinnvolle Ansatz-Wellenfunktion darstellt. Daher werden die verschiedenen Regionen des Phasendiagramms im Folgenden detaillierter untersucht.

### 6.2.2 Kleine Füllung

Nun wird das Verhalten entlang der Achse ( $\nu, a_B = 0.2\ell_B$ ) für die größten numerisch handhabbaren Systeme (bis  $\nu = 1/8$  bei  $N = 6$ ) untersucht. Im gesamten Parameterbereich besitzt der Grundzustand hier den Gesamtdrehimpuls  $L = 0$ . Der Überlapp zum LN-Zustand ist nach wie vor sehr groß, siehe Abbildung 6.7 (links). Die kollektive CF-Exziton Mode lässt sich für  $\nu = 1/6, 1/8$  nur im Fall  $N = 5$  identifizieren. Dies hängt vermutlich mit dem schon im Überlapp mit dem LN-Zustand beobachteten unterschiedlichen Verhalten für gerades und ungerades  $N$  zusammen, siehe Abbildung 4.3 (rechts). Gleichmaßen liegen auch die Anregungslücken sowie die Grundzustandsenergien für ungerades  $N$  (im Mittel) oberhalb derer für gerades  $N$ , siehe Abbildung 6.6.



**Abbildung 6.4:** Überlapps-Quadrat zwischen exaktem Grund- und LN-Zustand, für  $N = 5$  (links) und  $N = 6$  (rechts) Teilchen.

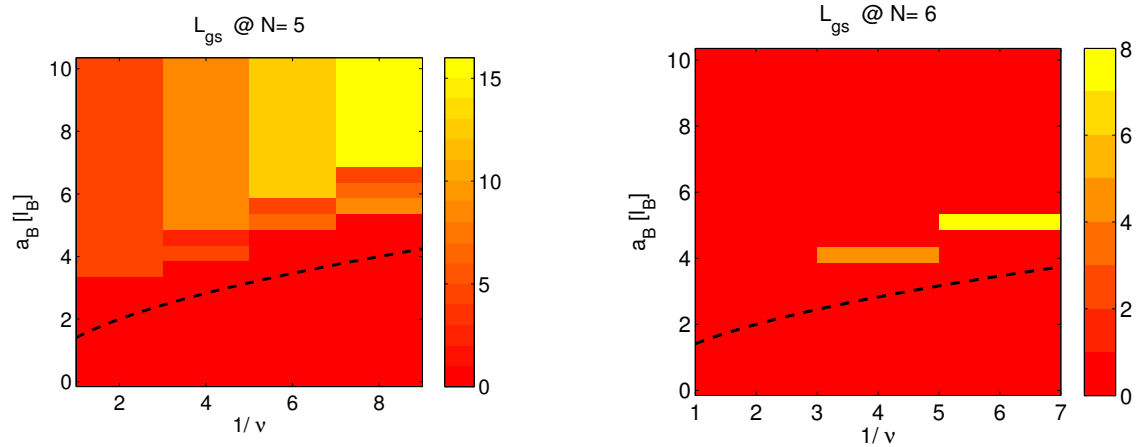
Möglicherweise ist dies ein finite-size Effekt, der durch die Geometrie eines Kristallgitters auf der endlichen Kugel bestimmt wird. Diese Annahme wird durch die deutliche Reduktion derartiger Abhängigkeiten von  $N(\text{mod}2)$  in der Scheibengeometrie gestärkt.

Abbildung 6.6 legt nahe, dass der beobachtete Grundzustand kompressibel ist ( $\lim_{\text{TDL}} \Delta_{\text{CM}} < 0$ ). Wegen der geringen zugänglichen Teilchenzahlen kann dies nicht mit Sicherheit gefolgert werden. Um die Eigenschaften eines möglichen Grundzustandes im TDL zu untersuchen, sind in Abbildung 6.7 (links) die Korrelationsfunktionen gezeigt. Für  $N = 5$  besitzt der Grundzustand im wesentlichen die Korrelationen des LN-Zustandes, während für  $N = 6$  die Oszillationen wesentlich stärker ausgeprägt sind. Dies deutet auf eine Instabilität gegenüber Kristallisation hin, die hier durch finite-size Effekte verhindert sein kann. Wie in Abschnitt 6.1.2 erwähnt, ist der korrelierte WC ein natürlicher Grundzustandskandidat für kristalline Zustände. Um zu überprüfen, wie stark korreliert die numerisch gefundenen Zustände sind, lässt sich die  $g^{(2)}$  Funktion für kleine  $r \approx 0$  untersuchen. Dort spielen nur die polynomiellen Anteile der Wellenfunktionen eine Rolle, da  $e^{-r^2/4} \approx 1$ . Man findet, dass die numerischen Ergebnisse (für kleine  $r$ ) Potenzgesetzen  $r^\kappa$  folgen, deren Exponent  $\kappa$  Aufschluss über die Spezies  $\mu$  sinnvoller  $\mu$ CP Ansatz-Wellenfunktionen gibt<sup>2</sup>. Man findet folgende (gerundeten) Exponenten:

$N$	3	4	5	6
$\kappa$	16	12	6	11
Quasiteilchen	<sup>8</sup> CB	<sup>6</sup> CB	<sup>3</sup> CF	<sup>6</sup> CB

Für  $N = 3$  findet man ein <sup>8</sup>CB-Kondensat, das exakt dem  $\nu = 1/8$  LN Zustand entspricht. Aus dem Skalierungsverhalten für  $N = 4, 6$  folgt, dass ein korrelierter <sup>6</sup>CB WC ein guter Grundzustandskandidat sein sollte. Für  $N = 5$  wird womöglich durch finite-size Effekte ein korrelierter

<sup>2</sup>Eine  $\mu$ CP Wellenfunktion im LAL trägt einen Faktor  $r^{2\mu}$  zu  $g^{(2)}$  bei.



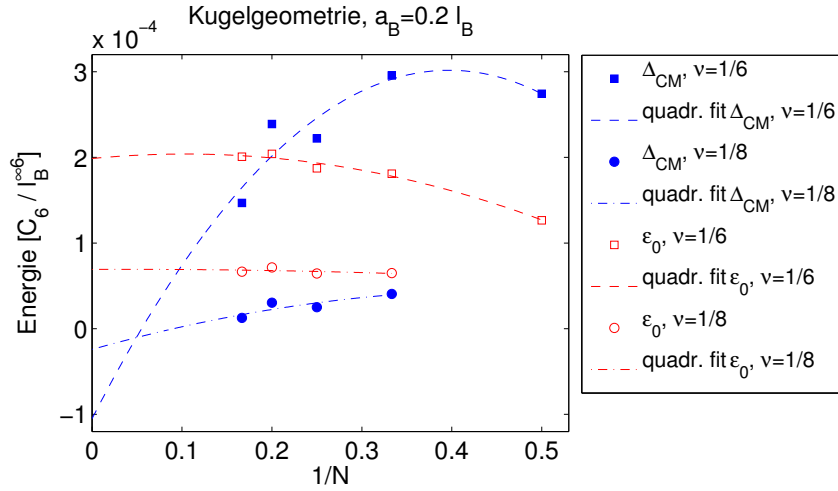
**Abbildung 6.5:** Der Gesamtdrehimpuls  $L$  des Grundzustandes gibt Aufschluss über das Phasendiagramm. Hier wurden  $N = 5$  (links) und  $N = 6$  (rechts) Teilchen simuliert.

$^3\text{CF}$  Kristall bevorzugt. Es sei allerdings betont, dass diese Daten lediglich als Indizien anzusehen sind, und außerdem keine Effekte höherer  $AL$  berücksichtigt wurden. Exakte Rechnungen sind hier wegen der benötigten Monte-Carlo Integrale nicht durchgeführt worden.

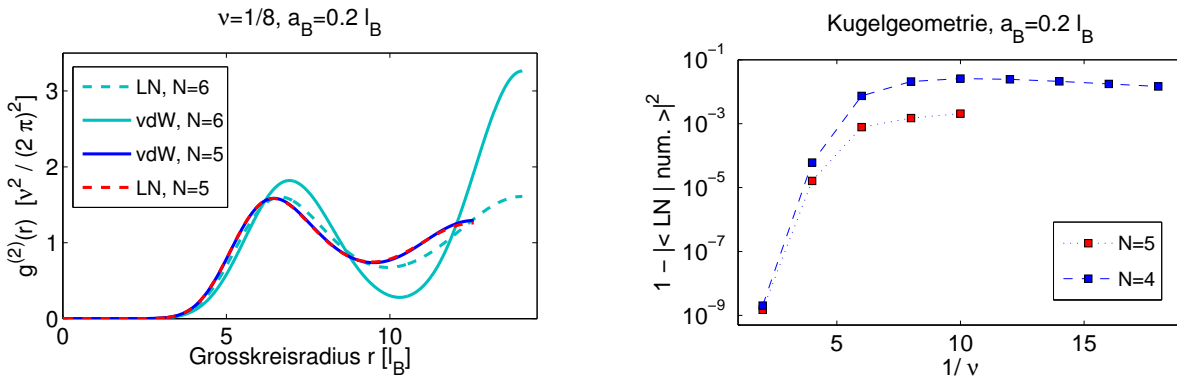
### 6.2.3 Mittlerer Blockaderadius

Für  $N = 8$  sind in Abbildung 6.8 einige Spektren gezeigt. Für  $a_B = 2.6\ell_B$  ist der Laughlin-Zustand noch inkompressibler Grundzustand, und seine kollektiven Anregungen, insbesondere das Roton-Minimum, lassen sich identifizieren. Für  $a_B = 2.9\ell_B$  kommt es zu einer Roton-Instabilität, das heißt der neue Grundzustand bricht die Rotationsinvarianz ( $L = 2$ ) und ist vermutlich kompressibel. Eine wohldefinierte kollektive Anregung kann nicht mehr identifiziert werden. In Abbildung 6.9 (rechts) ist die Dichte dieses  $L = 2$  Grundzustandes gezeigt. Sie weist für einen Kristall zu erwartende Oszillationen entlang  $\mathbf{e}_\theta$  auf. Im Inset dieser Abbildung, sowie in Abbildung 6.9 (links) sind außerdem die zugehörigen Dichte-Dichte-Korrelationen gezeigt, aus denen man eine kristalline Ordnung erkennt. Ähnliche Zustände, die ebenfalls kristalline Ordnung aufweisen, findet man auf der Yrast-Linie in Scheibengeometrie, siehe Abbildung 6.10 (links).

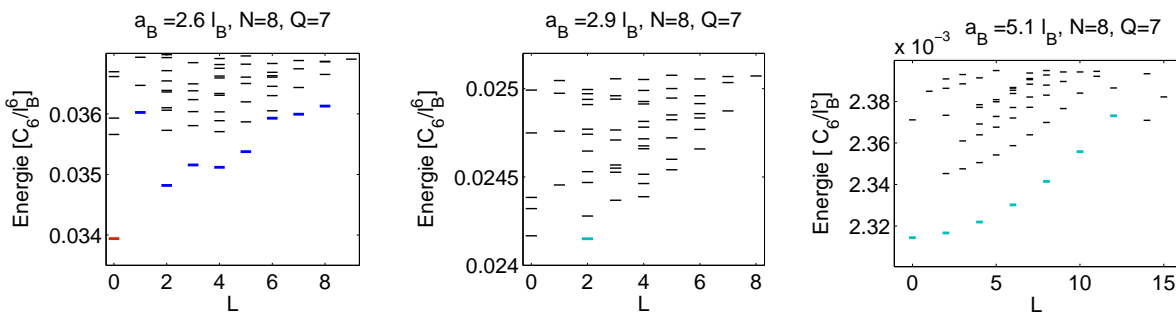
In [36] wurden rotierende Bose-Einstein-Kondensate (BECs) mit Rydberg-Rydberg Wechselwirkungen der hier betrachteten Form (4.2) und bei Rotationsfrequenzen unterhalb des FQHE-Regimes untersucht. Dabei wurde unter anderem eine super-solide Phase (SS) gefunden, die für moderate  $a_B$  in die hier diskutierte symmetriebrechende Phase übergehen könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall, nachdem die numerischen Rechnungen für den  $L = 2$  Grundzustand bei  $a_B = 2.9\ell_B$  keine neben-diagonale langreichweitige Ordnung (ODLRO) liefern. Es stellt sich also die Frage, wie die Phasen ineinander übergehen wenn die Rotationsfrequenz in Richtung des FQHE Regimes erhöht wird.



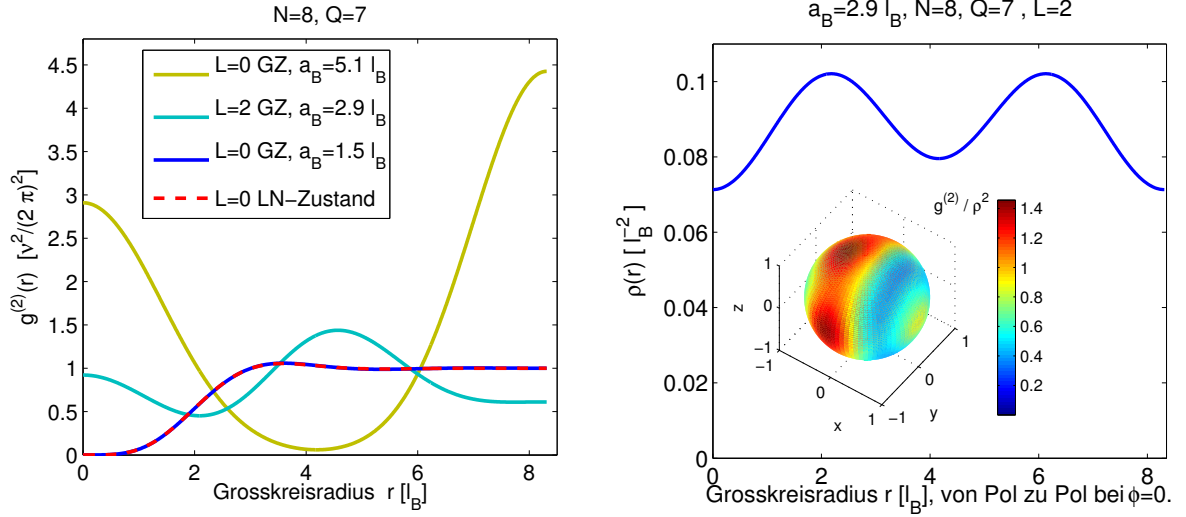
**Abbildung 6.6:** Finite-size Approximationen für die Anregungslücke  $\Delta_{\text{CM}}$  zu kollektiven Anregungen auf dem Grundzustand sowie die Grundzustandsenergie pro Teilchen bei  $a_B = 0.2\ell_B$ .



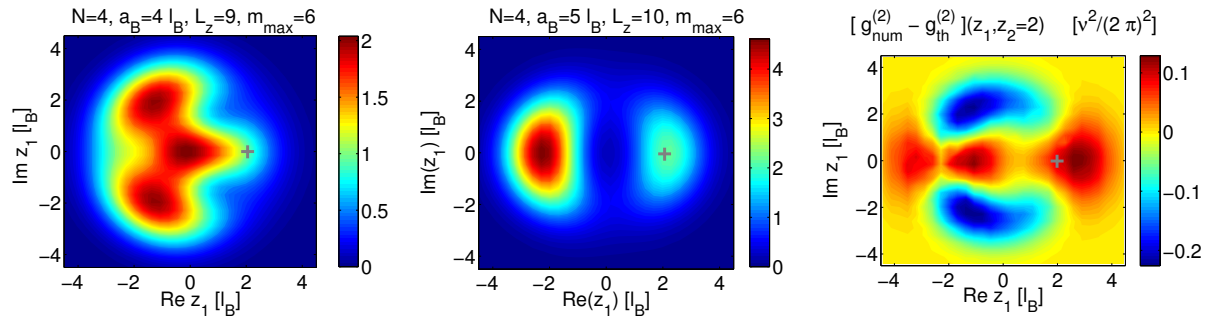
**Abbildung 6.7:** Links: Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion für  $N = 5, 6$  Teilchen bei  $\nu = 1/8$  und  $a_B = 0.2\ell_B$ . Rechts: Überlapp des Grundzustandes mit dem LN Zustand bei  $a_B = 0.2\ell_B$  für verschiedene  $\nu$ .



**Abbildung 6.8:** Spektren für verschiedene Blockaderadien ( $a_B = 2.6, 2.9, 5.1\ell_B$ ) bei  $\nu = \frac{1}{2}$  und  $N = 8$ . Rot: LN Zustand Kandidat, Blau: CF-Exziton Kandidat, Türkis: GZ für große  $a_B$  und zugehörige kollektive Anregungen.



**Abbildung 6.9:** Links: Grundzustands  $g^{(2)}$  Funktionen für  $a_B = 1.5\ell_B, 2.9\ell_B$  und  $a_B = 5.1\ell_B$ . Dabei bezeichnet  $r$  den Großkreisradius entlang des Äquators. Rechts: Dichte des Grundzustandes bei  $a_B = 2.9\ell_B$ , mit  $L = 2$ . Im Inset ist die  $g^{(2)}(\Omega_1, \Omega_2)$  Funktion gezeigt, wobei  $\Omega_1 = \mathbf{e}_x$ .



**Abbildung 6.10:** Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(z_1, z_2 = 2\ell_B)$  für Zustände auf der Yrast-Linie in Scheibengeometrie, in Einheiten von  $\nu^2/(2\pi)^2$  mit  $\nu = 1/2$ . Links: Kristalliner Zustand bei  $L_z = 9$  und  $a_B = 4\ell_B$ , Mitte: Cluster-Zustand bei  $L_z = 10$  und  $a_B = 5\ell_B$ . Das Kreuz markiert jeweils  $z_2 = 2\ell_B$ . Rechts: Differenz der numerischen Korrelationsfunktion (Mitte) und derer der Ansatz-Wellenfunktion (6.11) mit  $\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)^2$ .



### 6.2.4 Großer Blockaderadius

Nun wird das Verhalten entlang der Achse ( $\nu = 1/2, a_B$ ) untersucht. Für  $a_B = 5.1\ell_B$  und gerades  $N$  ist der Grundzustand wieder rotationsinvariant,  $L = 0$ , und man erkennt in Abbildung 6.8 (rechts) ein wohldefiniertes Spektrum niederenergetischer Anregungen. Dabei kommen nur Zustände mit geradzahlgiger Drehimpulsquantenzahl  $L/2 \in \mathbb{N}$  vor. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft eines bosonischen zwei-Teilchen-Spektrums und deutet auf die Ausbildung zweier *bosonischer* Cluster hin. Außerdem erkennt man eine zweite Mode, die durch eine Anregungslücke von der ersten getrennt ist. Sie besitzt auch für  $L/2 \notin \mathbb{N}$  Zustände, nicht jedoch für  $L = 0, 1$ , und hat die Form eines drei-Teilchen Spektrums bei der betrachteten Wechselwirkung. Für ungerades  $N$  ergibt sich ein ähnliches Bild, die niederenergetische Mode hat hier allerdings bereits die Form eines drei-Teilchen Spektrums. Insbesondere beginnt sie bei einem endlichen Drehimpuls  $L > 0$ , was die hohen Grundzustands-Drehimpulse in Abbildung 6.5 (links) erklärt.

Aus den Dichte-Dichte- Korrelationen (Abbildungen 6.9 links, 6.10 Mitte) der Grundzustände erkennt man ebenfalls, dass sich die Teilchen auf zwei Cluster verteilen. Um den Cluster-Mechanismus zu verstehen, genügt es die ersten drei Pseudopotentiale zu betrachten. Setzt man  $V_0 = V_2 \neq 0$ , so stellt man für  $\nu = 1/2$  numerisch bei  $V_4 \approx 0.5V_0$  einen Phasenübergang zu Cluster-Zuständen fest. Deren Energie skaliert mit den Pseudopotentialen wie

$$E_c \approx N_c \Delta_c + E_\Phi, \quad \Delta_c \sim V_0 N_0, \quad E_\Phi \approx 0, \quad E_{LN} \sim N(V_2 + V_4), \quad (6.10)$$

wobei  $N_0$  die Anzahl der Teilchen pro Cluster und  $N_c = N/N_0$  die Anzahl solcher Cluster bezeichnet. Indem die Cluster weit voneinander getrennt werden, kann die langreichweitige Wechselwirkung stark reduziert werden, d.h.  $E_\Phi \approx 0$ . Für  $V_2 = V_0$  führt großes  $V_4$  zu einer Bevorzugung von Clustern.

Eine sinnvolle Ansatz-Wellenfunktion zur Beschreibung der Cluster ist in Scheibengeometrie sowie für gerades  $N$ :

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \mathcal{S} \left[ \prod_{j=1}^{N/2} \prod_{k=N/2+1}^N (z_j - z_k)^2 \cdot \Phi \left( \zeta_1 = \sum_{j=1}^{N/2} z_j, \zeta_2 = \sum_{j=N/2+1}^N z_j \right) \right] \cdot e^{-\sum_j |z_j|^2/4}. \quad (6.11)$$

Die Funktion  $\Phi(\zeta_{1,2})$  beschreibt dabei die Cluster. Für  $\Phi = \Phi(\zeta_1 - \zeta_2)$  liefert sie einen translationsinvarianten Zustand. Weil  $\Phi \in \text{LLL}$  und die Cluster bosonisch sind, folgt für zwei Cluster also bereits

$$\Phi(\zeta_1 - \zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)^m, \quad m/2 \in \mathbb{N}. \quad (6.12)$$

Für kleine Teilchenzahlen beschreibt diese Ansatz-Wellenfunktion bis auf ca. 1% genau die Dichte-Dichte- Korrelationen der beobachteten Grundzustände, wie in Abbildung 6.10 (rechts) zu sehen ist. Der Ansatz kann einfach auf größere Cluster-Zahlen verallgemeinert werden, und es stellt sich

die Frage, ob die Cluster selbst eine LN-Flüssigkeit bilden oder kristallisieren.

In der oben (6.2.3) bereits erwähnten Arbeit zu rotierenden Rydberg-BECs [36] wurde eine weitere Phase (SSV) gefunden, die ab einem kritischen Blockaderadius existiert. Wie in der super-soliden (SS) Phase findet man dort eine kristalline Dichteverteilung, wobei sich aber an den Stellen großer Dichte selbst Vertex-Gitter ausbilden. Es lässt sich also spekulieren, dass die für die Bildung der Cluster verantwortlichen Vortices in (6.11) aus diesem Vortex-Gitter hervorgehen, wenn das FQHE-Regime erreicht wird.

### 6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Möglichkeit einer Kristallisation im LLL für kleine Füllungen untersucht, wozu der nicht-korrelierte Wigner-Kristall als Variationszustand verwendet wurde. Im Gegensatz zu den langreichweitigen dipolaren oder Coulomb-Wechselwirkungen liegt er bei Van-der-Waals Wechselwirkungen mit hinreichend kleinem Blockade-Radius  $a_B \ll \ell_B$  energetisch stets oberhalb der Laughlin-Flüssigkeit. Für die reine Van-der-Waals Wechselwirkung  $\sim r^{-6}$  ist (wie bei Punktwechselwirkungen) also für kleine Füllungen kein Übergang zum *nicht-korrelierten* Wigner-Kristall zu erwarten. Dieses Ergebnis konnte numerisch in kleinen Systemen bestätigt werden, wobei in den Dichte-Dichte-Korrelationen zum Teil stärkere Oszillationen gefunden wurden als für Laughlin-Flüssigkeiten zu erwarten. Diese können als Vorstufe der Bildung eines *korrelierten* Wigner-Kristalls der Komposit-Teilchen interpretiert werden, der für kleine Füllungen als Grundzustand erwartet wird. Eine Abschätzung des kritischen Füllfaktors, bei dem es zu dieser Kristallisation kommt, ist numerisch sowie analytisch schwierig und kann hier nicht gegeben werden.

Der nicht-korrelierte Wigner-Kristall wurde außerdem als Variationszustand für große Blockaderadien  $a_B$  verwendet und das durch Vergleich mit der Laughlin-Flüssigkeit erhaltene Phasendiagramm berechnet. Die so vorhergesagte Phasengrenzfläche  $a_B(\nu)$  zu einem kristallinen Zustand wurde numerisch für Füllungen  $\nu \leq 1/6$  bestätigt. Für größere Blockaderadien wurde numerisch ein weiterer Phasenübergang zu einem Cluster-Zustand gefunden, der im analytischen Phasendiagramm nicht berücksichtigt ist. Für den neuen Cluster-Zustand wurde eine allgemeine Ansatz-Wellenfunktion vorgeschlagen, von der für kleine Teilchenzahl ( $N = 4$ ) durch Vergleich mit der Numerik gezeigt wurde, dass sie den beobachteten Grundzustand sehr genau beschreibt.

## 7 Physik am Rand

In Kapitel 5 wurde gezeigt dass die Laughlin-Zustände in Systemen mit Rand instabil gegenüber der Bildung von Quasiloche-Anregungen sind, d.h.  $\Delta_{\text{qh}} < 0$ . In diesem Kapitel wird der Einfluss äußerer Fallenpotentiale untersucht und eine Abschätzung der relevanten Anregungslücke  $\bar{\Delta}_{\text{qh}}$  der LN-Zustände gegeben. Damit kann die Robustheit der LN-Zustände sowie ihrer elementaren Quasiloche-Anregungen in endlichen Systemen mit Einschluss abgeschätzt werden.

### 7.1 Randanregungen

Randanregungen in FQHE Systemen können als Deformation der Wellenfunktionen entlang der Systembegrenzung angesehen werden. Letztere sind durch die umgebenden Fallenpotentiale bestimmt. Mathematisch lassen sich Randanregungen auf einem inkompressiblen bulk-Zustand  $\psi$  durch Multiplikation mit symmetrischen Polynomen  $\varphi$  definieren [14],

$$\psi_{\text{edge}}(z_1, \dots) = \psi(z_1, \dots) \cdot \varphi(z_1, \dots). \quad (7.1)$$

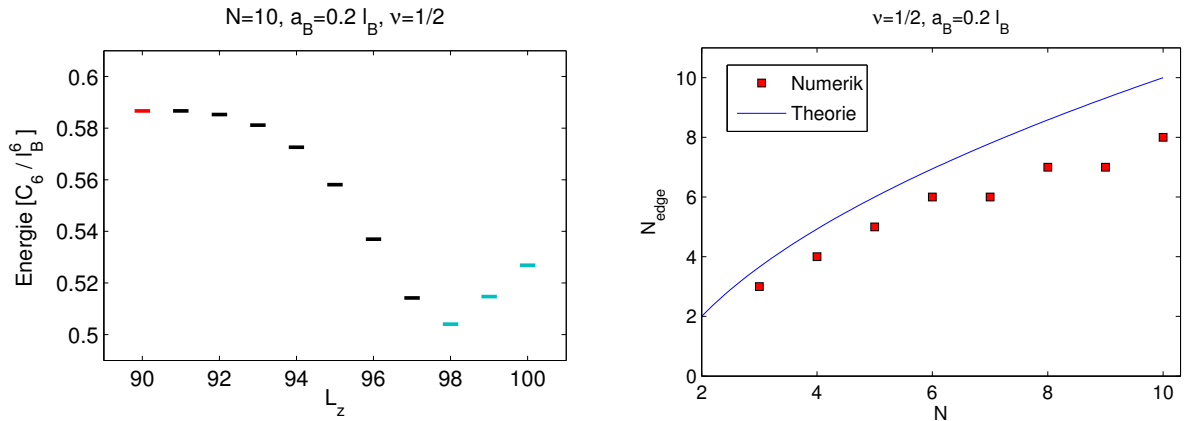
Das System wird dabei gleichzeitig verdünnt. Ist  $\psi$  ein stark korrelierter Zustand, so bleiben die Korrelationen im bulk im Wesentlichen erhalten. Im Sinne dieser Definition stellen die Quasiloche-Zustände (2.80) also Randanregungen dar. Da im Folgenden jedoch nur die Stabilität der bulk-Eigenschaften von Interesse ist, werden Anregungen der Form (7.1) hier nur als Randanregungen bezeichnet wenn sie auch am Rand konzentriert sind.

Um die Anzahl solcher Randanregungen auf den LN-Zuständen abzuschätzen, wird gefordert dass sie innerhalb einer durch die Wechselwirkung definierten Breite am Rand lokalisiert sind. Dazu wird angenommen, dass der größte Beitrag der Wechselwirkungsenergie von Teilchenpaaren mit Relativwellenfunktion des Relativdrehimpulses  $m_{\text{rel}} = 1/\nu$  herrührt. Dies ist für die Van-der-Waals Wechselwirkung (4.2) für alle betrachteten Füllungen der Fall. Damit die innerste Randanregung mit  $L_z = L_z(\text{LN}) + N_{\text{edge}}$  im geforderten Bereich liegt, muss also wegen (2.18) gelten:

$$\sqrt{2m_{\text{max}}(\text{LN})} - \sqrt{2(m_{\text{max}}(\text{LN}) - N_{\text{edge}})} \stackrel{!}{=} \sqrt{2m_{\text{rel}}} = \sqrt{2/\nu}. \quad (7.2)$$

Daraus lässt sich leicht ableiten dass gilt

$$N_{\text{edge}} = \frac{1}{\nu} \left( 2\sqrt{N-1} - 1 \right). \quad (7.3)$$



**Abbildung 7.1:** *Links:* Rechts vom inkompressiblen LN-Zustand (rot) existieren Randzustände (schwarz), die dann in Quasiloeh-Anregungen des bulks (türkis) übergehen. Die Lage des Minimums bestimmt die Anzahl solcher Randanregungen und ist *rechts* für verschiedene Teilchenzahlen gezeigt. Sie stimmt qualitativ gut mit der theoretischen Abschätzung (7.3) überein.

In Abbildung 7.1 wird diese Vorhersage bei  $\nu = 1/2$  mit den numerischen Ergebnissen verglichen, und qualitativ gute Übereinstimmung gefunden. Für  $\nu = 1/4$  liegt die vorhergesagte Größe des Randes für alle numerisch zugänglichen Systeme oberhalb der Größe  $N$  des Quasiloeh-Spektrums. Die numerischen Daten sind damit konsistent und innerhalb der  $\nu = 1/4$  qh- Spektren konnten keine Minima gefunden werden.

Um die Stabilität des bulks der LN-Zustände gegenüber qh-Anregungen abzuschätzen, muss sowohl deren Wechselwirkungsenergie  $\Delta_{\text{qh}} < 0$  als auch die zusätzliche Energie

$$\Delta_{\text{conf}}^{(\text{qh})} = \langle \text{qh} | V_{\text{conf}} | \text{qh} \rangle - \langle \text{LN} | V_{\text{conf}} | \text{LN} \rangle \quad (7.4)$$

im externen Fallenpotential  $V_{\text{conf}}$  berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, dass qh hier für einen Zustand im qh- Spektrum steht der *keinen* Randzustand darstellt. Für seinen Drehimpuls  $l_z = L_z(\text{qh}) - L_z(\text{LN})$  muss also gelten:  $l_z > N_{\text{edge}}$ . Die relevante Anregungslücke ist dann

$$\bar{\Delta}_{\text{qh}} = \Delta_{\text{qh}} + \Delta_{\text{conf}}^{(\text{qh})}. \quad (7.5)$$

Andererseits muss sichergestellt werden, dass der LN-Zustand energetisch unterhalb der CF-Exziton Zustände (ex) liegt. Die zugehörige relevante Anregungslücke

$$\bar{\Delta}_{\text{ex}} = \Delta_{\text{ex}} - \Delta_{\text{conf}}^{(\text{ex})}, \quad \Delta_{\text{conf}}^{(\text{ex})} = \langle \text{LN} | V_{\text{conf}} | \text{LN} \rangle - \langle \text{ex} | V_{\text{conf}} | \text{ex} \rangle \quad (7.6)$$

ist jedoch wegen der großen Exziton-Energie  $\Delta_{\text{ex}} \sim V_0$  deutlich größer.

Neben den LN-Zuständen selbst sind auch ihre elementaren qh-Anregungen wegen ihrer anyonischen Braiding-Statistik (siehe Anhang 9.1) von Interesse. Sie können gezielt durch lokale, repulsive

externe Potentiale  $\propto \delta(\xi - z)$  im bulk erzeugt werden [60]. Die gleiche Argumentation wie oben für die LN-Zustände führt dann wieder auf die relevante Anregungslücke  $\bar{\Delta}_{\text{qh}}$  für die Anregung weiterer, unerwünschter Quasilöcher. Liegen alle relevanten Energien unterhalb dieser Lücke, so können verlässliche Braiding-Experimente durchgeführt werden.

## 7.2 Effekte äußerer Fallenpotentiale

Im Folgenden soll der durch externe Fallenpotentiale verursachte Beitrag  $\Delta_{\text{conf}}$  zu den Anregungslücken (7.5), (7.6) berechnet werden. Dazu werden zwei verschiedene konkrete Fallenpotentiale betrachtet.

### 7.2.1 Harmonisches Potential

Für ein harmonisches Fallenpotential lässt sich wie im Abschnitt 2.1.2 beschrieben der Grundzustand einfach aus dem reinen Wechselwirkungsproblem berechnen:

$$V_{\text{conf}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 |z|^2 \rightarrow \alpha \hat{L}_z, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_0^2} - \omega_c}{2}. \quad (7.7)$$

Dabei wird die bisherige Längeneinheit ( $\ell_B$ ) durch die Oszillatorlänge

$$\ell_c = \ell_B \left( 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^4 \right) \quad (7.8)$$

ersetzt. Hier soll das harmonische Potential als Störung betrachtet werden,  $\omega_0 \ll \omega_c$ , so dass  $\ell_B \approx \ell_c$  gilt. Dies ist wegen

$$\frac{\omega_0}{\omega_c} = \sqrt{\frac{\alpha}{\omega_c} \left( \frac{\alpha}{\omega_c} + 1 \right)} \quad (7.9)$$

der Fall sofern  $\alpha \ll \omega_c$  gefordert wird.

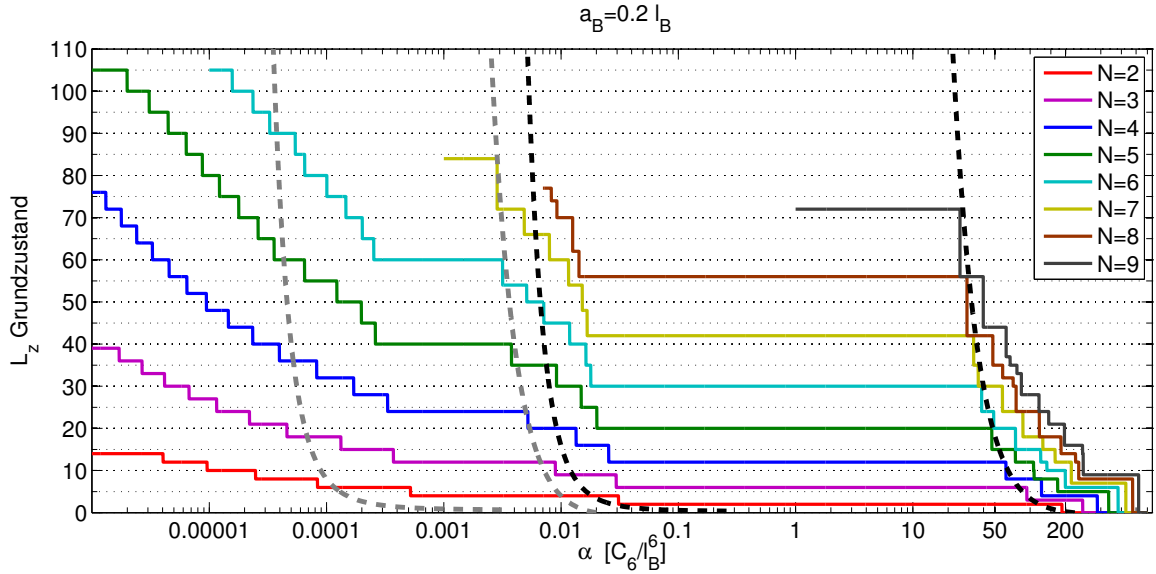
Nachdem der Gesamtdrehimpuls eine gute Quantenzahl darstellt, können die Anregungslücken direkt abgelesen werden zu

$$\Delta_{\text{conf}}^{(\text{qh})} = N_{\text{edge}} \alpha, \quad \Delta_{\text{conf}}^{(\text{ex})} = N \alpha. \quad (7.10)$$

Aus der Forderung  $\bar{\Delta} > 0$  kann damit der Stabilitätsbereich des LN-Zustandes bestimmt werden,

$$- \frac{\Delta_{\text{qh}}}{N_{\text{edge}}} < \alpha < \frac{\Delta_{\text{ex}}}{N}. \quad (7.11)$$

In Abbildung 7.2 ist das numerisch zugängliche Phasendiagramm für  $a_B = 0.2\ell_B$  gezeigt. Dabei wurde der Drehimpuls  $L_z$  des Grundzustandes für verschieden starke Fallenpotentiale bestimmt.



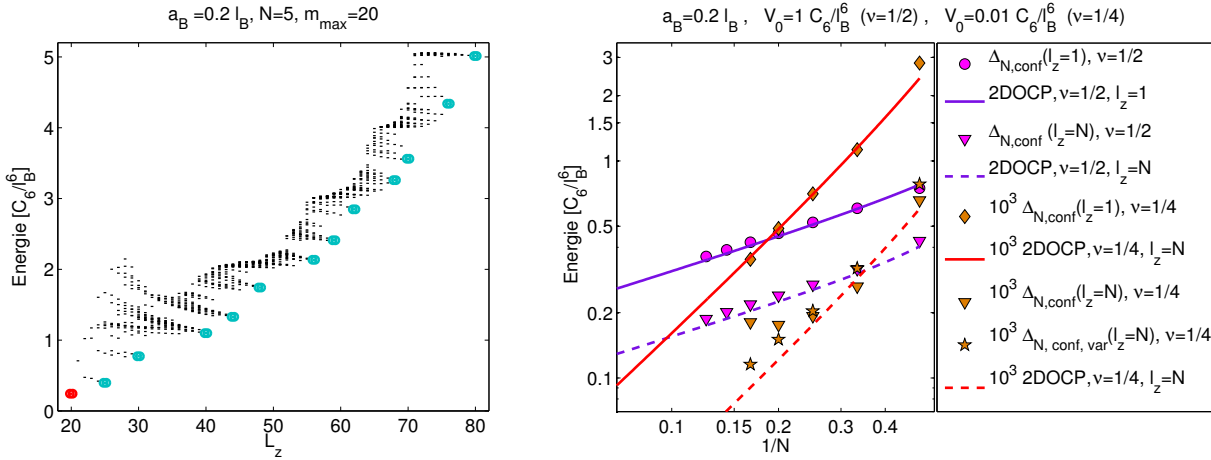
**Abbildung 7.2:** Phasendiagramm bei harmonischem Fallenpotential. Gezeigt ist der Drehimpuls  $L_z$  des Grundzustandes, in Abhängigkeit der Fallenfrequenz  $\alpha = \frac{\Omega - \omega_c}{2}$ . Hier wurde  $\alpha \ll \omega_c$  vorausgesetzt, andernfalls müssen die Einheiten verändert werden (siehe Text). Die gestrichelten Linien stellen die Abschätzungen (7.11) des Stabilitätsbereichs dar (schwarz:  $\nu = 1/2$ , grau:  $\nu = 1/4$ .)

Man findet Stufen an den Positionen der Knicke in der Yrast-Linie, wobei besonders die Plateaus bei  $\nu = 1/2$  und  $\nu = 1/4$  ausgeprägt sind. In der Abbildung sind auch die aus (7.11) berechneten kritischen Linien eingezeichnet, wobei für die Anregungslücken die Werte aus den finite-Size Approximationen in Kugelgeometrie (siehe Kapitel 5) verwendet wurden. Für die obere Grenze (Exziton-Anregungen) ergibt sich eine gute quantitative Übereinstimmung mit den numerischen Werten, wogegen die untere Grenze (qh- Anregungen) nur qualitativ stimmt. Dies liegt zum einen an der unpräzisen Formel (7.3) für  $N_{\text{edge}}$ , sowie zum anderen an den großen finite-size Effekten der qh- Anregungslücke (siehe 5.3.3). Für kleine  $\alpha$  ( $L_z^{(\text{GZ})}(\alpha) > L_z(\text{LN}, 1/4)$ ) findet man nur noch Grundzustände in regelmäßigen Abständen  $\Delta L_z$ . Dies lässt sich durch aufeinanderfolgende qh-Anregungen verstehen die hier durch Randeffekte stärker korrelierten CF- Anregungen [40] vorzuziehen sind.

Eine wichtige Konsequenz aus (7.11) ist die Existenz einer maximalen Teilchenzahl

$$N_{\text{max}} = \frac{4}{\nu^2} \left( \frac{\Delta_{\text{ex}}}{\Delta_{\text{qh}}} \right)^2, \quad (7.12)$$

oberhalb derer der LN-Zustand nicht mehr inkompressibel ist. Dies kann durch die linear mit  $N$  wachsende Länge des Exziton-Spektrums gegenüber der wie  $\sqrt{N}$  wachsenden Anzahl an Randanregungen verstanden werden. Für realistische Zahlen  $\Delta_{\text{ex}}/\Delta_{\text{qh}} \sim 0.4 \cdot 10^4$  bei  $\nu = 1/2$  und  $a_B = 0.2 \ell_B$  ergibt sich  $N_{\text{max}} = 2.6 \cdot 10^8$ . Man beachte dass diese Einschränkung mit zunehmender Reichweite



**Abbildung 7.3:** Links: Spektrum eines Systems mit LS ( $\mathcal{V}_0 = 1 \cdot \frac{C_6}{l_B^6}$ ). Die Systemgröße entspricht der des LN-Zustandes mit 12 Quasilochnregungen. Der Grundzustand ist durch den  $\nu = 1/2$  LN-Zustand beschrieben (rot). Für größere  $L_z$  erkennt man deutlich 12 Knicke in der Yrast-Linie (türkis), die den verschiedenen Quasilochnregungen entsprechen. Rechts: Vergleich der theoretisch vorhergesagten Anregungslücke durch das LS Fallenpotential (2DOCP) mit den numerisch bestimmten Ergebnissen  $\Delta_{\text{conf}}$ . Dabei wurde die Anregungslücke durch die Wechselwirkung vom numerischen Ergebnis subtrahiert, um den Effekt des Fallenpotentials zu erhalten. Für  $\nu = 1/4$  und  $l_z = N$  ist außerdem der Erwartungswert des Fallenpotentials für den exakten Quasilochnzustand gezeigt.

der betrachteten Wechselwirkung zunehmend restriktiver wird. Für Punktwechselwirkungen gilt dagegen  $N_{\max} = \infty$ .

## 7.2.2 Landau Stufenpotential

Ein weiteres, aus theoretischer Sicht sehr elegantes, Potential ist das *Landau Stufenpotential* (LS), definiert durch

$$V_{\text{LS}} = \mathcal{V}_0 \sum_{m > m_{\max}} |m\rangle \langle m|. \quad (7.13)$$

Wählt man  $m_{\max} = m_{\max}(\text{LN}, \nu)$  und  $\mathcal{V}_0 \gg V_m$ , so sollte der Grundzustand des Systems gerade durch den eines Systems beschränkter Größe  $m_{\max}$  gegeben sein. Letzterer wurde im Rahmen dieser Arbeit numerisch ausführlich behandelt und ist für  $\nu = 1/2, 1/4$  fast exakt durch den LN-Zustand gegeben, siehe Abschnitt 4.2. Die Energie weiterer Quasilochnregungen enthält einen Beitrag der wie  $\sim \mathcal{V}_0$  skaliert und gegenüber der Quasilochnenergie  $\sim V_m$  dominiert. Aus Abbildung 7.3 (links) erkennt man, dass dieses Bild qualitativ richtig ist.

In dieser Arbeit wurde gefunden, dass das LS sich im Prinzip durch ein rotationsymmetrisches Potential  $V(r)$  realisieren lässt,

$$V(r) = \sum_{k=m_{\max}+1}^{\infty} \nu_k L_k \left( \frac{r^2}{2} \right) \cdot e^{-\alpha r^2/2}. \quad (7.14)$$

Dabei bezeichnet  $L_k$  das  $k$ -te Laguerre Polynom,  $\alpha$  eine beliebige Zahl, und  $\nu_k$  zunächst beliebige Koeffizienten. Dieses Potential (7.14) hat die Eigenschaft, dass alle Matrixelemente im LLL für Landau-sites  $m < m_{\max}$  verschwinden. Es gilt nämlich

$$\langle m' | V_{LS} | m \rangle = \delta_{m,m'} \cdot \frac{1}{m!} \sum_{k=m_{\max}+1}^m \nu_k \int_0^\infty dx e^{-(1+\alpha)x} x^m L_k(x). \quad (7.15)$$

Die  $\nu_k$  können jetzt rekursiv bestimmt werden. Man beachte, dass dabei angenommen wird, dass die Projektion aufs LLL nach wie vor gültig ist, d.h. dass die zusätzlichen Kopplungen an höhere LL vernachlässigbar sind.

Aus (7.14) ist unmittelbar klar, dass die vorgeschlagene Realisierungen des LS wegen der stark oszillierenden Laguerre-Polynome schwierig sein dürfte. Trotzdem ist das LS als einfacher Prototyp eines stufenartigen Potentials interessant, insbesondere weil es exakte analytische Ergebnisse liefert.

## 2D-Einkomponenten-Plasma (2DOCP) Theorie der LS Anregungslücke

Im Folgenden soll die LS Anregungslücke  $\Delta_{\text{conf}}^{(\text{qh})}$  über dem LN-Zustand berechnet werden, d.h.  $m_{\max} = m_{\max}(\text{LN})$  in (7.13). Für Systeme, in denen der Effekt des Fallenpotentials nicht zu groß gegenüber der Wechselwirkung ist, ist es weiterhin sinnvoll die Wechselwirkungs-Grundzustände (LN-Zustände mit Quasilochanregungen) als Variationsansätze zu verwenden. Die zugehörigen Variationsenergien können für spezielle Zustände aus dem Quasilochspektrum ( $l_z = 0, 1, N$ ) mit Hilfe der 2DOCP Analogie (siehe Abschnitt 2.3.2) berechnet werden. Dazu betrachtet man nur den relevanten ersten Term des LS und schreibt ihn in zweiter Quantisierung,

$$\hat{V}_{LS} = \int d^2 z_1 d^2 z_2 \psi_{m_{\max}(\text{qh})}(z_1)^* \psi_{m_{\max}(\text{qh})} \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}(z_2). \quad (7.16)$$

Zur Berechnung der Variationsenergie

$$\langle \psi_{\text{qh}, l_z} | \hat{V}_{LS} | \psi_{\text{qh}, l_z} \rangle = \int d^2 z_1 d^2 z_2 \psi_{m_{\max}(\text{qh})}(z_1)^* \psi_{m_{\max}(\text{qh})} g^{(1)}(z_1, z_2) \quad (7.17)$$

wird nur der Beitrag (führende Ordnung)  $z_{1,2}^{m_{\max}(\text{qh})}$  im polynomiellen Teil von  $g^{(1)}(z_1, z_2)$  benötigt. Verwendet man, dass der führende Beitrag der Quasilochwellenfunktion gegeben ist durch

$$\psi_{\text{qh}, l_z}(z_1, \dots, z_N) \sim z_1 \cdot e_{l_z-1}(z_2, \dots, z_N) \cdot z_1^{m_{\max}(\text{LN})} e^{-|z_1|^2/4} \cdot \psi_{\text{LN}}(z_2, \dots, z_N), \quad (7.18)$$

so erhält man

$$g^{(1)}(z_1, z_2) \sim N (z_1^* z_2)^{(N-1)/\nu+1} e^{-(|z_1|^2+|z_2|^2)/4} \cdot \frac{\mathcal{N}(\psi_{\text{qh}, l_z} | N-1)}{\mathcal{N}(\psi_{\text{qh}, l_z} | N)}. \quad (7.19)$$



Dabei bezeichnet  $\mathcal{N}(\psi|N)$  das Normquadrat  $\langle \psi | \psi \rangle$  des  $N$ -Teilchenzustandes  $\psi$ . Nach der 2DOCP-Analogie gilt

$$\mathcal{N}(\psi|N) = A^N \int \frac{d^2[z_1, \dots, z_N]}{A^N} e^{-\beta\Phi} \equiv A^N Z(N), \quad (7.20)$$

wobei  $A = \pi \cdot R_{\text{sys}}^2$  die vom 2DOCP eingenommene Fläche bezeichnet. Sie wird für die korrekte Normierung der excess-Zustandssumme  $Z(N)$  des Plasmas benötigt <sup>1</sup> [8]. Mit  $R_{\text{sys}}^2 = \frac{2}{\nu}N$  und  $\beta = \nu$  folgt

$$\Phi = - \sum_{j < k} \frac{2}{\nu^2} \log(|z_j - z_k|) + \frac{1}{2\nu} \sum_j |z_j|^2 - \frac{1}{\nu} \log(e_{l_z}(z_1, \dots, z_N)). \quad (7.21)$$

$\Phi$  beschreibt Teilchen der effektiven Ladung  $e^* = \frac{\sqrt{2}}{\nu}$  mit 2D Coulomb-Wechselwirkung ( $\propto \log|z_j - z_k|$ ), einer Ladungs-Hintergrund Wechselwirkung ( $\propto |z_j|^2$ ) sowie einer weiteren (im allgemeinen komplizierten) Wechselwirkung  $\Phi_{l_z} \equiv -\frac{1}{\nu} \log(e_n(z_1, \dots, z_N))$ . Addiert man den Hintergrund-Hintergrund Wechselwirkungsterm,

$$\Phi_{\text{bg-bg}} = \frac{N^2}{2\nu^2} \left( \log\left(\frac{2}{\nu}N\right) - \frac{3}{2} \right), \quad (7.22)$$

so erhält man das 2DOCP Resultat  $\Phi = \Phi_{2\text{DOCP}}$ , und es lässt sich schreiben

$$\mathcal{N}(\psi|N) = A^N \cdot Z_{2\text{DOCP}}(N) \cdot e^{+\frac{1}{\nu}\Phi_{\text{bg-bg}}}. \quad (7.23)$$

Dabei soll die neue Wechselwirkung  $\Phi_{l_z}$  in  $Z_{2\text{DOCP}}$  berücksichtigt werden. Entwickelt man den Logarithmus der (typischerweise exponentiell mit  $N$  skalierenden) Zustandssumme, so folgt

$$\frac{Z_{2\text{DOCP}}(N-1)}{Z_{2\text{DOCP}}(N)} \approx \exp(-\partial_N \log(Z_{2\text{DOCP}}(N))) = \exp(\nu\mu), \quad (7.24)$$

wobei  $\mu$  das chemische Potential des 2DOCP ist. Für beliebige Zustände  $L_z = L_z(\text{LN}) + l_z$  im Quasilochepektrum macht der Wechselwirkungsterm  $\Phi_{l_z}$  eine allgemeine Behandlung kompliziert, die Fälle  $l_z = 1, N$  lassen sich aber einfach behandeln (siehe unten). Dazu wird das chemische Potential des 2DOCP benötigt, welches nun [13] folgend berechnet wird. Für die excess freie Energie gilt

$$F^{\text{ex}} = N \cdot (e^*)^2 \left[ -\frac{1}{4} \log\left(\pi \frac{N}{A} \ell_B^2\right) + f(\Gamma) \right], \quad (7.25)$$

wobei  $\Gamma = (e^*)^2 \beta \equiv \frac{2}{\nu}$  der *Plasma Parameter* ist und  $f$  gegeben ist durch

$$f(\Gamma) = \frac{1}{\Gamma} \left[ \Gamma_0 f(\Gamma_0) + \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} u(\Gamma') d\Gamma' \right]. \quad (7.26)$$

<sup>1</sup>In der Plasmatheorie werden üblicherweise nur *excess* Größen berechnet, welche die Abweichungen von den Resultaten des idealen Gases angeben. So ist beispielsweise die vollständige Zustandssumme gegeben durch  $Q(A, N, \beta) = Q_{\text{ideal}}(A, N, \beta) \cdot Z(A, N, \beta)$ . Dabei ist  $Q_{\text{ideal}}(A, N, \beta)$  die Zustandssumme des idealen Gases.

Für  $\Gamma_0 \equiv 2$  können die thermodynamischen Funktionen exakt angegeben werden [41], und es gilt

$$f(\Gamma_0) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right). \quad (7.27)$$

Die innere Energie pro Teilchen  $u(\Gamma)$  aus Gleichung (7.26) ist aus einem Fit näherungsweise bekannt [13],

$$u(\Gamma) = -0.375537 + \frac{0.439967}{\Gamma^{0.74}} - \frac{0.104574}{\Gamma^{1.7}}. \quad (7.28)$$

Jetzt lässt sich  $\mu_{LN} = \partial_N F^{\text{ex}}(N)$  einfach berechnen.

### Der $l_z = N$ Quasiloach-Zustand

Laughlin stellte fest, dass der Wechselwirkungsterm  $\Phi_{l_z=N}$  sich als zusätzliche Coulomb- Wechselwirkung zwischen den Ladungen  $e^*$  und einer Phantomladung  $-\nu e^*$  im Ursprung interpretieren lässt [45]. Dies führt zu einer perfekten Abschirmung der Phantomladung<sup>2</sup> und folglich zum Fehlen eines Bruchteils von  $\nu$  Teilchen. Der damit verbundene zusätzliche Beitrag zur freien Energie pro Teilchen kann für die Einteilchen-Wechselwirkung  $\Phi_N$  dann einfach aus der  $g^{(1)}$ -Funktion berechnet werden. Dies ist aber gerade die Dichte des Quasiloachs (5.39). Für den zusätzlichen Beitrag zum chemischen Potential gilt also

$$\delta\mu = -\partial_N 2\pi \int_0^{R_{\text{sys}}(N)} dr \cdot r \cdot \frac{\nu}{2\pi} \left( 1 - e^{-r^2/2} \right) \frac{2}{\nu} \log(r) = -\frac{1}{\nu} \log\left(\frac{2}{\nu} N\right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{N}{\nu}} \right) \quad (7.29)$$

Eine Auswertung des Integrals (7.17) liefert dann die Anregungslücke

$$\left\langle \hat{V}_{\text{LS}} \right\rangle_{\psi_{\text{qh}, l_z=N}} = N \cdot \left[ \mathcal{N}_{m=\frac{N-1}{\nu}+1} \right]^{-2} \frac{(A(N-1))^{N-1}}{(A(N))^N} e^{\nu(\mu_{LN} + \delta\mu)} \cdot e^{\nu(\Phi_{\text{bg-bg}}(N-1) - \Phi_{\text{bg-bg}}(N))}, \quad (7.30)$$

wobei  $\mathcal{N}_m$  die bekannte Normierungskonstante des LLL Zustandes  $\psi_m = z^m e^{-|z|^2/2}$  bezeichnet, siehe (2.16). Für große  $N$  folgt die Anregungslücke sehr präzise einem Potenzgesetz der Form

$$\left\langle \hat{V}_{\text{LS}} \right\rangle_{\psi_{\text{qh}, l_z=N}} \sim N^{-(\frac{1}{\nu}-1)/2}. \quad (7.31)$$

Dies kann durch Entwicklung des Logarithmus der Anregungslücke in  $1/N$  bewiesen werden,

$$\log\left(\left\langle \hat{V}_{\text{LS}} \right\rangle_{\psi_{\text{qh}, l_z=N}}\right) = \left[ \log(\nu) + \nu\mu(\nu) - 1 + \frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\nu} \right) \log\left(\frac{2}{\nu}\right) \right] + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\nu} \right) \log(N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (7.32)$$

---

<sup>2</sup>Diese Abschirmung folgt aus der Summenregel (5.11).

**Der entartete Laughlin-Zustand,  $l_z = 1$** 

Der Quasilohezustand bei  $l_z = 1$  entspricht einer Schwerpunktsanregung des LN-Zustandes, weshalb seine Norm aus der des LN-Zustandes exakt berechnet werden kann. Dazu schreibt man den  $\nu = 1/m$  LN-Zustand in translationsinvarianter Form [39],

$$\psi_{\text{LN},1/m} = \prod_{j<k} \left[ (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4N}|z_j - z_k|^2\right) \right] \cdot \exp\left(-\frac{N}{4}|Z|^2\right), \quad (7.33)$$

wobei  $Z = \frac{1}{N} \sum_j z_j$  der Schwerpunkt ist. Weil  $\prod_{j<k}(\dots)$  translationsinvariant ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\text{LN}|N) = \int_{Z=0} d^2[z_2, \dots, z_N] \left| \prod_{j<k} \left[ (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4N}|z_j - z_k|^2\right) \right] \right|^2 \\ \cdot N \cdot \int d^2 Z \exp\left(-\frac{N}{2}|Z|^2\right). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Das zweite Integral kann einfach ausgewertet werden,

$$N \cdot \int d^2 Z \exp\left(-\frac{N}{2}|Z|^2\right) = 2\pi. \quad (7.35)$$

Analog lässt sich die Norm von  $\psi_{\text{qh},l_z=1} = N \cdot Z \cdot \psi_{\text{LN}}$  schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\psi_{\text{qh},l_z=1}|N) = \int_{Z=0} d^2[z_2, \dots, z_N] \left| \prod_{j<k} \left[ (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4N}|z_j - z_k|^2\right) \right] \right|^2 \\ \cdot N^3 \cdot \int d^2 Z |Z|^2 \exp\left(-\frac{N}{2}|Z|^2\right). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Das erste Integral über den translationsinvarianten Anteil kann aus den Gleichungen (7.35) und (7.36) eliminiert werden, und man erhält

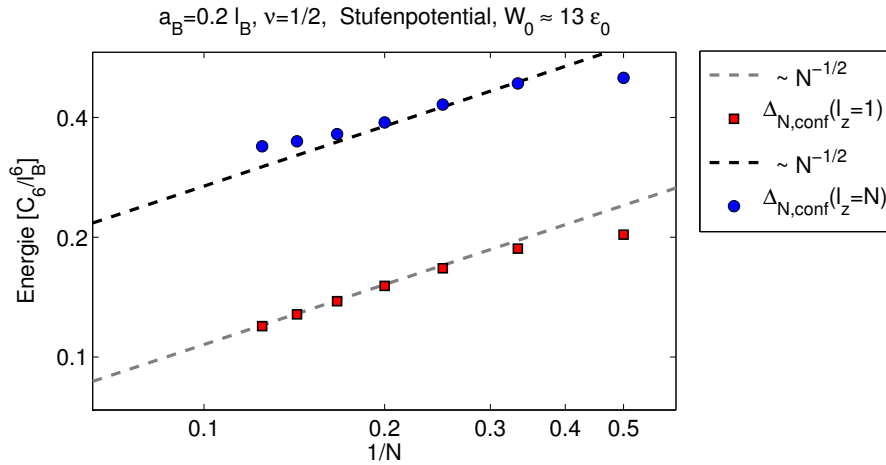
$$\mathcal{N}(\psi_{\text{qh},l_z=1}|N) = \mathcal{N}(\text{LN}|N) \cdot 2N. \quad (7.37)$$

Die übrigen Rechnungen sind analog zu denen aus dem letzten Abschnitt, und man findet schließlich

$$\langle \hat{V}_{\text{LS}} \rangle_{\psi_{\text{qh},l_z=1}} = \frac{1}{\nu} \left( \frac{2}{\nu} N \right)^{-\exp(-N/\nu)} \langle \hat{V}_{\text{LS}} \rangle_{\psi_{\text{qh},l_z=N}}. \quad (7.38)$$

Es gilt also in sehr guter Näherung

$$\langle \hat{V}_{\text{LS}} \rangle_{\psi_{\text{qh},l_z=1}} = \frac{1}{\nu} \langle \hat{V}_{\text{LS}} \rangle_{\psi_{\text{qh},l_z=N}}. \quad (7.39)$$



**Abbildung 7.4:** Ergebnisse für die Anregungslücke  $\Delta_{\text{conf}}$  für  $l_z = 0, N$  qh-Zustände. Dabei wurde der Wechselwirkungsbeitrag der Anregungslücke von den numerischen Daten subtrahiert. Zum Vergleich sind exakte Potenzgesetze  $\sim N^{-1/2}$  gezeigt, die aus (7.31) für LS zu erwarteten sind. Man erkennt für die  $l_z = 1$  Randanregung gute Übereinstimmung. Numerische Untersuchungen zeigen außerdem, dass die Überlappung der numerisch gefundenen Grundzustände mit den verwendeten Ansatz-Wellenfunktionen - trotz des zusätzlichen Fallenpotentials - nach wie vor groß sind ( $1 - |\langle \psi | \text{qh} \rangle|^2 \sim 10^{-7}$ ).

### Numerische Verifikation

In Abbildung 7.3 (rechts) sind die Ergebnisse für Systeme ( $\nu = 1/2, 1/4$ ) mit LS Fallenpotential gezeigt. Dabei wurde  $\mathcal{V}_0 \approx 14 \cdot \epsilon_0$  ( $\nu = 1/2$ ) sowie  $\mathcal{V}_0 \approx 8\epsilon_0$  ( $\nu = 1/4$ ) gewählt, wobei  $\epsilon_0$  die Grundzustandsenergie pro Teilchen bezeichnet. Die Ergebnisse werden außerdem mit den Vorhersagen der oben entwickelten 2DOCP-Theorie des LS verglichen. Für  $\nu = 1/2$  werden die erwarteten Potenzgesetze für  $l_z = 1, N$  bestätigt, und die absoluten Werte stimmen auf unter 3% überein. Für  $\nu = 1/4$  und  $l_z = 1$  ergibt sich eine vergleichbare Genauigkeit, während es bei  $l_z = N$  zu deutlichen Abweichungen für große  $N$  kommt. Dies ist auf einen reduzierten Überlapp mit dem Quasilochnzustand zurückzuführen, denn dessen Erwartungswert wird gut durch die 2DOCP-Theorie beschrieben und folgt dem vorhergesagten Potenzgesetz. Im allgemeinen liegt die Theorie etwas unterhalb der beobachteten Werte, was womöglich durch Abweichungen der inneren Energie von (7.28) verursacht wird.

Es stellt sich die Frage, ob die vorhergesagten Potenzgesetze (7.31) und (7.39) charakteristisch für das LS sind, oder allgemeine Gültigkeit besitzen. Daher wurde ein Fallenpotential der Form

$$V_{\text{conf}}(z) = W_0 \cdot \theta \left( |z| - \sqrt{2m_{\text{max}}(LN)} \ell_B \right) \quad (7.40)$$

untersucht, wobei  $\theta$  die Stufenfunktion ist. In Abbildung 7.4 sind die finite-size Approximationen gezeigt. Für den  $l_z = 1$  Zustand findet man das erwartete Potenzgesetz (7.31), woraus man auf eine allgemeinere Gültigkeit schließen könnte. Im Gegensatz zum LS liegt hier die Fallenenergie

des  $l_z = N$  qh-Zustandes oberhalb derer des  $l_z = 1$  Zustandes. Außerdem erkennt man deutliche Abweichungen vom Potenzgesetz (7.31), und das Krümmungsverhalten spricht für eine endliche Fallenenergie des qh im TDL. Für derartige bulk-Zustände können also die Ergebnisse des LS nicht ohne weiteres übernommen werden.

### 7.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Effekt äußerer Fallenpotentiale untersucht. Diese liefern einen positiven Beitrag zur Energielücke zwischen Laughlin- Zuständen und Quasilo- Anregungen, der den negativen Wechselwirkungsbeitrag kompensieren kann. Kennt man beide Beiträge, so kann der Stabilitätsbereich der Laughlin-Zustände abgeschätzt werden. Hier wurden zwei Potentiale detailliert untersucht, zum einen die harmonische Falle sowie zum anderen das modellhafte Landau-Stufenpotential (LS). Für harmonischen Einschluss wurde das Grundzustands-Phasendiagramm für  $a_B = 0.2\ell_B$  berechnet, in dem sich ausgedehnte Stabilitätsbereiche der  $\nu = 1/2, 1/4$  LN-Zustände zeigen. Die Lage dieser Bereiche konnte in einem einfachen Modell verstanden werden, woraus eine maximale Teilchenzahl  $N_{\max}$  folgt.  $N_{\max}$  wird klein für langreichweitige, und unendlich für Punkt- Wechselwirkungen. Für das LS konnten die Quasilo- Fallenenergien mit Hilfe der 2DOCP-Theorie exakt bestimmt werden, und es wurde gezeigt dass sie im TDL einem Potenzgesetz folgend mit steigender Teilchenzahl  $N$  verschwinden.



# 8 Quantenoptische Realisierung des FQHE mit DZPs

In diesem Kapitel soll eine quantenoptische Realisierung des FQHE vorgestellt und ihre Limitierungen aufgezeigt werden. Es wird diskutiert, inwiefern die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte für die DZPs (siehe Kapitel 3) gelten. Im zweiten Teil wird ein Ausblick gegeben, wie die hoch-korrelierten Laughlin-Zustände und ihre anyonischen Anregungen in solchen Systemen erzeugt und manipuliert werden können.

## 8.1 Setup und realistische Zahlen

In Abbildung 8.1 ist das vorgeschlagene Setup gezeigt. Ein plan-plan optischer Resonator ist mit einem optisch dichten Medium gefüllt, in dem DZP-Moden des EIT- $\Lambda$  Schemas mit einem metastabilen Rydberg-Zustand (siehe Abbildung 3.1 links) betrachtet werden. Zur Erzeugung eines effektiven Magnetfeldes durch Rotation mit der Frequenz  $\nu_r$  wird der Vorschlag von Otterbach et.al. verwendet [57], siehe Abschnitt 3.3. Dazu können die Atome in rotierenden optischen Gittern gefangen werden [57], womit Rotationsgeschwindigkeiten von bis zu  $\nu_r \sim 1\text{kHz}$  erreicht werden können [79]. Hierbei müssen aber optische Gitter verwendet werden, die gleichzeitig Grund- und Rydberg-Zustände fangen. Alternativ können ko-rotierende Gitter verwendet werden. Gefangene Rydberg-Zustände in stationären Gittern wurden experimentell bereits realisiert [3], nach dem Wissen des Autors wurden jedoch noch keine so in Rotation versetzten Rydberg-Zustände beobachtet. Ein anderer vielversprechender Ansatz ist die physikalische Rotation von Festkörper-Matrizen, in die das optisch dichte Medium eingebracht wird [57]. Hierbei ist es vermutlich schwierig genügend große Rotationsgeschwindigkeiten zu erreichen<sup>1</sup>.

Für Rotationsfrequenzen  $\nu_r = 1\text{kHz}$  und Gruppengeschwindigkeiten  $v_g = 20\text{m/s}$  erhält man also

$$\frac{\omega_c}{2\pi} \approx 0.32\text{kHz}, \quad \ell_B \approx 28\mu\text{m}. \quad (8.1)$$

Hierbei wurde angenommen, dass  $\hat{\mathcal{E}}$  eine Wellenlänge  $\lambda_0 = 500\text{nm}$  besitzt.

Die nicht-adiabatischen Korrekturen in der Bewegungsgleichung der DZPs (3.26) führen zu zwei

---

<sup>1</sup>Die schnellsten kommerziell erhältlichen Zentrifugen erreichen beispielsweise Rotationsgeschwindigkeiten von  $\sim 2.5\text{kHz}$ .

Adiabatizitätsbedingungen. Der Term  $\propto L_z^2$  führt auf

$$\nu_r \ll \frac{c}{v_g} \frac{c}{L_{\text{abs}}} \frac{2}{L_z^2} \frac{V_0}{\omega_c}. \quad (8.2)$$

Dabei wurde gefordert, dass die charakteristische Zeitskala des Diffusionsterms  $\propto L_z^2$  viel größer als die des nullten Pseudopotentials  $V_0$  ist. Für  $L_z \sim N^2 \sim 100$  und eine resonante Absorptionslänge  $L_{\text{abs}} = 1\text{mm}$  liefert (8.2)  $\nu_r \ll 10^{11}\text{kHz} V_0/\omega_c$ . Dieser Diffusionsterm spielt also keine Rolle. Der zweite Korrekturterm  $\propto \nabla_{\perp}^4 \sim 1/L_{\perp}^4$  führt mit  $L_{\perp} = \ell_B$  zur Forderung

$$\nu_r \ll 2 \frac{v_g}{L_{\text{abs}}} \frac{V_0}{\omega_c}. \quad (8.3)$$

Für die oben angegebenen Größen liefert dies  $\nu_r \ll 40\text{kHz} V_0/\omega_c$ , was für  $V_0 \sim \omega_c$  und  $\nu_r \sim 1\text{kHz}$  ebenfalls erfüllt ist.

Damit sich das FQHE Spektrum beobachten lässt, muss die Anregungslücke  $\Delta_{\text{ex}}$  messbar sein. Sie ist durch den Blockaderadius  $a_B$  (siehe Gleichung (3.34)) bestimmt, der sich aus der relevanten Linienbreite  $\gamma_B$  im nicht-resonanten Fall berechnen lässt. Das Ergebnis ist

$$\frac{\gamma_B}{2\pi} = \frac{\Omega^2}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2\pi} \approx 0.3\text{kHz}, \quad a_B = \left( \frac{L_{\text{abs}}}{v_g} \frac{|\Delta|}{\gamma} |C_6| \right)^{1/6}. \quad (8.4)$$

Typische Werte für  $C_6$  in Alkali-Atomen können aus [69] entnommen werden. Für Rubidium  $80S_{1/2}$  erhält man beispielweise  $|C_6|/2\pi = 3.3\text{THz}\mu\text{m}^6$ . Damit folgt für  $|\Delta| = 10\gamma$  aus (8.4) ein Blockaderadius  $a_B \approx 47\mu\text{m}$ , was  $a_B \sim 1.7\ell_B$  entspricht. Die zugehörige Exziton-Energie aus Kapitel 5 nimmt dann  $\Delta_{\text{ex}}/2\pi \approx 0.26\text{kHz}$  an. Gleichzeitig beträgt jedoch die Zerfallsrate der Rb  $80S_{1/2}$  Rydberg-Atome  $\gamma_r/2\pi \approx 0.26\text{kHz}$  [67]. Die Anregungslücke zum Quasiloche nimmt hier nicht-auflösbare Werte  $|\Delta_N|/2\pi \sim 60\text{Hz}$  an. Geht man etwas optimistischer von  $L_{\text{abs}} = 0.1\text{mm}$  aus, so kann bei sonst unveränderten Parametern  $\Delta_{\text{ex}}/2\pi \approx 1.2\text{kHz}$  erreicht werden.

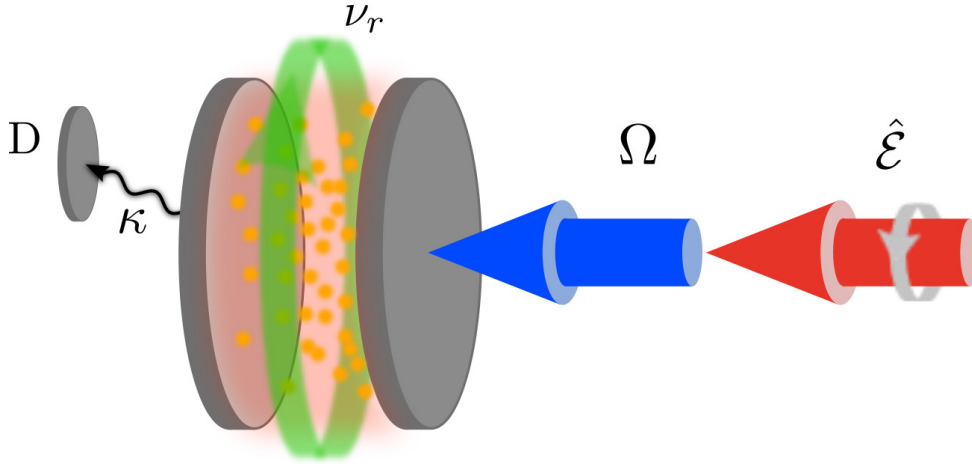
Zur Berechnung der obigen Anregungslücken wurde durchweg die LLL-Approximation verwendet. Das übliche Kriterium für deren Gültigkeit ist  $V_0 < \omega_c$  [78]. Für die gerade betrachteten großen Wechselwirkungen ist dieses nicht erfüllt, da  $V_0/\omega_c \approx 1.0$  ( $V_0/\omega_c \approx 4.8$ ) für  $L_{\text{abs}} = 1\text{mm}$  ( $L_{\text{abs}} = 0.1\text{mm}$ ). Für den  $\nu = 1/2$  LN Zustand wurde aber gefunden, dass das kritische Pseudopotential  $V_{0,c}$ , bis zu dem die LLL-Approximation gilt, durch ein Potenzgesetz von der Teilchenzahl  $N$  abhängt [52]. Für genügend große  $N$  ist die LLL-Approximation also vermutlich anwendbar<sup>2</sup>.

Um quasi-zweidimensionale DZPs zu erhalten, muss der freie Spektralbereich  $\Delta\omega_{\text{FSR}} = \frac{\pi c}{L_c}$  größer als die relevante Energieskala  $V_0$  der Wechselwirkung sein. Daraus erhält man folgende Bedingung

---

<sup>2</sup>In [52] wurden nur Punktwechselwirkungen betrachtet. Hier gilt näherungsweise  $V_0 \gg V_{m \geq 2}$ , es wurde jedoch nicht untersucht, welchen Effekt die höheren Pseudopotentiale auf die Gültigkeit der LLL-Approximation haben. Daher kann hier keine verlässliche Mindestteilchenzahl angegeben werden.





**Abbildung 8.1:** Vorgeschlagenes Setup zur Realisierung des FQHE mit Rydberg Polaritonen.

für die Länge  $L_c$  in longitudinaler Richtung,

$$L_c < \pi \frac{c}{V_0}. \quad (8.5)$$

Die oben vorgeschlagenen Zahlen führen dann wegen des kleinen absoluten Wertes von  $V_0$  auf  $L_c < 9 \cdot 10^5 \text{m}$  (für  $L_{\text{abs}} = 0.1 \text{mm}$ ), was immer erfüllt ist.

Die verwendeten Spiegel sollten möglichst durchlässig für das Kontrollfeld  $\Omega$  sein. Die Zerfallsrate  $\kappa$  des Resonators für das Feld  $\hat{\mathcal{E}}$  muss dagegen klein gegen die Wechselwirkungsenergien sein, damit diese aufgelöst werden können. Das heißt

$$\kappa \frac{v_g}{c} \ll V_0 \sim 0.16 \text{ kHz} \cdot 2\pi, \quad (8.6)$$

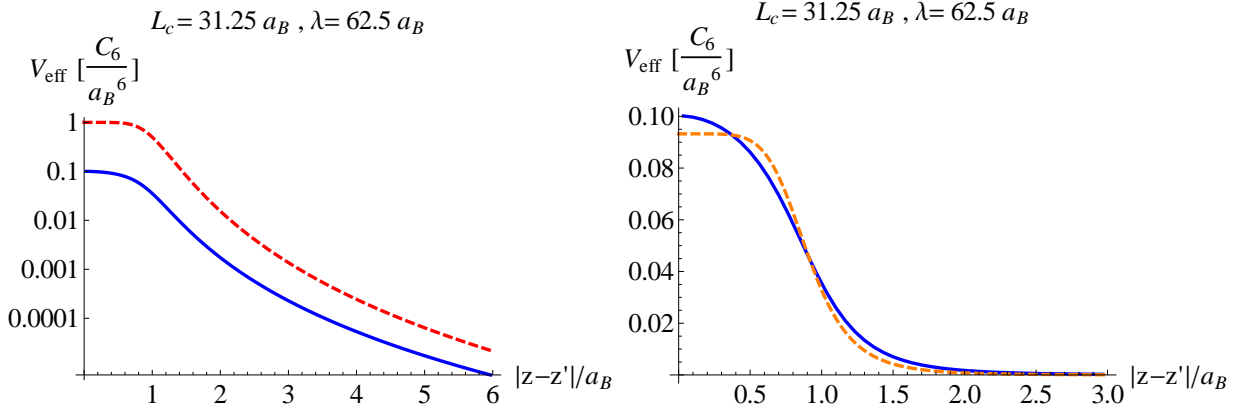
wobei der Faktor  $\frac{v_g}{c}$  die verringerte Umlaufgeschwindigkeit der Photonen im Resonator berücksichtigt. Diese Bedingung ist für  $v_g = 20 \text{m/s}$  einfach zu erfüllen.

### 8.1.1 Korrekturterme in realistischen Setups

Durch die Beschränkung auf eine feste Mode in  $z$ -Richtung (quasi-2D Physik) muss die Wechselwirkung modifiziert werden. Der Feldoperator im optischen Resonator hat die Form

$$\hat{\Psi}_{3D} = \frac{2}{\sqrt{\lambda n_0}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_0\right) \hat{\Psi}(z, z^*). \quad (8.7)$$

Dabei bezeichnet  $\lambda$  die Wellenlänge der longitudinalen Mode,  $z_0$  die (reelle) Koordinate in  $z$ -Richtung und  $z \in \mathbb{C}$  die komplexe Koordinate in der  $x$ - $y$ -Ebene.  $n_0$  gibt die Nummer der longitudinalen Mode an, d.h. die Länge des Resonators ist  $L_c = n_0 \lambda / 2$ . Die durch die *endliche Dicke*



**Abbildung 8.2:** Effektives Wechselwirkungspotential nach Korrekturen für die endliche Dicke (blau). Dabei wurde die unterste longitudinale Mode  $n_0 = 1$  gewählt. *Links:* Zum Vergleich ist das ungestörte Potential gezeigt (rot, gestrichelt). *Rechts:* Zum Vergleich ist ein Fit  $\frac{C'_6}{a'^6_B + r^6}$  gezeigt (orange, gestrichelt). Die Fit-Parameter sind  $C'_6 = 0.051 \cdot C_6$  und  $a'_B = 0.90a_B$ .

korrigierte Wechselwirkung ist demnach von der Form

$$V_{\text{eff}}(|z - z'|) = \frac{C_6}{\lambda^6} \frac{1}{n_0^2 \pi} \int_0^{n_0/2} d\xi \frac{2\pi (n_0 - 2\xi) (2 + \cos(4\pi\xi)) + 3 \sin(4\pi\xi)}{(a_B/\lambda)^6 + (\xi^2 + |z - z'|^2/\lambda^2)^3}. \quad (8.8)$$

Für eine realistische Länge von  $L_c = 1\text{mm}$  ist in Abbildung 8.2 das zugehörige Wechselwirkungspotential gezeigt. Hierbei wurde ein realistischer Blockaderadius  $a_B = 32\mu\text{m}$  sowie  $n_0 = 1$  verwendet. Man erkennt, dass sich die Form der Wechselwirkung wenig ändert, ihr Betrag jedoch auf etwa 1/10 des ursprünglichen Potentials abfällt.

Der Blockademechanismus (siehe Abschnitt 3.4.1) führt außerdem dazu, dass das Polaritonenbild für Abstände unterhalb des Blockaderadius ungültig ist. Einlaufende Polaritonen gehen im Blockadevolumen stattdessen in Photonen über [29]. Dies führt zum Verschwinden der Wechselwirkung in diesem Bereich und somit zu Korrekturen der Pseudopotentiale, siehe Anhang 9.4. Außerdem existiert dort kein Magnetfeld, was zu einer effektiven attraktiven Wechselwirkung auf der Skala  $\omega_c$  führt. Im Folgenden soll diese zusätzliche Wechselwirkung berechnet werden. Dazu werden in den Gleichungen (3.24), (3.25) die Wechselwirkungsterme führender Ordnung in  $\cos \theta$  berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \left( i\partial_t - \sin^2 \theta \nu_r \hat{L}_z + \frac{v_g}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\Psi} = \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi} \\ - \cos \theta \sin \theta \left( \nu_r \hat{L}_z + \frac{c}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\Phi} \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \left( i\partial_t - \cos^2 \theta \nu_r \hat{L}_z + \frac{c \sin^2 \theta}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\Phi} = & -\cos \theta \sin^3 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi} \\ & - i \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Gamma} \hat{\Phi} - \cos \theta \sin \theta \left( \nu_r \hat{L}_z + \frac{c}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Im Folgenden sollen die Ortsableitungen von  $\hat{\Phi}$  explizit berücksichtigt werden. Dazu löst man in (8.9) nach  $(\nu_r L_z + \frac{c}{2k} \nabla_{\perp}^2) \hat{\Phi}$  auf und setzt dies in (8.10) ein. Adiabatische Eliminierung von  $\hat{\Phi}$  ( $\partial_t \hat{\Phi} \rightarrow 0$ ) liefert unter Vernachlässigung irrelevanter Wechselwirkungsterme

$$\hat{\Phi} = i \frac{\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \tan \theta \left( -i\partial_t + \nu_r L_z + \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right) \hat{\Psi}. \quad (8.11)$$

Einsetzen in (8.9) liefert

$$\begin{aligned} \frac{v_g}{2k} \left( 1 - i \frac{\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \tan^2 \theta \left( i\partial_t - \nu_r L_z - \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right) \right) \nabla_{\perp}^2 \hat{\Psi} \\ - \sin^2 \theta \nu_r \left( 1 + i \frac{\Gamma}{\Omega_{\text{eff}}^2} \sin^2 \theta \left( i\partial_t - \nu_r L_z - \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right) \right) L_z \hat{\Psi} \\ + i\partial_t \hat{\Psi} - \sin^4 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi} = \text{“Terme } \sim \partial_i V \text{”}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Betrachtet man hier den Fall großer Wechselwirkung und vernachlässigt demgegenüber Terme  $\sim i\partial_t$ ,  $\sim \nu_r L_z$  sowie  $\partial_i V$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \left( \frac{v_g}{2k} \nabla_{\perp}^2 - \sin^2 \theta \nu_r L_z \right) \hat{\Psi} = \sin^4 \theta \frac{\int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}')}{1 + i \frac{\Gamma}{\Omega^2} \sin^6 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}')} \hat{\Psi} \\ - i \frac{\Gamma}{\Omega^2} \frac{\sin^4 \theta (2 \sin^2 \theta - 1) \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}')}{1 + i \frac{\Gamma}{\Omega^2} \sin^6 \theta \int d^3 \mathbf{r}' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}')} L_z \hat{\Psi}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die Terme auf der linken Seite beschreiben hierbei die transversale Masse und die Corioliskraft. Die neuen Terme auf der rechten Seite sind die Korrekturen zur Wechselwirkung. Um diese besser zu verstehen, soll der Fall einer stationären, nicht-dynamischen Anregung bei  $\mathbf{r} = 0$  betrachtet werden. Dazu setzt man in den Integralen  $\int V \hat{\Psi}^{\dagger} \hat{\Psi}$  nun  $\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}')$ . Der erste Term liefert jetzt das aus [59] bekannte effektive Potential (3.35)

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{C_6}{r^6 + i \frac{\Gamma}{\Omega^2} C_6}. \quad (8.14)$$

Im zweiten Term stehen die Korrekturen durch das fehlende Magnetfeld. Für  $\Gamma = -i\Delta$  sind diese

$$V_B(r) \approx -\frac{\frac{1}{2}\omega_c}{1 + (r/a_B)^6} L_z. \quad (8.15)$$

Wie erwartet ergibt sich also eine attraktive Wechselwirkung auf der Skala  $\omega_c$ . Außerdem ist sie aber  $\propto L_z$ . In einem echten Vielteilchenbild erwartet man demnach eine Wechselwirkung, die proportional zum relativen Drehimpuls der Teilchen ist. Daraus folgt unmittelbar, dass sich das Pseudopotential  $V_0$  nicht ändert. Für die oben diskutierten realistischen Werte und  $V_0 \approx \omega_c$  spielt die zusätzliche Wechselwirkung zunächst keine dominante Rolle. Die Ergebnisse zu einer möglichen Kristallisation im LLL (siehe Kapitel 6) werden aber vermutlich drastisch modifiziert.

### 8.1.2 Zugang zum passenden $L_z$ -Sektor

Um in realistischen Systemen die jeweiligen Grundzustände untersuchen zu können, müssen Zustände im korrekten Drehimpulssektor realisiert werden. In Systemen mit rotierenden BECs wird üblicherweise der nötige Drehimpuls durch die Rotation der Atom-Wolke mit Hilfe der Falle übertragen [68], wobei adiabatisch dem Grundzustand gefolgt werden muss [62]. Dabei stellt sich das Problem, dass die zur Rotation nötigen Anisotropien der Falle die hoch-korrelierten FQHE-Zustände als Grundzustände benachteiligen.

In dem betrachteten System mit DZPs kann der Drehimpuls wesentlich einfacher als orbitaler Drehimpuls des einfallenden Pumplichts  $\hat{\mathcal{E}} \sim e^{-il\phi}$  übertragen werden. Dies ist in Abbildung 8.1 durch einen rotierenden Pfeil angedeutet. Die  $l$ - $n$ -Laguerre-Gauss Moden besitzen im Fokus Modenfunktion der Form [2]

$$u_{l,n}(r, \phi) \sim e^{-il\phi} r^l L_n^l \left( \frac{2r^2}{w_0^2} \right) e^{-r^2/w_0^2}, \quad (8.16)$$

wobei  $w_0$  die Strahltaile angibt. Dies sind gerade die benötigten LL Einteilchen-Zustände, die gleichzeitig den Drehimpuls  $L_z$  diagonalisieren (2.17). Verwendet man also Pumplicht  $\mathcal{E} \sim u_{l,n}$  in solchen Laguerre-Gauss Moden, so lassen sich LLL-Zustände im gewünschten Drehimpulssektor präparieren. Eine solche Übertragung orbitalen Photonen-Drehimpulses auf kalte atomare Gase wurde experimentell bereits realisiert [18].

Im folgenden Abschnitt soll nun ein Ausblick gegeben werden, wie der  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustand und seine elementaren Anregungen in realistischen Systemen realisiert werden könnten.

## 8.2 Ausblick: Offene FQHE Systeme

Um die interessanten Laughlin- Zustände untersuchen und manipulieren zu können, müssen diese von den Polaritonen besetzt werden. Als Grundzustände können sie durch eine Kühlung des Systems prinzipiell erreicht werden, was in Experimenten mit kalten Gasen versucht wird. Nach dem Kühlvorgang muss dabei adiabatisch die Fallenfrequenz erhöht werden, wodurch das Verfahren experimentell äußerst anspruchsvoll ist [68]. In einem quantenoptischen Aufbau können dagegen offene Systeme verwendet werden, in denen die zusätzlichen Polariton-Polariton- Verluste über die

ein-Photonen Verstimmung  $\Delta$  gut kontrollierbar sind. Dabei kann man sich die speziellen Cluster-Eigenschaften der Zustände zunutze machen [10]. Ähnliche Ideen wurden bereits in [65] für den Pfaffian- Zustand bei  $\nu = 1$  für kalte Gase vorgeschlagen, wobei die intrinsischen drei-Körper Verluste ausgenutzt wurden. Der Pfaffian- Zustand ist auch für Rydberg-DZPs ein Kandidat bei Füllung  $\nu = 1$ , siehe Anhang 9.10. Durch nicht-lineare optische Prozesse sind in quantenoptischen Systemen analoge drei-Körper Verluste denkbar, und die Ergebnisse [65] lassen sich auf solche Systeme verallgemeinern.

Neben Polariton-Verlusten kann auch die Rydberg-Blockade in offenen Systemen verwendet werden, um in hoch-korrelierte Dunkelzustände zu pumpen. Im folgenden wird dazu ein idealisierter Pumpprozess vorgestellt, mit dem  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustände im Flussgleichgewicht realisiert werden können.

### 8.2.1 Realisierung der Laughlin Zustände

#### Post-Selektion

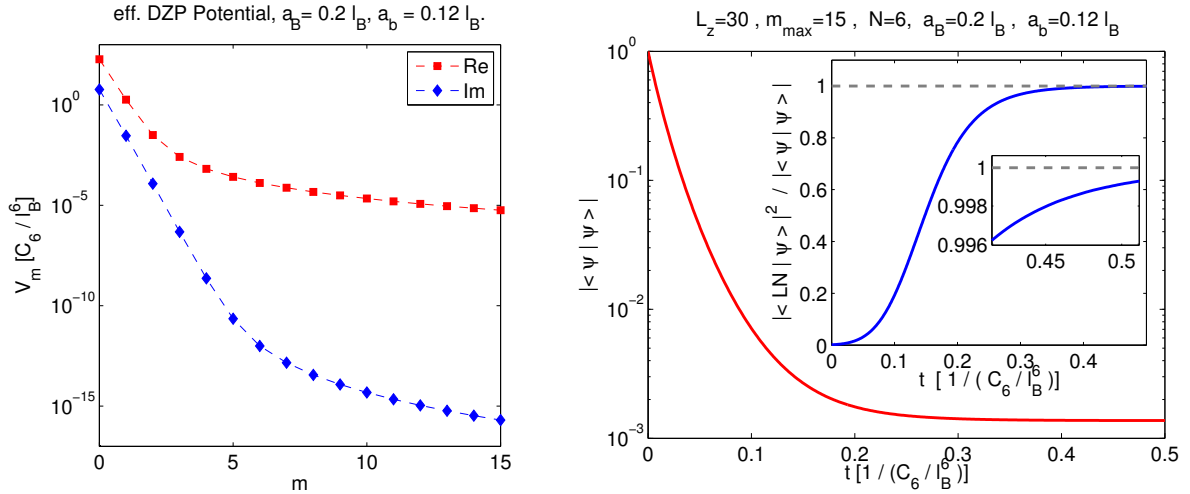
Bisher wurde durchweg  $|\Delta| \gg \gamma$  angenommen, so dass sich ein reelles Potential (3.35) ergibt. Im Allgemeinen gibt es aber auch komplexe Beiträge, und nach Gleichung (8.14) gilt

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{C_6}{r^6 + ia_b^6 + a_B^6}. \quad (8.17)$$

Hierbei wurden alle Vorzeichen der Verstimmungen so gewählt, dass Resonanzen vermieden sind. In Abbildung 8.3 (links) ist das daraus erhaltene Pseudopotential gezeigt. Für kleine  $m$  ergeben sich zunächst große Zerfallsraten, während ab  $m \gtrsim 4$  mehr als vier Größenordnungen zwischen Real- und Imaginärteil liegen.

Um die Zerfallsprozesse korrekt zu beschreiben, reicht es nicht den so erhaltenen effektiven Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  zu betrachten. Es müssen Quantensprünge berücksichtigt werden, deren Wahrscheinlichkeit durch  $\text{Im}\mathcal{H}_{\text{eff}}$  gegeben sind. Beschränkt man sich jedoch auf Zustände, für die keine Quantensprünge stattgefunden haben (z.B. durch Post-Selektion), so kann deren Form alleine aus der Dynamik von  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  berechnet werden. Im vorgeschlagenen Setup kann diese Post-Selektion durch die Messung von Polaritonenzerfällen durchgeführt werden. Dazu müssen geeignete Detektoren hinter dem Resonator angebracht werden, siehe Abbildung 8.1.

In Abbildung 8.3 (rechts) ist eine Simulation der Dynamik eines Fock-Zustandes gezeigt. Dabei sind zur Zeit  $t = 0$   $N$  Teilchen im Landau-site  $m = L_z(LN)/N$ . Man erkennt, dass die Amplitude zunächst exponentiell abfällt, dann jedoch einen quasi-stationären Wert erreicht. Für  $N = 6$  Teilchen ist dieser bereits so klein, dass die beschriebene Post-Selektion extrem zeitaufwendig ist. Der Überlapp zum Laughlin-Zustand steigt gleichzeitig bis nahezu eins an. Für sehr kleine Teilchenzahlen ist dieses Verfahren also gut geeignet um den LN-Zustand zu präparieren. Um auch größere Laughlin-Zustände zu realisieren, wird im Folgenden ein offenes Quantensystem betrachtet, bei



**Abbildung 8.3:** *Links:* Pseudopotential für die komplexe Wechselwirkung (8.17). *Rechts:* Norm (rot) des Zustandes  $|\psi(t)\rangle$  als Funktion der Zeit. Im Inset ist der zugehörige Überlapp (blau) mit dem Laughlin-Zustand gezeigt. Es ist jeweils  $a_B = 0.2\ell_B$  und  $a_b = 0.12\ell_B$ , d.h.  $\Delta/\gamma \sim 10$ .

dem mehrere  $N$ -Sektoren sowie ein realistischer Pumpterms berücksichtigt werden.

### Rydberg-Blockade

Die Rydberg-Blockade führt zu verschwindenden Pumpraten innerhalb des Blockadevolumens einer Rydberg-Anregung, siehe 3.4.1. Für  $a_B \approx \ell_B$  erwartet man folglich eine Unterdrückung von Pumpprozessen in zwei-Teilchen Relativzustände mit  $m = 0$ . Im Folgenden sollen inkohärente Pumpprozesse in Landau-sites  $j$ , der Form  $L_j \propto \sqrt{\gamma(j)} \hat{b}_j^\dagger$  betrachtet werden. Um den Blockademechanismus zu modellieren wird im Lindblad-Generator zusätzlich ein Faktor benötigt, der sicherstellt dass Quantensprünge nur stattfinden, wenn sich nirgends zwei Teilchen mit Relativedrehimpuls  $m = 0$  befinden. Zur Konstruktion eines solchen Projektors kann der Hamiltonoperator der Punktwechselwirkung (im LLL)

$$\mathcal{H}_\delta = \mathcal{P}_{\text{LLL}} \int d^2z \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}(z) \hat{\Psi}(z) \mathcal{P}_{\text{LLL}} \quad (8.18)$$

verwendet werden. Die Zustände mit mindestens zwei Jastrow-Faktoren  $\prod_{j < k} (z_j - z_k)^2$  besitzen einen verschwindenden Eigenwert, während andere Zustände echt positive Eigenwerte  $\omega > 0$  besitzen. Mit  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-(\omega/\epsilon)} = \delta_{\omega,0}$  lässt sich der benötigte Projektor konstruieren, und der Lindblad-Generator hat die Form

$$L_j = \sqrt{\gamma(j)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \mathcal{H}_\delta\right) \hat{b}_j^\dagger. \quad (8.19)$$

Des weiteren sollen auch die im vorangegangenen Teilabschnitt diskutierten Polariton-Polariton Verluste in der Master-Gleichung berücksichtigt werden. Die zugehörigen Lindblad-Generatoren werden so konstruiert, dass sich die korrekte zwei-Teilchen Zerfallsrate ergibt,

$$\langle M', m' | \mathcal{H}_{\text{eff}} | M, m \rangle \stackrel{!}{=} i \delta_{M, M'} \delta_{m, m'} \text{Im} V_m. \quad (8.20)$$

Dabei bezeichnen  $M, m$  die Drehimpulsquantenzahlen in der zwei-Teilchen Relativbasis (2.44) und  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = i \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu}$ , wobei über alle Generatoren summiert wird. Weil in einer derartigen 2-Polariton-Streuung ein Teilchen mit Relativdrehimpuls  $m$  mit der Rate  $\text{Im} V_m$  vernichtet wird, ist der einfachste sinnvolle Lindblad-Generator von der Form

$$L(M, m) = \hat{b}_M^{\dagger} \sqrt{\text{Im} V_m} \sum_{m_1, m_2} \alpha(M, m, m_1, m_2) \hat{b}_{m_1} \hat{b}_{m_2}. \quad (8.21)$$

Die Bedingung (8.20) liefert dann für die Koeffizienten

$$\alpha(M, m, m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle M, m | m_1, m_2 \rangle, \quad (8.22)$$

wobei das benötigte Matrixelement aus (2.52) bekannt ist.

Die kohärente Dynamik führt genauso wie die Polariton-Polariton Verluste zu einer Expansion des Systems, d.h. es werden zunehmend Zustände mit großen Einteilchen-Drehimpulsen besetzt. Um dies zu vermeiden, werden starke Verlustterme am Rand eingeführt,

$$L_m = \sqrt{\gamma_{\text{edge}}} \cdot \theta \left( m - m_{\text{max}}(\text{LN}) - \frac{1}{2} \right) \hat{b}_m. \quad (8.23)$$

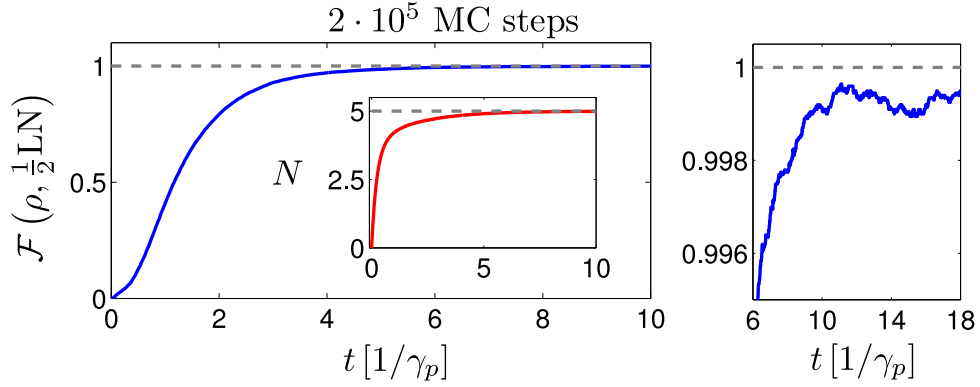
Die Mastergleichung in Lindblad-Form mit allen oben eingeführten Lindblad-Generatoren  $L_{\mu}$  lautet

$$i \partial_t \rho = [\mathcal{H}, \rho] + \frac{i}{2} \sum_{\mu} \left[ 2 L_{\mu} \rho L_{\mu}^{\dagger} - \rho L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} - L_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} \rho \right]. \quad (8.24)$$

Sie wurde mit Monte-Carlo Methoden numerisch gelöst, und man erhält die Ergebnisse aus Abbildung 8.4. Dabei wurde die Dynamik vom Vakuum-Zustand  $|0\rangle$  gestartet. Die Fidelity

$$\mathcal{F} \left( \rho, \frac{1}{2} \text{LN} \right) = \text{Tr} \left( \rho \sum_N \left| \frac{1}{2} \text{LN}, N \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} \text{LN}, N \right| \right) \quad (8.25)$$

nimmt für große Zeiten sehr große Werte  $\sim 0.9990$  an, und es ergibt sich ein Teilchenzahl-Eigenzustand  $N = 5$ . Es ist zu erwarten, dass sich ähnliche Ergebnisse auch für größere Teilchenzahlen ergeben. Folglich lässt sich der LN-Zustand als Dunkelzustand im vorgestellten offenen Quantensystem realisieren.



**Abbildung 8.4:** Monte-Carlo Simulation der Mastergleichung (8.24) mit drei Typen von Lindblad-Generatoren  $L_\mu$ : (i) inkohärenter Pumpprozess (8.19) mit  $\gamma(m) = \gamma_p \cdot \theta(m_{\max}(\text{LN}) + \frac{1}{2} - m)$ , (ii) DZP-DZP-Verluste mit einer Rate beschrieben durch  $\text{Im}V_{\text{eff}}$  aus (8.17), (iii) Randverluste (8.23). Dabei wurden  $m_{\max} = 15$  Landau-sites in allen  $N = 0, \dots, 6$  Sektoren berücksichtigt. Die weiteren Parameter sind:  $m_{\max}(\text{LN}, N = 5) = 8$ ,  $a_B = 0.2\ell_B$ ,  $a_b = 0.1\ell_B$ ,  $\gamma_p = 0.51\text{Im}V_0$ ,  $\gamma_{\text{edge}} = 5.1\text{Im}V_0$ .

Wie verlässlich die Näherung (8.19) ist, kann an dieser Stelle nicht mit Sicherheit gesagt werden. In realistischen Systemen kommt es auch zu Pumpprozessen in Zustände mit zwei-Teilchen Relativdrehimpuls  $m = 0$ , so dass sich die Fidelity gegenüber den oben gefundenen Ergebnissen verschlechtern sollte.

### 8.2.2 Realisierung von Quasiloeh-Anyonen mit DZP

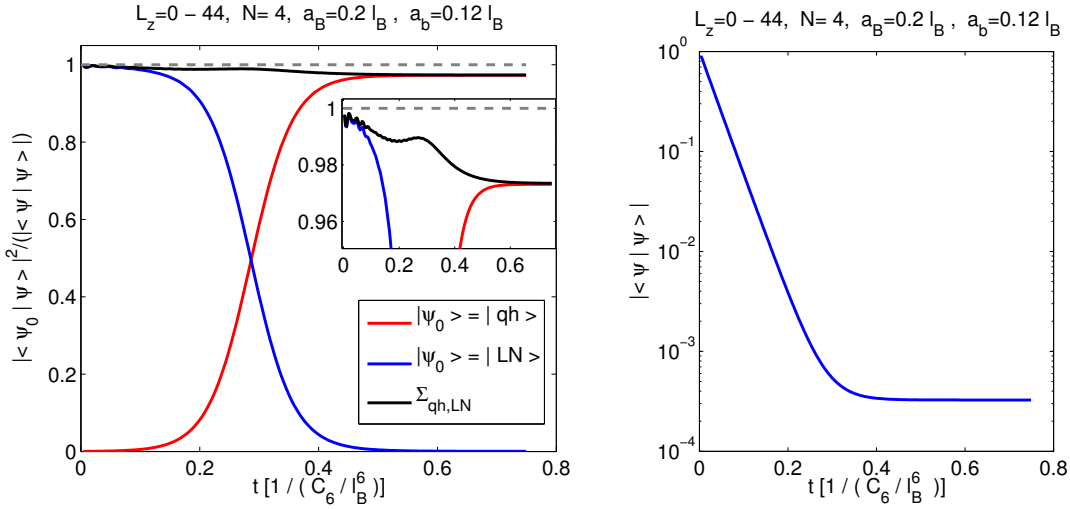
Wie Quasiloeh-Anregungen auf dem  $\nu = 1/2$  LN-Zustand erzeugt und analysiert werden können, wurde in [60] untersucht. Es wurde gezeigt, dass zusätzliche lokale, attraktive Fallenpotentiale, die z.B. durch Laser erzeugt werden können, den qh-Zustand als Grundzustand besitzen. Außerdem können Superpositionen von einem und zwei Quasiloehern erzeugt werden, mit deren Hilfe in einem geschickten interferometrischen Experiment die fraktionale braiding Statistik (siehe Anhang 9.1) nachgewiesen werden kann.

Diese Ideen können auch im vorgeschlagenen quantenoptischen Aufbau umgesetzt werden. Anstelle der Fallenpotentiale können jedoch auch starke lokale Verlustterme implementiert werden. Sie sind von der Form

$$\mathcal{H}_{\text{LC}}(z_{\text{qh}}) = -ig \hat{\Psi}^\dagger(z_{\text{qh}}) \hat{\Psi}(z_{\text{qh}}). \quad (8.26)$$

Dies kann beispielweise durch eine lokale Veränderung der ein-Photonen Verstimmung  $\Delta$  geschehen. Im Unterschied zum unitären Vorschlag [60] kann der Quasiloeh-Zustand jetzt auch für ein festes  $g$  erzeugt werden, d.h. es ist kein adiabatischer Prozess nötig. Dies ist in Abbildung 8.5 (links) gezeigt, wobei als Anfangszustand der LN- Zustand verwendet wurde. Allerdings ergeben sich wieder große Verluste, und die Norm des Zustandes fällt auch für kleine Teilchenzahlen dramatisch ab, siehe Abbildung 8.5 (rechts).





**Abbildung 8.5:** *Links:* Überlapp des Zustandes  $|\psi(t)\rangle$  mit dem Laughlin-Zustand (rot) und dem Quasichiralzustand (blau). Zur Zeit  $t = 0$  ist das System im LN-Zustand. *Rechts:* Norm des Zustandes  $|\psi(t)\rangle$  als Funktion der Zeit. Es ist jeweils  $a_B = 0.2\ell_B$  und  $a_b = 0.12\ell_B$ , d.h.  $\Delta/\gamma \sim 10$ .

Um den qh-Zustand wie in 8.2.1 im Flussgleichgewicht zu erzeugen, muss er als (näherungsweise) Eigenzustand des unitären Teils des Hamiltonoperators Dunkelzustand aller Lindblad-Generatoren sein. Ob sich solche Generatoren für realistische Implementierungen finden lassen ist an dieser Stelle nicht klar. Es reicht jedenfalls nicht, im  $m = 0$ -ten Landau-site einen lokalen Verlustterm zu betrachten. Der qh-Zustand ist dann kein Dunkelzustand für den Pumpprozess (8.19).

### 8.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein realistisches Setup zur Realisierung von fraktionaler quanten-Hall-Physik vorgeschlagen. Dabei werden stark wechselwirkende Rydberg-Polaritonen in einem optischem Resonator betrachtet, wobei das atomare Medium rotiert wird. Anhand realistischer Zahlen wurde gefolgert, dass eine experimentelle Realisierung wegen der benötigten hohen Rotationsfrequenzen, kleinen Absorptionslängen sowie großen Wechselwirkungen zwar anspruchsvoll aber dennoch machbar erscheint. Dabei wurde gezeigt, dass nicht-adiabatische Korrekturterme klein sind, während die Annahme der LLL-Approximation insbesondere für kleine Teilchenzahlen kritisch hinterfragt werden muss. Außerdem wurden durch die Rydberg-Blockade verursachte Korrekturterme zu dem in der Arbeit durchweg verwendeten Polaritonenpotential  $V_{\text{eff}} = C_6/(r^6 + a_B^6)$  vorhergesagt, die als lokale Störung der LL-Nullpunktenergie  $\omega_c/2$  verstanden werden können. Vermutlich führen diese Korrekturen nicht nur zu quantitativen, sondern auch zu qualitativen Änderungen einiger Ergebnisse dieser Arbeit.

Im zweiten Teil des Kapitels wurde ein Ausblick gegeben, wie Laughlin-Zustände im vorgeschlage-

nen offenen Quantensystem realisiert werden können. Dazu wurden zunächst Polariton-Polariton-Verluste verwendet, mit denen durch Post-Selektion für kleine Teilchenzahlen  $\nu = 1/2$  Laughlin- sowie Quasiloeh- Zustände präpariert werden können. Danach wurde gezeigt, dass der  $\nu = 1/2$  Laughlin-Zustand außerdem im Flussgleichgewicht realisiert werden kann. Dazu wurden drei Arten von Lindblad-Generatoren betrachtet: inkohärente Pumpprozess (unter Berücksichtigung des Blockade-Effekts), Polariton-Polariton- Verluste sowie erhöhte Verluste des optischen Resonators am Rand.

# 9 Anhang

## 9.1 2D Physik und Anyonische Braiding Statistik

Die Quantenstatistik beschreibt das Verhalten der Vielteilchen-Wellenfunktion, wenn zwei Teilchen miteinander vertauscht werden. Dabei kann sich wegen der Ununterscheidbarkeit der Teilchen nur die Phase ändern und nicht die Amplitude. Im Folgenden soll ein Vielteilchen-Hamiltonian  $\mathcal{H}$  betrachtet werden, der Grundzustände besitzt, welche durch lokalisierte Störungen bei  $\mathbf{R}_j$  beschrieben werden können. Die Koordinaten dieser Störungen sind also Parameter von  $\mathcal{H}$ . Die im Rahmen des FQHE betrachteten Quasiloche-Zustände sind ein Beispiel, wobei ihre Positionen z.B. durch Fallenpotentiale  $V_{\mathbf{R}_j}$  in  $\mathcal{H}$  charakterisiert werden können. Ändert man nun die Positionen dieser Störungen ( $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j(t)$ ) und folgt dabei *adiabatisch* dem Grundzustand, so sammelt die Vielteilchen-Wellenfunktion (neben der dynamischen Phase, die für  $\dot{\mathbf{R}}_j \rightarrow 0$  verschwindet) eine *Berry-Phase*  $\gamma$  auf [11]. Vollführt  $\mathbf{R}_j \equiv \mathbf{R}$  eine geschlossene Schleife  $\mathcal{C}$ , so gilt [39]

$$\gamma = i \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{R} \cdot \langle \psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi(\mathbf{R}) \rangle. \quad (9.1)$$

Führt  $\mathcal{C}$  um (mindestens) ein weiteres Teilchen, so nennt man den Vorgang *braiding*. In diesem Fall kann der geschilderte Prozess auch als ein zweimaliges Vertauschen der beteiligten Quasiteilchen ( $\mathbf{R}$  und die  $\mathbf{R}_j$  innerhalb  $\mathcal{C}$ ) betrachtet werden. Die so erhaltene *Statistik* der Vielteilchen-Wellenfunktion bezüglich der Vertauschung zweier Quasiteilchen heißt dann *braiding Statistik*.

Drückt man die Berry-Phase  $\gamma$  aus (9.1) durch ein Oberflächenintegral über den *Berry-Fluss* (Satz von Stokes) aus, so findet man, dass letzterer für  $d = 3$  Raumdimensionen verschwindet. Für  $d = 2$  kann man dagegen nicht-triviale Berry-Phasen erhalten. Die zugehörigen braiding-Statistiken sind also für  $d = 3$  trivial (Bosonen und Fermionen) und liefern für  $d = 2$  die Möglichkeit *anyonischer braiding-Statistik*. In diesem Fall ändert sich die Phase der Wellenfunktion um  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Betrachtet man außerdem entartete Grundzustände mit internen Freiheitsgraden, die beim braiding *nicht* adiabatisch  $\mathbf{R}_j$  folgen, so ergibt sich die Möglichkeit *nicht-abelscher braiding Statistik*. Dabei ändert sich die Vielteilchen-Wellenfunktion durch einen Faktor  $U$ , der im allgemeinen eine unitäre Matrix darstellt. Für nicht-triviale  $U$  führt dies dazu, dass die Reihenfolge des an den Teilchen durchgeführten braidings Einfluss auf die Wellenfunktion nach dem braiding hat. Die möglichen Freiheitsgrade eines solchen Systems lassen sich algebraisch mit Hilfe der *braiding-Gruppe* verstehen [55].

## 9.2 Korrelationsfunktionen

Um ein Verständnis für Vielteilchensysteme zu erlangen ist die Wellenfunktion üblicherweise zu komplex. Daher betrachtet man einfachere Größen, bei denen die meisten Freiheitsgrade aufintegriert werden. Die einfachste Größe ist die Dichte bzw.  $g^{(1)}$  Funktion,

$$g^{(1)}(z_1) \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}(z_1) \rangle. \quad (9.2)$$

Der Erwartungswert muss dabei bzgl. des vollen Vielteilchenzustands genommen werden. Analog definiert man die  $g^{(2)}$ -Funktion durch

$$g^{(2)}(z_1, z_2) \equiv \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \hat{\Psi}(z_2) \hat{\Psi}(z_1) \rangle}{\langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}(z_1) \rangle \langle \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \hat{\Psi}(z_2) \rangle}. \quad (9.3)$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an ein Teilchen bei  $z_2$  zu detektieren, *wenn* schon bei  $z_1$  eines gefunden wurde. Ist die Vielteilchenwellenfunktion  $\psi(z_1, \dots, z_N)$  bekannt, so lassen sich die beiden Funktionen berechnen aus

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(z) \hat{\Psi}(z') \rangle = N \int d^2 z_2 \dots d^2 z_N \psi^*(z, z_2, z_3, \dots, z_N) \psi(z', z_2, z_3, \dots, z_N), \quad (9.4)$$

sowie

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \hat{\Psi}(z_2) \hat{\Psi}(z_1) \rangle = N(N-1) \int d^2 z_3 \dots d^2 z_N |\psi(z_1, z_2, z_3, \dots, z_N)|^2. \quad (9.5)$$

Zur numerischen Auswertung drückt man die Feldoperatoren durch die Vernichter  $\hat{c}_m$  und Erzeuger  $\hat{c}_m^\dagger$  der jeweils verwendeten Einteilchenbasis  $\Psi_m(z)$  aus,

$$\hat{\Psi}^\dagger(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m^*(z) \hat{c}_m^\dagger. \quad (9.6)$$

Damit erhält man

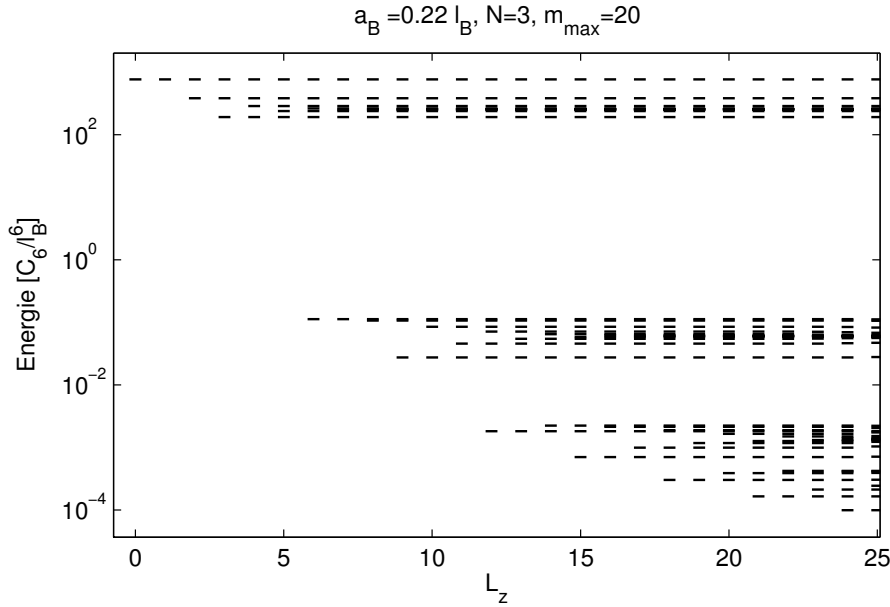
$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}(z_2) \rangle = \sum_{m_1, m_2} \Psi_{m_1}^*(z_1) \Psi_{m_2}(z_2) \langle \hat{c}_{m_1}^\dagger \hat{c}_{m_2} \rangle, \quad (9.7)$$

und

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(z_1) \hat{\Psi}^\dagger(z_2) \hat{\Psi}(z_2) \hat{\Psi}(z_1) \rangle = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \Psi_{m_1}^*(z_1) \Psi_{m_2}^*(z_2) \Psi_{m_3}(z_2) \Psi_{m_4}(z_1) \langle \hat{c}_{m_1}^\dagger \hat{c}_{m_2}^\dagger \hat{c}_{m_3} \hat{c}_{m_4} \rangle. \quad (9.8)$$

## 9.3 Yrast-Spektren in Scheiben- und Kugelgeometrie

Hier sollen die grundlegenden Eigenschaften der berechneten Yrast-Spektren in Scheiben- und Kugelgeometrie eingeführt werden.



**Abbildung 9.1:** Ein typisches Yrast-Spektrum in der Scheibengeometrie. Man beachte die logarithmische Auftragung.

### 9.3.1 Scheibengeometrie

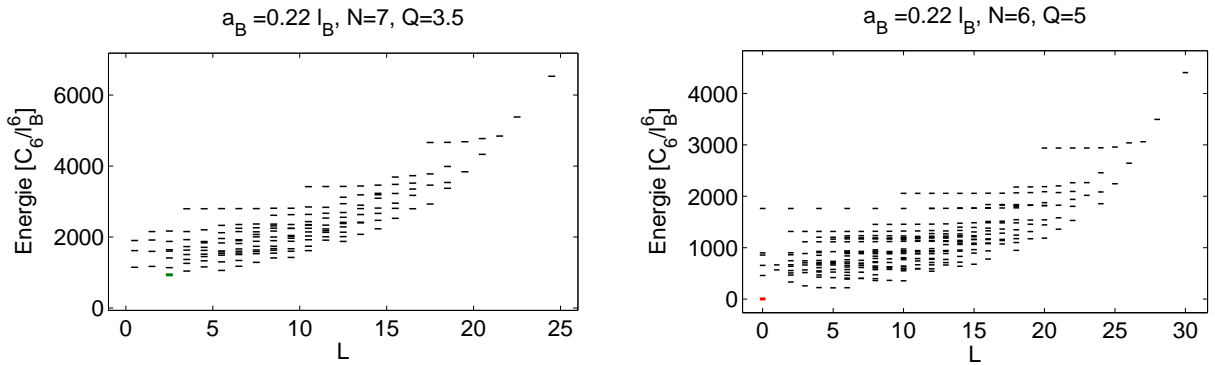
In der Scheibengeometrie ist der Gesamtdrehimpuls in  $z$ -Richtung  $L_z$  eine gute Quantenzahl für das wechselwirkende Vielteilchenproblem. In Abbildung 9.1 ist ein typisches Vielteilchenspektrum gezeigt. Dabei wurde von einer kurzreichweitigen Van-der-Waals Wechselwirkung  $C_6/(r^6 + a_B^6)$  ausgegangen. Das Spektrum zerfällt in mehrere quasi-kontinuierliche Energiebänder, die durch Energielücken voneinander getrennt sind. Die Zustände minimalen Drehimpulses dieser Bänder sind gerade die inkompressiblen FQHE Zustände. Man beachte außerdem, dass jeder Zustand einen entarteten Partner im Sektor nächsthöheren Drehimpulses besitzt. Diese Entartung kann als eine Schwerpunktsanregung

$$\psi(z) \rightarrow \left( \sum_j z_j \right) \cdot \psi(z) \equiv e_1(z) \cdot \psi(z), \quad (9.9)$$

verstanden werden, bei der die Wechselwirkungsenergie unverändert bleibt. Eine weitergehende Klassifizierung der beobachteten Zustände kann in [72] gefunden werden.

### 9.3.2 Kugelgeometrie

In der Kugelgeometrie sind alle Zustände mit gleichem  $L_z = \sum_j L_{z,j}$  entartet. Dafür existiert mit dem Gesamtdrehimpulsquadrat  $\mathbf{L}^2$  eine weitere gute Quantenzahl, über der die Vielteilchenspektren aufgetragen werden. In Abbildung 9.2 ist das vollständige Spektrum eines Systems mit



**Abbildung 9.2:** *Links:* Vollständiges Vielteilchenspektrum für einen typischen kompressiblen Zustand bei  $Q = 3.5$ . Der Grundzustand des Systems ist grün markiert. *Rechts:* Vollständiges Vielteilchenspektrum für einen typischen inkompressiblen Zustand bei  $Q = 5$ . Der inkompressiblen Grundzustand des Systems ist rot markiert.

kompressiblem (a) und inkompressiblem (b) Grundzustand gezeigt. Dabei wurde von einer Van-der-Waals Wechselwirkung  $C_6/(r^6 + a_B^6)$  ausgegangen. Der Grundzustand in (a) bricht nicht die Rotationssymmetrie und besitzt demnach eine homogene Dichte. Der Grundzustand in (b) bricht dagegen explizit die Rotationssymmetrie,  $L(L+1) \neq 0$ . Hoch angeregte Zustände können wegen der kurzreichweitigen Wechselwirkung nur realisiert werden, wenn sich viele Teilchen in einem einzigen Drehimpulszustand befinden. Daher sind diese Zustände für große Gesamtdrehimpulse zu finden.

## 9.4 Effekte durch endlichen Blockade-Radius

Das Polaritonenbild versagt innerhalb des Blockadevolumens eines weiteren Polaritons. Für den Fall großer ein-Photonen Verstimmung  $\Delta$  kann von Verlusten abgesehen werden, und das Polariton durchquert das Blockadevolumen mit Lichtgeschwindigkeit  $c \gg v_g$  [29]. Folglich gibt es maximal ein Polariton pro Blockadevolumen. Um diesen Effekt zu beschreiben wird im Folgenden angenommen, dass der Hilbertraum im Polaritonenbild dadurch eingeschränkt ist auf

$$\mathcal{H}_{a_B} = \{\Psi(z) | \Psi(z) = 0 \text{ mit } |z| < a_B\} \subset \mathcal{H}_0. \quad (9.10)$$

Dazu führt man einen Projektor auf diesen Unterraum harter Kugeln (HS) ein,

$$\mathcal{P}_{HS}\Psi(z_1, \dots, z_N) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z_i - z_j| < a_B \\ \Psi(z_1, \dots, z_N) & \text{sonst} \end{cases}. \quad (9.11)$$

Es ist zu erwarten, dass der beschriebene Blockadeeffekt zu einer Modifikation der LL Struktur der kinetischen Energie führt. Diese lässt sich im Rahmen des reduzierten Hilbertraumes aber nicht einfach behandeln, nachdem die kinetische Energie eine komplizierte Funktion des Polariton-

Polariton Abstandes ist. Daher wird im Folgenden angenommen, dass die Rydberg Blockade für kleine  $a_B$  nur zu einer Änderung der (Wechselwirkungs-) Energien im LLL führt. Als Basis des reduzierten Hilbertraumes  $\mathcal{H}_{a_B}$  soll

$$\{\mathcal{P}_{HS}|n_1, m_1; \dots; n_N, m_N\rangle_S\}, \quad (9.12)$$

verwendet werden, wobei  $n$  die LL und  $m$  die Landau site Quantenzahl bezeichnen.  $S$  steht für die Verwendung des vollständig symmetrisierten Zustandes. In normierter Form gilt also

$$|\tilde{n}_1 \tilde{m}_1; \dots; \tilde{n}_N \tilde{m}_N\rangle_S := \frac{\mathcal{P}_{HS}|n_1 m_1; \dots; n_N m_N\rangle_S}{\sqrt{\langle n_1 m_1; \dots; n_N m_N | \mathcal{P}_{HS} | n_1 m_1; \dots; n_N m_N \rangle}}. \quad (9.13)$$

Die neuen Matrixelemente des Hamiltonians sind jetzt

$${}_S\langle \tilde{n}_1 \tilde{m}_1; \dots; \tilde{n}_N \tilde{m}_N | \mathcal{H} | \tilde{n}'_1 \tilde{m}'_1; \dots; \tilde{n}'_N \tilde{m}'_N \rangle_S = \frac{{}_S\langle n_1, m_1; \dots | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | n'_1, m'_1; \dots \rangle_S}{\sqrt{\langle n_1 m_1; \dots | \mathcal{P}_{HS} | n_1 m_1; \dots \rangle \langle n'_1 m'_1; \dots | \mathcal{P}_{HS} | n'_1 m'_1; \dots \rangle}}. \quad (9.14)$$

Nun wird ein störungstheoretischer Ansatz in  $a_B$  gewählt,

$$\mathcal{H}(a_B) = \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} = \mathcal{H}^{(0)} + a_B \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{O}(a_B^2). \quad (9.15)$$

Solange  $\mathcal{H}^{(0)}$  den dominanten Anteil darstellt, ist eine Projektion auf das LLL gültig. Es reicht also sich auf die Zustände

$$|\tilde{m}_1; \dots; \tilde{m}_N\rangle := |\tilde{n}_1 = 0 \tilde{m}_1; \dots; \tilde{n}_N = 0 \tilde{m}_N\rangle \quad (9.16)$$

zu beschränken.

Für die Normierung werden die Matrixelemente von  $\mathcal{P}_{HS}$  benötigt,

$$\begin{aligned} \langle m_1, \dots, m_N | \mathcal{P}_{HS} | m'_1, \dots, m'_N \rangle &= \prod_j \delta_{m_j, m'_j} - a_B^2 \sum_{k < l} \left( \prod_{j \neq k, l} \delta_{m_j, m'_j} \right) \\ &\quad \delta_{m_k + m_l, m'_k + m'_l} 2^{-(m_k + m_l) - 2} \frac{(m_k + m_l)!}{\sqrt{m_k! m'_k! m_l! m'_l!}} + \mathcal{O}(a_B^4). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Zur Normierung in (9.14) wird nur der Fall  $m_j = m'_j$  benötigt, und die zugehörigen Matrixelemente von  $\mathcal{P}_{HS}$  sind  $\sim 1$ . Dann kann die Wurzel dieses Matrixelements in  $a_B$  entwickelt werden. Führt man einen Operator

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N}} = 2^{-3} \sum_{k < l} 2^{-\hat{L}_z^{(k)} - \hat{L}_z^{(l)}} \frac{(\hat{L}_z^{(k)} + \hat{L}_z^{(l)})!}{(\hat{L}_z^{(k)})! (\hat{L}_z^{(l)})!} \quad (9.18)$$

ein, wobei  $\hat{L}_z^{(l)}$  den Drehimpuls des Teilchens  $l$  bezeichnet, so lässt sich schreiben

$${}_S\langle \tilde{m}_1; \dots; \tilde{m}_N | \mathcal{H} | \tilde{m}'_1; \dots; \tilde{m}'_N \rangle_S = {}_S\langle m_1; \dots; m_N | \mathcal{H}_{eff} | m'_1; \dots; m'_N \rangle_S + \mathcal{O}(a_B^4). \quad (9.19)$$

Hierbei ist

$$\mathcal{H}_{eff} = (1 + a_B^2 \mathcal{H}_N) \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} (1 + a_B^2 \mathcal{H}_N). \quad (9.20)$$

Der Hamiltonian lautet in zweiter Quantisierung also

$$\mathcal{H} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \langle m_1 m_2 | \mathcal{H}_{eff} | m_3 m_4 \rangle \hat{c}_{m_1}^\dagger \hat{c}_{m_2}^\dagger \hat{c}_{m_3} \hat{c}_{m_4}. \quad (9.21)$$

Die Matrixelemente können in Schwerpunktskoordinaten ausgewertet werden,

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | m_3 m_4 \rangle &= 2^{-3-m_3-m_4} \frac{(m_3 + m_4)!}{m_3! m_4!} \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} \\ &\sum_m \langle m_1 m_2 | M m \rangle \langle M m | m_3 m_4 \rangle \langle M m | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | M m \rangle, \end{aligned} \quad (9.22)$$

mit

$$\langle M m | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H}_{int} \mathcal{P}_{HS} | M m \rangle = 2\pi \tilde{\mathcal{N}}_m^2 \int_{a_B}^{\infty} dr r^{1+2m} e^{-r^2/4} V(r) =: V_m^{\text{eff}}. \quad (9.23)$$

Dabei ist  $\tilde{\mathcal{N}}$  der Normierungsfaktor aus Gleichung (2.46). Man erkennt also, dass sich durch die Projektion auf  $\mathcal{H}_{a_B}$  im wesentlichen die Pseudopotentiale ändern,  $V_m \rightarrow V_m^{\text{eff}}$ . Durch die Normierung  $\mathcal{H}_N$  ergeben sich außerdem weitere Beiträge zum Pseudopotential. Dabei ist zu beachten, dass diese nun explizit von  $M$  abhängen. Trotzdem ist das Problem vollständig rotationssymmetrisch.

### 9.4.1 Abschätzung der Korrekturterme

Zur Abschätzung der Korrekturen,

$$\Delta V_m = V_m - V_m^{\text{eff}} = 2\pi \tilde{\mathcal{N}}_m^2 \int_0^{a_B} dr r^{2m+1} V(r) e^{-r^2/4}, \quad (9.24)$$

lässt sich das Potential um  $r = 0$  entwickeln,

$$V(r) = \sum_n \alpha_n r^n. \quad (9.25)$$

Im Fall der Van-der-Waals Wechselwirkung  $\sim 1/(r^6 + a_B^6)$  funktioniert diese Entwicklung nur für  $r < a_B$ , was aber im Integral für  $\Delta V_m$  ausreicht. Es gilt dann  $\alpha_0 = \frac{C_6}{a_B^6}$  und eine kurze Rechnung zeigt

$$\Delta V_m = \delta_{m,0} \cdot \frac{1}{4} \cdot a_B^2 \cdot \alpha_0 + \mathcal{O}(a_B^4). \quad (9.26)$$



Demnach ändert sich in Ordnung  $a_B^2$  lediglich das Pseudopotential  $V_0$ .

Die Normierungsterme  $\mathcal{H}_N$  spielen eine untergeordnete Rolle. Die Matrixelemente  $\langle m_1, m_2 | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H}_N | m_3, m_4 \rangle$  sind maximal für  $m_3 = m_4 = 0$ , und es gilt

$$\langle m_1 m_2 | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H}_N + \mathcal{H}_N \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | m_3 m_4 \rangle \leq \frac{1}{4} \langle m_1 m_2 | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | m_3 m_4 \rangle. \quad (9.27)$$

Numerische Daten zeigen, dass die Normierungsbeiträge exponentiell mit  $|m_1 - m_2|$  nach einem Potenzgesetz mit  $m_1 + m_2$  verschwinden. Der dominierende Effekt der Rydberg Blockade ist demnach die Änderung des nullten Pseudopotentials  $V_0 \rightarrow V_0^{\text{eff}}$ .

### 9.4.2 Höhere LL

Um den Effekt der Beimischung höherer LL für die neuen Pseudopotentiale (9.23) abzuschätzen, kann geschrieben werden

$$\langle Mm | \mathcal{P}_{HS} \mathcal{H} \mathcal{P}_{HS} | Mm \rangle = \sum_{n, n'} \langle m0 | \mathcal{P}_{HS} | mn \rangle \langle mn | \mathcal{H} | mn' \rangle \langle mn' | \mathcal{P}_{HS} | m0 \rangle. \quad (9.28)$$

Nun lässt sich fordern, dass der Unterraum  $\mathcal{H}_{a_B}$  derart gewählt wurde, dass für seine zugehörigen Projektionen gilt

$$\langle mn | \mathcal{P}_{HS} | m0 \rangle = \delta_{n,0} + \mathcal{O}(a_B^2). \quad (9.29)$$

Dies ist für  $\mathcal{P}_{HS}$  aus (9.11) der Fall. Es sollte aber aus geometrischen Gründen auch für glatte Projektionen gelten, bei denen für  $z = a_B$  keine Unstetigkeit entsteht. Aus Gleichung (9.28) folgt nun, dass die Beimischung höherer LL wie  $\sim a_B^4$  skaliert.

Für  $\mathcal{P}_{HS}$  aus (9.11) divergieren die Beiträge höherer LL wegen der un stetigen Projektionsmethode. Diese führt zu divergierenden kinetischen Energien  $\partial_z^2 \theta(z) \sim \delta'(z)$ .

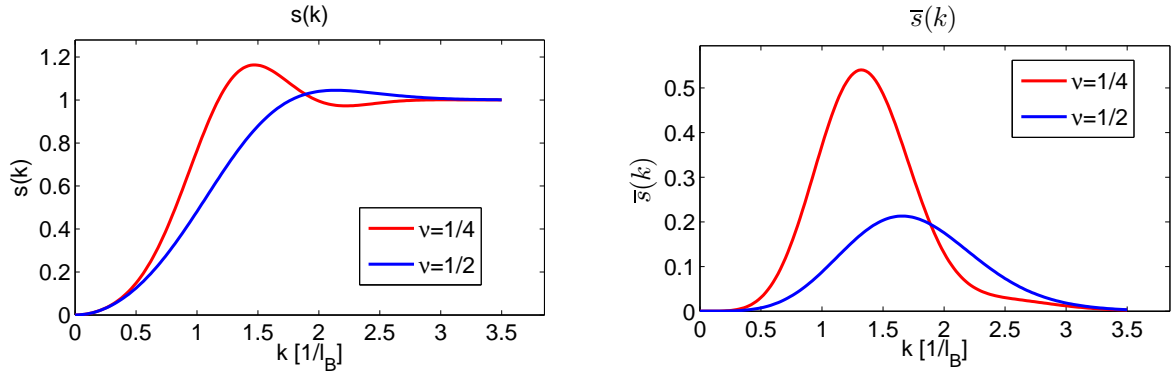
## 9.5 Ein-Moden Näherung in der GMP Theorie

<sup>1</sup> Um die im Text (Kapitel 5.2.1) eingeführten Strukturfaktoren zu verstehen, lohnt es sich den allgemeineren *dynamischen Strukturfaktor* einzuführen,

$$S(\mathbf{k}, \omega) = N^{-1} \sum_n \langle \psi_0 | \bar{\rho}_{\mathbf{k}}^\dagger | \psi_n \rangle \delta(\omega - E_n + E_0) \langle \psi_n | \bar{\rho}_{\mathbf{k}} | \psi_0 \rangle. \quad (9.30)$$

Dabei ist  $\psi_0$  der Grundzustand (mit Energie  $E_0$ ), und  $\psi_n$  sind angeregte Zustände.  $S(\mathbf{k}, \omega)$  gibt also an, wie stark der Grundzustand über den (projizierten) Dichteoperator  $\bar{\rho}_{\mathbf{k}}$  an angeregte Zustände

<sup>1</sup>Die Darstellung folgt [28].



**Abbildung 9.3:** Links: unprojizierte statische Strukturfaktoren für  $\nu = 1/2, 1/4$  LN Zustände. Rechts: projizierte statische Strukturfaktoren für  $\nu = 1/2, 1/4$  LN Zustände.

der Energie  $\omega$  koppelt. Daraus folgt, dass sich  $\bar{s}(\mathbf{k})$  und  $\bar{f}(\mathbf{k})$  durch  $S(\mathbf{k}, \omega)$  ausdrücken lassen,

$$\bar{f}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty d\omega \omega S(\mathbf{k}, \omega), \quad \bar{s}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty d\omega S(\mathbf{k}, \omega). \quad (9.31)$$

Folglich ist die Anregungslücke

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{\bar{f}(\mathbf{k})}{\bar{s}(\mathbf{k})} \quad (9.32)$$

das exakte erste Moment von  $S(\mathbf{k}, \omega)$ . Diese Näherung ist sehr zuverlässig, wenn  $S(\mathbf{k}, \omega)$  nur die Kopplung an eine einzige Mode erlaubt. Sowohl die GMP Theorie als auch Feynmans Theorie zu flüssigem Helium basieren daher beide auf der *Ein-Mode-Approximation* (SMA). Ist die SMA verletzt, so gibt  $\Delta(\mathbf{k})$  lediglich die durchschnittliche Energie aller höherer (Kontinuums-) Moden an, die über die Dichte  $\bar{\rho}_{\mathbf{k}}$  an den Grundzustand koppeln. Für kleine  $k$  ist die SMA erfüllt, da dann  $\bar{\rho}_{\mathbf{k}}|\psi_0\rangle \approx |\psi_0\rangle$  gilt und somit nur an wenige niederenergetische Moden gekoppelt werden kann. Für große  $k$  ist die SMA dagegen nicht erfüllt, was auch in den numerischen Ergebnissen aus Abschnitt 5.2.2 deutlich wird.

In Abbildung 9.3 sind für  $\nu = 1/2, 1/4$  der unprojizierte ( $s(k)$ ) und der projizierte ( $\bar{s}(k)$ ) Strukturfaktor gezeigt. Man erkennt, dass der für die GMP Theorie relevante Strukturfaktor ( $\bar{s}(k)$ ) ein deutliches Maximum aufweist, das dem *Magneto-Roton* entspricht. Hier weist das System eine große Suszeptibilität auf.

## 9.6 Pseudopotentiale auf der Sphäre

Da die LL Eigenfunktionen auf der Sphäre  $Y_{Qlm}$  für gegebenes  $Q$  eine Darstellung der Spinalgebra sind, können die Regeln für die Addition von Drehimpulsen verwendet werden. Damit und unter

Verwendung von  $[\mathcal{H}_{int}, \hat{\mathbf{L}}_{tot}^2] = 0$  l#sst sich schreiben

$$\langle Qm_1; Qm_2 | \mathcal{H}_{int} | Qm_3; Qm_4 \rangle = \sum_{J=0}^{2Q} \sum_{M=0}^J \langle Qm_1; Qm_2 | JM \rangle \langle JM | Qm_3; Qm_4 \rangle V_J^{(Q)}. \quad (9.33)$$

Die #berlappen sind Clebsch-Gordan Koeffizienten und die Pseudopotentiale auf der Kugel definiert als

$$V_J^{(Q)} = \langle JM | \mathcal{H}_{int} | JM \rangle = \langle \alpha_J | \hat{V} | \alpha_J \rangle, \quad (9.34)$$

wobei  $|\alpha_J\rangle$  ein beliebiger Zustand im Gesamtdrehimpuls- $J$  Unterraum ist. Die letzte Gleichheit folgt aus der Unabh#ngigkeit der Wechselwirkung von  $L_z$  (von  $M$ ), d.h. es gibt keine ausgezeichnete Richtung der Wechselwirkung. W#hlt man ([19] folgend) f#r  $|\alpha_J\rangle$  Haldanes koh#renten Zweiteilchen Zustand [31],

$$\Psi_{(\alpha, \beta)}^{(Q, J)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{2Q-J} \prod_{i=1,2} (\alpha^* u_i + \beta^* v_i)^J, \quad (9.35)$$

mit  $\alpha = 1, \beta = 0$ , so lassen sich die  $V_J^{(Q)}$  durch Integration  $\int d\Omega_1 d\Omega_2$  erhalten. Die relevanten Schritte sind in [19] gezeigt.

## 9.7 Quasiloeh Anregungslueke f#r $r^{-\gamma}$ - Wechselwirkungen

F#r Wechselwirkungen

$$\mathcal{V}(r) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } r < \epsilon \\ C_\gamma / r^\gamma & \text{wenn } r \geq \epsilon \end{cases} \quad (9.36)$$

kann  $g_{pp}^{(2)}$  in Potenzen von  $r$  und  $R$  entwickelt werden. Dann kann die Integration in Gleichung (5.36) gliedweise exakt durchgef#hrt werden und man erh#lt Integrale vom Typ

$$\int_\epsilon^\infty dr r^{2\beta-\gamma+1} e^{-r^2/4} = 2^{4\beta-2\gamma+1} \Gamma\left(1 + \beta - \frac{\gamma}{2}, \frac{\epsilon^2}{4}\right). \quad (9.37)$$

F#r  $\beta + 1 > \gamma/2$  und hinreichend kleinen cut-off  $\epsilon$  l#sst sich n#hern,

$$\Gamma\left(1 + \beta - \frac{\gamma}{2}, \frac{\epsilon^2}{4}\right) \approx \left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)!. \quad (9.38)$$

Damit lassen sich die Summen  $\sum_{\beta}$  über die Integrale der einzelnen Potenzen analytisch berechnen. Für  $l_z = 0$  erhält man folgendes Ergebnis für die Anregungslücke:

$$\begin{aligned} \Delta_{pp} = \nu^2 2^{-\gamma/2} & \left( \sum_{\beta=0}^{\beta_c} \Gamma\left(\beta - \beta_c, \frac{\epsilon^2}{2}\right) \left\{ \frac{2^{-\beta-1}}{\beta!} \left(1 + (-1)^\beta\right) (1 + c_\beta) - \frac{2}{\beta!} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{n=0}^{\frac{\beta}{2}} \frac{c_{2n} 2^{2-\beta}}{(2n)! (\beta - 2n)!} - 2\delta_{\beta,0} \right\} - \frac{2^{-2-\beta_c}}{\beta_c!} (H_{(\beta_c-1)/2} - H_{\beta_c/2}) \right. \\ & + \frac{(-1)_c^\beta}{\beta_c + 1} \cdot {}_2F_1\left(1, 1; 2 + \beta_c; -\frac{1}{2}\right) + \sum_{\beta=\beta_c+1}^{\infty} c_\beta (\beta + 1)_{(-1-\beta_c)} 2^{-\beta-1} \left(1 + (-1)^\beta\right) - \\ & - \frac{2}{\beta_c^2 \Gamma(\beta_c)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{(2n)!} \frac{2^{3-\max\{2n, 1+\beta_c\}}}{(\max\{2n, 1+\beta_c\} - 2n)!} \cdot (-1 - \beta_c + \max\{2n, 1 + \beta_c\})! \\ & \left. \cdot {}_2F_1\left(1, 1 - 2n + \beta_c; 1 - 2n + \max\{2n, 1 + \beta_c\}; -1\right) \right), \end{aligned}$$

wobei  $\beta_c = 1 - \frac{\gamma}{2}$ .  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$  bezeichnet die *harmonischen Zahlen* und  $(a)_n$  das Pochhammer Symbol. Für andere  $l_z$  wurden die Rechnungen nicht durchgeführt, es sollten sich aber analoge analytische Ausdrücke finden lassen.

## 9.8 Quasiloeh Korrelationsfunktionen im Fall $\nu = 1$

Für  $\nu = 1$  lassen sich alle Korrelationsfunktionen exakt berechnen [26],

$$g^{(n)}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(-\sum_{j=1}^n |z_j|^2/2\right) \det \exp(z_i z_j^*/2), \quad (9.39)$$

wobei folgende Normierung verwendet wurde:

$$\int d^{2N} z g^{(n)} = \frac{N!}{(N-n)!}. \quad (9.40)$$

Dabei wird ausgenutzt, dass sich ein Yastrow-Faktor als einfache Vandermonde Determinante schreiben lässt. Insbesondere gilt für die Dichte-Dichte- Korrelationsfunktion

$$g^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(1 - e^{-|z_1 - z_2|^2/2}\right). \quad (9.41)$$

Für den Fall eines Quasiloehes bei  $l_z$  (d.h.  $\psi \sim \prod_{j < k} (z_j - z_k) \cdot e_{l_z}$ ) wurden die Rechnungen [26] im Rahmen dieser Arbeit verallgemeinert und im TDL gefunden

$$\rho_{\text{qh}}(z) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{|z|^{2l_z}}{2^{l_z} \cdot l_z!} e^{-|z|^2/2} \right) \quad (9.42)$$

sowie

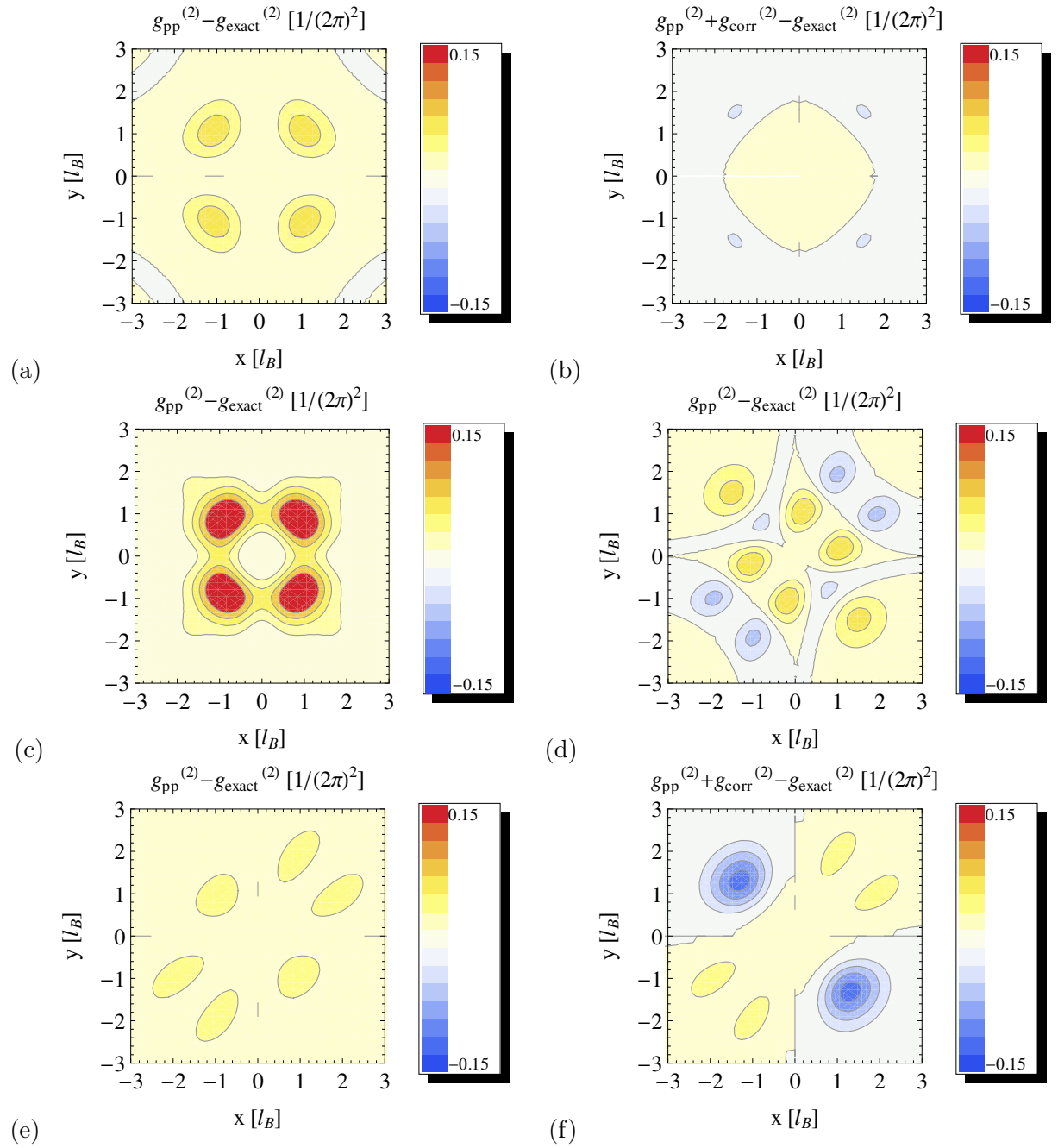
$$g^{(2)}(z_1, z_2) \cdot (2\pi)^2 = \rho_{\text{qh}}(z_1) \rho_{\text{qh}}(z_2) - e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2)/2} \cdot \left( e^{z_1 z_2^*/2} - \frac{(z_1 z_2^*)^{l_z}}{2^{l_z} \cdot l_z!} \right) \left( e^{z_2 z_1^*/2} - \frac{(z_2 z_1^*)^{l_z}}{2^{l_z} \cdot l_z!} \right). \quad (9.43)$$

In Abbildung 9.4 (a),(c),(d),(e) wird das exakte Ergebnis mit der vorgeschlagenen Näherung  $g_{\text{pp}}^{(2)}$  für  $\nu = 1$  verglichen. Man findet Abweichungen um das Quasiloeh, die maximal  $0.15/(2\pi)^2$  für  $l_z = 2$  werden. Man findet auch, dass die Abweichungen für  $l_z = 2$  maximal werden, während sie für steigende  $l_z$  sinken. In Abbildung 9.4 (b) und (f) werden zusätzlich die Ergebnisse unter Berücksichtigung der in (5.50) vorgeschlagenen Korrekturen  $g_{\text{corr}}^{(2)}$  mit (5.55) und (5.56) für  $l_z = 0$  mit dem exakten Ergebnis verglichen. Wenn beide Teilchen auf einer Verbindungsachse durch den Ursprung liegen (b), liefern die Korrekturen bessere Übereinstimmung, während sie im anderen Fall (f) zu schlechteren Ergebnissen führen.

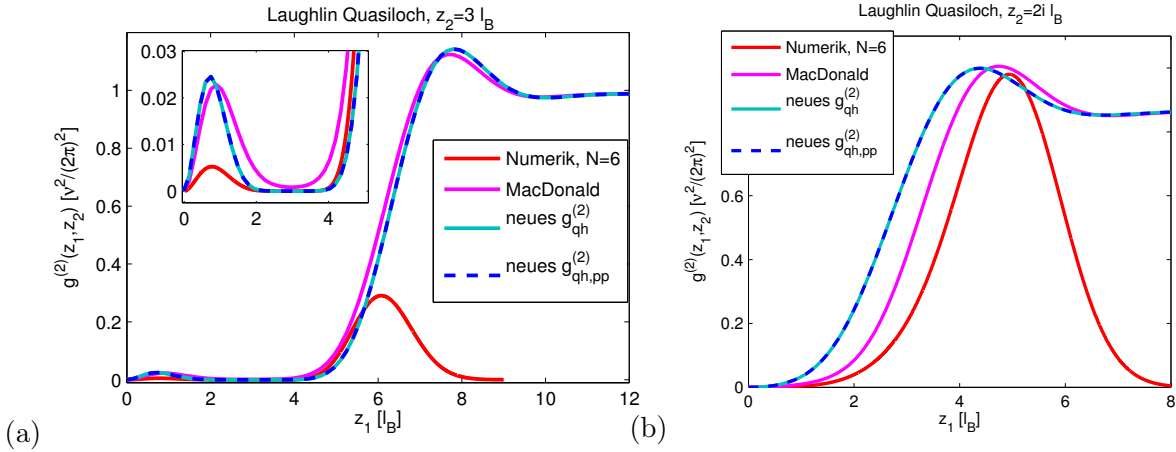
Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die neu eingeführte analytische Form der Quasiloeh Korrelationsfunktion im Fall  $\nu = 1$  eine sinnvolle Näherung darstellt. Die Korrekturkoeffizienten  $\gamma_{\alpha,\beta}^\delta$  sind noch nicht hinreichend genau bekannt, sie führen aber nur zu kleinen Abweichungen. Daher wird vermutet, dass der Hauptteil  $g_{\text{pp}}^{(2)}$  die Korrelationen um das Quasiloeh auch für kleinere Füllfaktoren gut wiedergibt.

## 9.9 Quasiloeh Korrelationsfunktionen im Fall $\nu = 1/4$

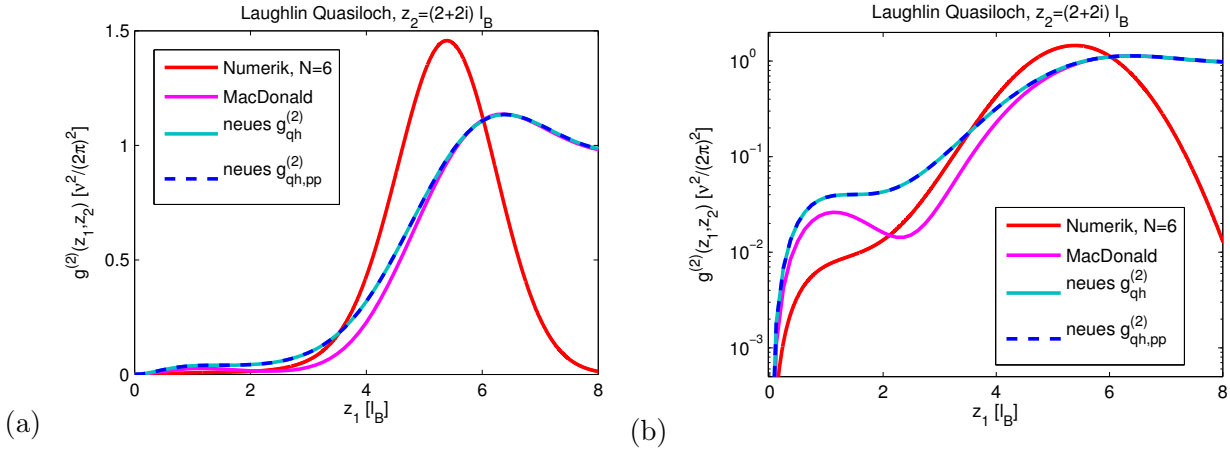
In Abbildung 9.5 bis 9.7 werden die verschiedenen in Abschnitt 5.3.2 eingeführten Dichte-Dichte Korrelationsfunktionen für Systeme mit Füllung  $\nu = 1/4$  mit numerischen Resultaten verglichen. Qualitativ stimmen die neue Korrelationsfunktion und die nach MacDonald im Bereich des Quanten-Hall Tropfens beide mit der Numerik überein, siehe Abbildung 9.7. Die Oszillationen am Rand des Tropfens sind finite-size Effekte. Die neue Korrelationsfunktion beschreibt korrekt das Verhalten um die Position  $\xi = 0$  des Quasiloehs und liefert im Gegensatz zur MacDonaldschen Funktion das korrekte Verhalten für kleine  $r = |z_1 - z_2|$ , siehe Abbildung 9.5 (a). Man findet, dass im Falle  $\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2$  die MacDonaldsche Funktion quantitativ bessere Vorhersagen liefert, wobei  $\mathbf{r}$  den 2D Ortsvektor zu einer komplexen Zahl  $z$  in der Ebene bedeutet. Dies ist aus Abbildung 9.5 (b) ersichtlich. Für  $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$  liefert dagegen die neue Korrelationsfunktion bessere Ergebnisse, siehe Abbildung 9.5 (a). Zwischen diesen beiden Grenzfällen existieren Bereiche, in denen jeweils eine



**Abbildung 9.4:** Größte gefundene Differenzen zwischen der Näherung  $g_{pp}^{(2)}$  und der exakten Korrelationsfunktion  $g_{\text{qh}}^{(2)}$  im Fall  $\nu = 1$ . Dabei sind folgende Parameter gezeigt: (a)  $l_z = 0, z_1 = x, z_2 = i \cdot y$  (b) wie (a), aber unter der Berücksichtigung der Korrekturen  $\sim \Gamma$  aus (5.56). (c)  $l_z = 2, z_1 = x, z_2 = i \cdot y$  (d)  $l_z = 2, z_1 = x, z_2 = y$  (e)  $l_z = 0, z_1 = x, z_2 = y$  (f) wie (e), aber unter der Berücksichtigung der Korrekturen  $\sim \Gamma$  aus (5.56).



**Abbildung 9.5:** Vergleich der verschiedenen  $g^{(2)}(z_1, z_2)$  Funktionen des Laughlin Quasiloeh Zustandes bei Füllung  $\nu = 1/4$ . (a)  $z_2 = 3l_B$ , (b)  $z_2 = 2il_B$ .

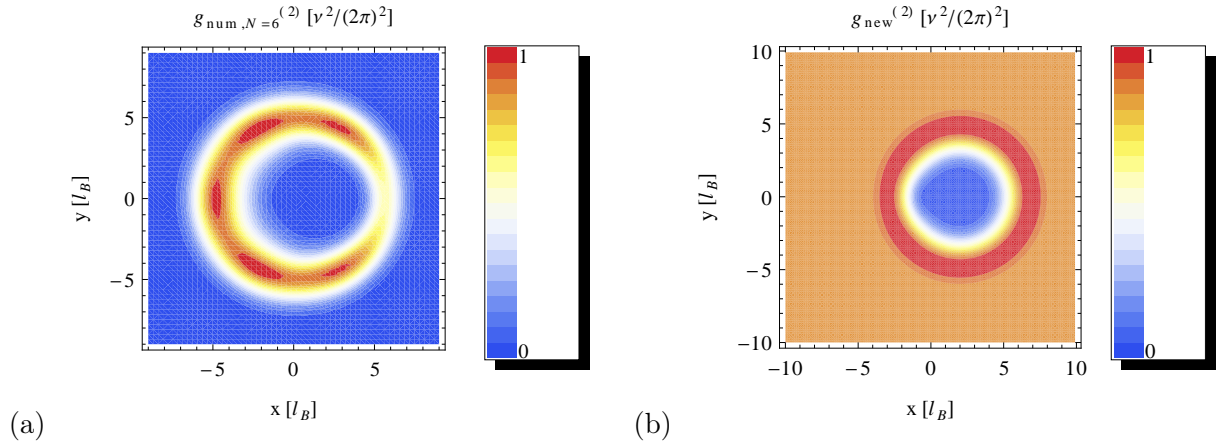


**Abbildung 9.6:** Vergleich der verschiedenen  $g^{(2)}(z_1, z_2)$  Funktionen des Laughlin Quasiloeh Zustandes bei Füllung  $\nu = 1/4$  und  $z_2 = (2i + 2)l_B$ . Die logarithmische Auftragung in (b) zeigt die Details bei  $z_1 \approx 0$ .

der beiden Funktionen bessere Übereinstimmung zeigt, siehe Abbildung 9.6. Es wird vermutet, dass finite-size Effekte für die numerischen Ergebnisse nur eine untergeordnete Rolle spielen. Für kleinere Teilchenzahlen findet man vergleichbare Ergebnisse. Insgesamt kann die neu eingeführte Korrelationsfunktion alle wesentlichen Eigenschaften der exakten Ergebnisse erklären und scheint somit zur Berechnung der Anregungslücke zum Quasiloeh geeignet.

## 9.10 Hinweis auf den Pfaffian oder Anti-Pfaffian Zustand bei $\nu = 1$

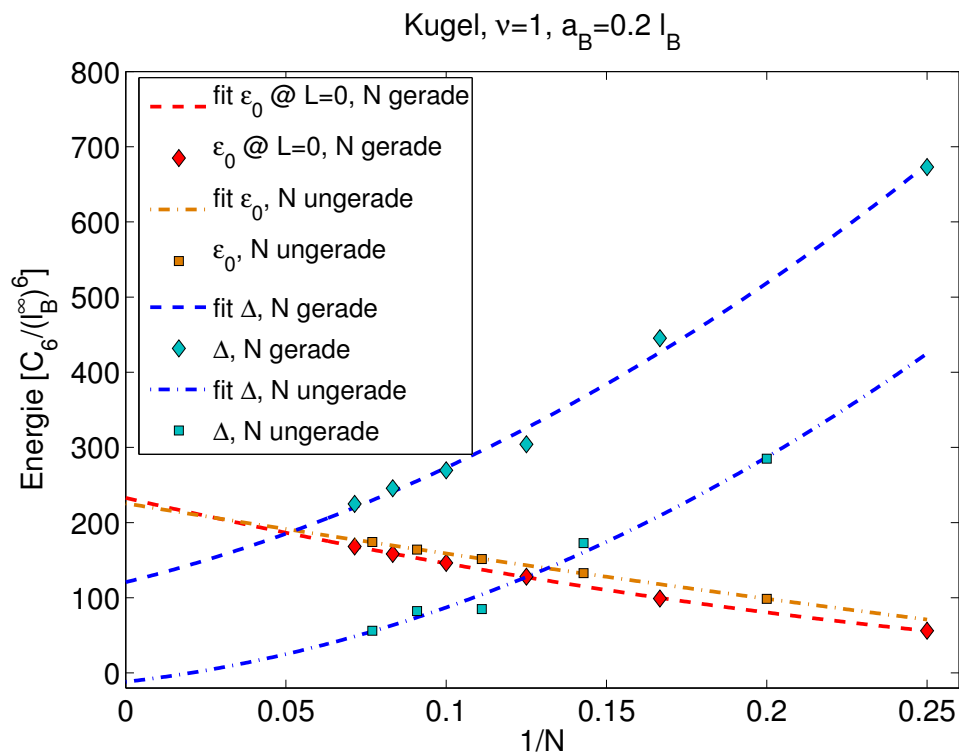
Ein interessanter Grundzustandskandidat bei Füllung  $\nu = 1$  ( $\nu = 5/2$  für Fermionen) ist der *Pfaffian* (Pf) [51], der nicht-abelsche elementare Anregungen besitzt und BCS-artige Paarung von CFs beschreibt. Analoges gilt auch für seinen Teilchen-Loch-symmetrischen Partner, den Anti-Pfaffian.



**Abbildung 9.7:** Vergleich der Dichte-Dichte Korrelation des  $\nu = 1/4$  Laughlin Quasiloeh Zustandes für  $z_2 = 2$ . (a) Numerisches Resultat für  $N = 6$  Teilchen. (b) Ergebnis der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Korrelationsfunktion.

Daher erwartet man eine stark unterschiedliche Grundzustandsenergie (und Anregungslücke) für gerades bzw. ungerades  $N$ . Dies wurde auch für die hier betrachteten Van-der-Waals Wechselwirkungen gefunden, siehe Abbildung 9.8. Man findet eine endliche Anregungslücke für  $N$  gerade, während die sie für  $N$  ungerade verschwindet. Dies deutet auf einen gepaarten Grundzustand und damit auf den Pf bzw. Anti-Pf hin.





**Abbildung 9.8:** Finite-size Approximation für die Anregungslücke und die Grundzustandsenergie pro Teilchen bei  $\nu = 1$ . Gerade und ungerade Teilchenzahlen sind hier separat behandelt und zeigen deutlich unterschiedliches Verhalten.



# Literaturverzeichnis

- [1] Y. AHARONOV and D. BOHM. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485–491, 1959.
- [2] L. ALLEN, M. W. BEIJERSBERGEN, R. J. C. SPREEUW, and J. P. WOERDMAN. Orbital angular-momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11):8185–8189, June 1992.
- [3] S. E. Anderson, K. C. Younge, and G. Raithel. Trapping rydberg atoms in an optical lattice. *Physical Review Letters*, 107(26):263001, December 2011.
- [4] D. AROVAS, J. R. SCHRIEFFER, and F. WILCZEK. Fractional statistics and the quantum hall-effect. *Physical Review Letters*, 53(7):722–723, 1984.
- [5] J. Baglama, D. Calvetti, and L. Reichel. Algorithm 827: irbleigs: a matlab program for computing a few eigenpairs of a large sparse hermitian matrix. *Acm Transactions On Mathematical Software*, 29(3):337–348, September 2003.
- [6] M. A. Baranov, H. Fehrmann, and M. Lewenstein. Wigner crystallization in rapidly rotating 2d dipolar fermi gases. *Physical Review Letters*, 100(20):200402, May 2008.
- [7] M. A. Baranov, K. Osterloh, and M. Lewenstein. Fractional quantum hall states in ultracold rapidly rotating dipolar fermi gases. *Physical Review Letters*, 94(7), 2005.
- [8] M. BAUS and J. P. HANSEN. Statistical-mechanics of simple coulomb-systems. *Physics Reports-review Section of Physics Letters*, 59(1):1–94, 1980.
- [9] B. Andrei Bernevig and F. D. M. Haldane. Model fractional quantum hall states and jack polynomials. *Physical Review Letters*, 100(24):246802, June 2008.
- [10] B. Andrei Bernevig and F. D. M. Haldane. Clustering properties and model wave functions for non-abelian fractional quantum hall quasielectrons. *Physical Review Letters*, 102(6):066802, February 2009.
- [11] M. V. BERRY. Quantal phase-factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-mathematical Physical and Engineering Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.

- [12] Parsa Bonderson, Kirill Shtengel, and J. K. Slingerland. Probing non-abelian statistics with quasiparticle interferometry. *Physical Review Letters*, 97(1):016401, July 2006.
- [13] J. M. CAILLOL, D. LEVESQUE, J. J. WEIS, and J. P. HANSEN. A monte-carlo study of the classical two-dimensional one-component plasma. *Journal of Statistical Physics*, 28(2):325–349, 1982.
- [14] M. A. Cazalilla. Surface modes of ultracold atomic clouds with a very large number of vortices. *Physical Review A*, 67(6):063613, June 2003.
- [15] T. Cheon and T. Shigehara. Fermion-boson duality of one-dimensional quantum particles with generalized contact interactions. *Physical Review Letters*, 82(12):2536–2539, March 1999.
- [16] N. DAMBRUMENIL and R. MORF. Hierarchical-classification of fractional quantum hall states. *Physical Review B*, 40(9):6108–6119, September 1989.
- [17] C. G. Darwin. The diamagnetism of the free electron. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 27:86–90, September 1931.
- [18] Z. Dutton and J. Ruostekoski. Transfer and storage of vortex states in light and matter waves. *Physical Review Letters*, 93(19):193602, November 2004.
- [19] G. FANO, F. ORTOLANI, and E. COLOMBO. Configuration-interaction calculations on the fractional quantum hall-effect. *Physical Review B*, 34(4):2670–2680, 1986.
- [20] R. P. FEYNMAN. Atomic theory of liquid helium near absolute zero. *Physical Review*, 91(6):1301–1308, 1953.
- [21] R. P. FEYNMAN. Atomic theory of the lambda-transition in helium. *Physical Review*, 91(6):1291–1301, 1953.
- [22] R. P. FEYNMAN. Atomic theory of the 2-fluid model of liquid helium. *Physical Review*, 94(2):262–277, 1954.
- [23] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, 84(22):5094–5097, May 2000.
- [24] M. Fleischhauer and M. D. Lukin. Quantum memory for photons: Dark-state polaritons. *Physical Review A*, 65(2):022314, February 2002.
- [25] T. F. GALLAGHER. Rydberg atoms. *Reports On Progress In Physics*, 51(2):143–188, February 1988.
- [26] J. GINIBRE. Statistical ensembles of complex quaternion and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6(3):440–&, 1965.

- 
- [27] S. M. GIRVIN. Anomalous quantum hall-effect and two-dimensional classical plasmas - analytic approximations for correlation-functions and ground-state energies. *Physical Review B*, 30(2):558–560, 1984.
- [28] S. M. GIRVIN, A. H. MACDONALD, and P. M. PLATZMAN. Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum hall-effect. *Physical Review B*, 33(4):2481–2494, 1986.
- [29] Alexey V. Gorshkov, Johannes Otterbach, Michael Fleischhauer, Thomas Pohl, and Mikhail D. Lukin. Photon-photon interactions via rydberg blockade. *Physical Review Letters*, 107(13):133602, September 2011.
- [30] T. Graß, M. A. Baranov, and M. Lewenstein. Robustness of fractional quantum hall states with dipolar atoms in artificial gauge fields. *arXiv:1105.0299v1*, 2011.
- [31] F. D. M. HALDANE. Fractional quantization of the hall-effect - a hierarchy of incompressible quantum fluid states. *Physical Review Letters*, 51(7):605–608, 1983.
- [32] S. E. HARRIS, J. E. FIELD, and A. IMAMOGLU. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, 64(10):1107–1110, March 1990.
- [33] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 397(6720):594–598, February 1999.
- [34] E. R. Heineman. Generalized vandermonde determinants. *Transactions of the American Mathematical Society*, 31(3):pp. 464–476, 1929.
- [35] N. Henkel, R. Nath, and T. Pohl. Three-dimensional roton excitations and supersolid formation in rydberg-excited bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 104(19):195302, May 2010.
- [36] Jain F. Pupillo G. Pohl T. Henkel N., Cinti F. Supersolid vortex crystals in rydberg-dressed bose-einstein condensates. *arXiv:1111.5761v1*, 2011.
- [37] T. Holstein and H. Primakoff. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Physical Review*, 58(12):1098–1113, December 1940.
- [38] J. K. JAIN. Composite-fermion approach for the fractional quantum hall-effect. *Physical Review Letters*, 63(2):199–202, July 1989.
- [39] J. K. Jain. *Composite Fermions*. Cambridge University Press, 2007.
- [40] J. K. JAIN and T. KAWAMURA. Composite fermions in quantum dots. *Europhysics Letters*, 29(4):321–326, February 1995.

- [41] B. JANCOVICI. Exact results for the two-dimensional one-component plasma. *Physical Review Letters*, 46(6):386–388, 1981.
- [42] R. K. Kamilla, X. G. Wu, and J. K. Jain. Composite fermion theory of collective excitations in fractional quantum hall effect. *Physical Review Letters*, 76(8):1332–1335, February 1996.
- [43] P. K. LAM and S. M. GIRVIN. Liquid-solid transition and the fractional quantum-hall effect. *Physical Review B*, 30(1):473–475, 1984.
- [44] R. B. LAUGHLIN. Quantized hall conductivity in 2 dimensions. *Physical Review B*, 23(10):5632–5633, 1981.
- [45] R. B. LAUGHLIN. Anomalous quantum hall-effect - an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Physical Review Letters*, 50(18):1395–1398, 1983.
- [46] S. Y. Lee, V. W. Scarola, and J. K. Jain. Structures for interacting composite fermions: Stripes, bubbles, and fractional quantum hall effect. *Physical Review B*, 66(8):085336, August 2002.
- [47] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, 409(6819):490–493, January 2001.
- [48] Y. E. LOZOVIK and V. I. YUDSON. Feasibility of superfluidity of paired spatially separated electrons and holes - new superconductivity mechanism. *Jetp Letters*, 22(11):274–276, 1975.
- [49] A. H. MACDONALD and S. M. GIRVIN. Quasi-particle states in the fractional quantum hall-effect. *Physical Review B*, 34(8):5639–5653, 1986.
- [50] K. MAKI and X. ZOTOS. Static and dynamic properties of a two-dimensional wigner crystal in a strong magnetic-field. *Physical Review B*, 28(8):4349–4356, 1983.
- [51] G. MOORE and N. READ. Nonabelions in the fractional quantum hall-effect. *Nuclear Physics B*, 360(2-3):362–396, August 1991.
- [52] Alexis G. Morris and David L. Feder. Validity of the lowest-landau-level approximation for rotating bose gases. *Physical Review A*, 74(3):033605, September 2006.
- [53] B. Mottelson. Yrast spectra of weakly interacting bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 83(14):2695–2698, October 1999.
- [54] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):1083–1159, July 2008.

- 
- [55] Y. Notay. Combination of jacobi-davidson and conjugate gradients for the partial symmetric eigenproblem. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 9(1):21–44, January 2002.
- [56] Klaus Osterloh, Nuria Barberan, and Maciej Lewenstein. Strongly correlated states of ultracold rotating dipolar fermi gases. *Physical Review Letters*, 99(16):160403, October 2007.
- [57] J. Otterbach, J. Ruseckas, R. G. Unanyan, G. Juzeliunas, and M. Fleischhauer. Effective magnetic fields for stationary light. *Physical Review Letters*, 104(3), 2010.
- [58] Johannes Otterbach. Bose-einstein kondensation von dunkelzustandspolaritonen. Master’s thesis, TU Kaiserslautern, 2008.
- [59] Johannes Otterbach. *Single- and Many-Body Phenomena of Dark-State Polaritons*. PhD thesis, TU Kaiserslautern, 2011.
- [60] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, and P. Zoller.  $1/2$ -anyons in small atomic bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 87(1):010402, July 2001.
- [61] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin. Storage of light in atomic vapor. *Physical Review Letters*, 86:783–786, 2001.
- [62] M. Popp, B. Paredes, and J. I. Cirac. Adiabatic path to fractional quantum hall states of a few bosonic atoms. *Physical Review A*, 70(5):053612, November 2004.
- [63] J. D. Pritchard, D. Maxwell, A. Gauguier, K. J. Weatherill, M. P. A. Jones, and C. S. Adams. Cooperative atom-light interaction in a blockaded rydberg ensemble. *Physical Review Letters*, 105(19):193603, November 2010.
- [64] N. Regnault and T. Jolicoeur. Quantum hall fractions for spinless bosons. *Physical Review B*, 69(23), 2004.
- [65] M. Roncaglia, M. Rizzi, and J. I. Cirac. Pfaffian state generation by strong three-body dissipation. *Physical Review Letters*, 104(9):096803, March 2010.
- [66] J. Ruseckas, G. Juzeliunas, P. Ohberg, and M. Fleischhauer. Non-abelian gauge potentials for ultracold atoms with degenerate dark states. *Physical Review Letters*, 95(1):010404, July 2005.
- [67] M. Saffman, T. G. Walker, and K. Molmer. Quantum information with rydberg atoms. *Reviews of Modern Physics*, 82(3):2313–2363, August 2010.
- [68] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff, and E. A. Cornell. Rapidly rotating bose-einstein condensates in and near the lowest landau level. *Physical Review Letters*, 92(4):040404, January 2004.

- [69] K. Singer, J. Stanojevic, M. Weidemuller, and R. Cote. Long-range interactions between alkali rydberg atom pairs correlated to the ns-ns, np-np and nd-nd asymptotes. *Journal of Physics B-atomic Molecular and Optical Physics*, 38(2):S295–S307, January 2005.
- [70] H. L. Stormer. Nobel lecture: The fractional quantum hall effect. *Reviews of Modern Physics*, 71(4):875–889, July 1999.
- [71] D. J. THOULESS, M. KOHMOTO, M. P. NIGHTINGALE, and M. DENNIJS. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, 49(6):405–408, 1982.
- [72] S. A. Trugman and S. Kivelson. Exact results for the fractional quantum hall-effect with general interactions. *Physical Review B*, 31(8):5280–5284, 1985.
- [73] D. C. TSUI, H. L. STORMER, and A. C. GOSSARD. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Physical Review Letters*, 48(22):1559–1562, 1982.
- [74] E. Urban, T. A. Johnson, T. Henage, L. Isenhower, D. D. Yavuz, T. G. Walker, and M. Saffman. Observation of rydberg blockade between two atoms. *Nature Physics*, 5(2):110–114, February 2009.
- [75] S. Viefers. Quantum hall physics in rotating bose-einstein condensates. *Journal of Physics-condensed Matter*, 20(12), 2008.
- [76] K. VONKLITZING, G. DORDA, and M. PEPPER. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical Review Letters*, 45(6):494–497, 1980.
- [77] E. Wigner. On the interaction of electrons in metals. *Physical Review*, 46(11):1002–1011, December 1934.
- [78] N. K. Wilkin, J. M. F. Gunn, and R. A. Smith. Do attractive bosons condense? *Physical Review Letters*, 80(11):2265–2268, March 1998.
- [79] R. A. Williams, J. D. Pillet, S. Al-Assam, B. Fletcher, M. Shotton, and C. J. Foot. Dynamic optical lattices: two-dimensional rotating and accordion lattices for ultracold atoms. *Optics Express*, 16(21):16977–16983, 2008.
- [80] T. T. WU and C. N. YANG. Dirac monopole without strings - monopole harmonics. *Nuclear Physics B*, 107(3):365–380, 1976.
- [81] H. M. Yi and H. A. Fertig. Laughlin-jastrow-correlated wigner crystal in a strong magnetic field. *Physical Review B*, 58(7):4019–4027, August 1998.



- [82] S. C. ZHANG, T. H. HANSSON, and S. KIVELSON. Effective field-theory model for the fractional quantum hall-effect. *Physical Review Letters*, 62(1):82–85, January 1989.



# Danksagung

Mein Dank gilt meinen Kollegen der AG Fleischhauer, dafür dass sie eine tolle Gesellschaft waren, aber auch für viel Hilfe (z.B. mit Computerproblemen und Passwörtern). Insbesondere gilt mein Dank Johannes Otterbach, durch den ich zunächst gelernt habe, was Dunkelzustandspolaritonen sind, der mir aber auch im Laufe der Arbeit immer wieder helfend zur Seite stand. Außerdem gilt mein besonderer Dank auch Dominik Muth für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten (wenngleich wenig gewinnbringenden) DMRG-Rechnungen für FQHE-Systeme, sowie seine Unterstützung in meiner Hiwi-Zeit.

Ganz besonders möchte ich meinem Betreuer, Michael Fleischhauer, für die lange Zeit danken, die ich in seiner Arbeitsgruppe forschen durfte. Genauso gilt mein Dank aber seiner Betreuung und vollen Unterstützung während des Entstehens dieser Arbeit.

Last - but not least - möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Freundin Sarah für die Zeit bedanken, die ich in die Forschung stecken konnte. Mein Dank gilt auch meiner ganzen Familie für die andauernde Unterstützung im gesamten Studium. Außerdem möchte ich meinen Freunden im Wohnheim für in die Abendstunden verschobenen Doppelkopfrunden danken.