C^1-stetige Oberflächenapproximation mit Finiten Elementen

Wolf-Dieter Schuh, Christian Neyers, Jan Martin Brockmann, Universität Bonn

Speziell in den Natur- und Ingenieurwissenschaften wird die Methode der Finiten Elemente gerne für die deterministische Modellbildung genutzt, da sie eine flexibel Lösung von Differentialgleichungssystemen erlauben. Aber auch für Anwendungen bei Datenanpassungs- und Approximationsproblemen werden Finite Elemente vielfach verwendet, denn sie erlauben eine flexible Modellbildung bezüglich der Auflösung und der Glattheitsforderungen. Eine besondere Eigenschaft der Finiten Elemente bildet die gute Adaptierbarkeit auch bei unregelmäßig begrenzten Auswertungsgebieten.

Innerhalb von verschiedenen geodätischen Anwendungen werden Oberflächen mit verschiedensten Sensoren abgetastet. Dabei werden oftmals neben den Funktionswerten auch Richtungsableitungen direkt gemessen. Die Oberflächen erfüllen bestimmte Anforderungen an die Stetigkeit der Funktionswerte (C^0-stetige Funktionen). Vielfach wird auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen (C^1-stetige Funktionen) gefordert um entsprechende physikalische Prozesse (Strömungen, Vektorfelder) abbilden zu können. Andererseits erfordern natürliche Bruchkanten einen sehr individuellen Umgang mit der Glattheit der Funktionen.

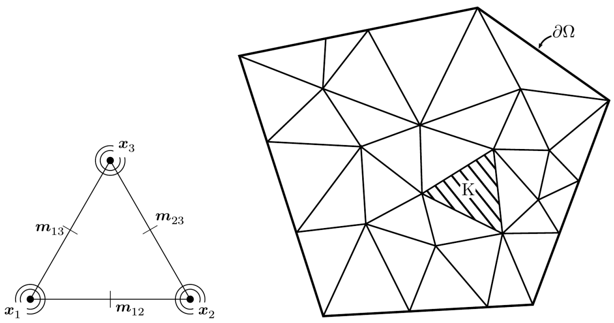

Fig. 1: Agyris Element und unregelmäßige Gebietszerlegung (Neyers, 2017, Abb. 4.6 bzw. 3.1)

Für solche komplexe Modellbildungen sind Finite Elemente besonders geeignet. Ebner et.al. (1980) setzten daher schon vor 40 Jahren Finite Elemente ein, um Höhenmodelle mit Bruchkanten zu modellieren. Neben bilinearen Finiten Elementen kamen bikubische Finite Elemente vom Lagrange-Typ zum Einsatz. Durch die Identifikation der Knotenpunkte wurde C^0 Stetigkeit unmittelbar erzwungen, währen die C^1-Stetigkeit durch "fiktive Beobachtungen" nur näherungsweise erfüllt wurde. Schuh (1984) erarbeitet bikubische hermitesche Finite Elemente (Bogner-Fox-Schmit Elemente) für ein regelmäßiges Rechtecksgitter, die unmittelbar die C^1-Stetigkeit gewährleisten. Größere Flexibilität kann aber mit Dreieckselementen erreicht werden. So führte Agyris et.al. (1986) ein Dreieckselement auf Basis eines zweidimensionalen Polynoms 5. Grades mit 21 Parametern (Abb. links) ein.

Innerhalb der Arbeitsgruppe wurden die benötigten Schritte aufgearbeitet um das Argyris Element für die Oberflächenapproximation auf beobachteten Funktionswerten und Neigungen zu verwenden. Die komplexen Transformationen wurden abgeleitet, sodass dieses Element auch bei beliebigen unregelmäßigen Dreieckszerlegungen des Untersuchungsgebietes eingesetzt werden kann(Abb. rechts). Erste Anwendung dieses Typs Finiter Elemente werden bei der Approximation der der Dynamischen Ozeantopgraphie (DOT) eingesetzt. Aus Schwerefeldinformation (z.B. GOCE), Altimetermessungen ('Funktionswerte') und Strömungsbeobachtungen ('Ableitungen', Oberflächendrifter) werden in einem integrierten Modell C^1-stetige Oberflächen approximiert um direkten Zugang zu den Ozeanoberflächenströmungen zu erlangen.

Ein aktueller Firschungsschwerpunkt der Arbeitsgruppe liegt auf der Integration der SAR Doppler Oberflächenströmungsmessungen in dieses Modell.

Literatur

Becker, S., M. Losch, J. M. Brockmann, G. Freiwald, W.-D. Schuh (2014): A tailored computation of the mean dynamic topography for a consistent integration into ocean circulation models. *Surveys in Geophysics*, 35(6):1507–1525. doi:10.1007/s10712-013-9272-9. BibTeX, Pdf.

Neyers, C. (2017): *Integration von radialen SAR-Doppler Ozeanoberflächengeschwindigkeitsmessungen in dir Berechnung der Dynamischen Ozeantopographie.* Masterarbeit, Professur für Theoretische Geodäsie, Universität Bonn. BibTeX, Pdf.

Schuh, W.-D. (1984): *Analyse und Konvergenzbeschleunigung der Methode der konjugierten Gradienten bei geodätischen Netzen.* Mitteilungen der Geodätischen Institute der TU, Graz. Folge 49.