LINEARE ALGEBRA I —— ÜBUNGSBLATT 2

26 Punkte - Abgabe **Donnerstag** 14.10.10

1 [2 Punkte]. Zeige, dass $(\mathbf{Q}^*, \times)$ eine Gruppe ist.

2 [2 Punkte]. Sei S_2 die Menge alle injektiven Abbildungen $\mathbf{N}_2 \to \mathbf{N}_2$. Zeige, dass $(S_2, \circ)$ eine Gruppe ist.

3 [2 Punkte]. Sei $G = \{e, g\}$ eine Menge mit zwei Elementen und eine Verknüpfung durch $e * e = g * g = e$, $e * g = g * e = g$ definiert. Zeige, dass $x * (y * z) = (x * y) * z$ für alle x, y, z in G [*Hinweis*: S_2].

4 [3 Punkte]. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeige ohne Satz 2.2, dass

$$g_1 * (g_2 * (g_3 * g_4)) = (g_1 * g_2) * (g_3 * g_4) = ((g_1 * g_2) * g_3) * g_4$$

für alle g_1, g_2, g_3, g_4 in G.

5 [4 Punkte]. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $g * g = e$ für alle $g \in G$. Zeige, dass G kommutativ ist (d.h. $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ für alle g_1, g_2 in G) [*Hinweis*: $(g_1 * g_2) * (g_1 * g_2) = e = (g_1 * g_1) * (g_2 * g_2)$].

6 [8 Punkte]. Sei $G = \{g \in \mathbf{Q}^*;$ es gibt x, y in $\mathbf{Q}$ mit $g = x^2 + y^2\}$.

(a) Seien g_1, g_2 in G. Zeige, dass $g_1 g_2 \in G$ [*Hinweis*: $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 - y_1y_2)^2 = (???)^2$].

(b) Sei g in G. Zeige, dass $\frac{1}{g} \in G$.

(c) Zeige, dass $\frac{10100}{10001} \in G$.

7 [5 Punkte]. Sei $\alpha : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch $\alpha(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1x_2$ definiert ("Addition-Multiplikation").

(a) Zeige, dass $\alpha(\alpha(x_1, x_2), x_3) = \alpha(x_1, \alpha(x_2, x_3))$.

(b) Finde $e \in \mathbf{R}$ so dass $\alpha(e, x) = x$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

(c) Gibt es zu jedem $x \in \mathbf{R}$ ein $x' \in \mathbf{R}$ mit $\alpha(x', x) = e$?

EXTRAS

I. Falls G endlich erzeugt in #5 ist, zeige, dass G endlich ist (cf. Burnside Problem).

II. Falls $|G|$ endlich in #5 ist zeige, dass $|G| = 2^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

III. Zeige, dass $(g^{(n)})^{(m)} = g^{(nm)}$.

IV. In #6 zeige, dass $3 \notin G$. Ist $2010 \in G$? Ist $(G, \times)$ eine Gruppe?

V. Zeige, dass genau 8 der 16 Verknüpfungen $\alpha : \mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}_2 \to \mathbf{N}_2$ assoziativ sind; aber dass nur zwei davon eine Gruppe $(\mathbf{N}_2, \alpha)$ liefert.

VI. Zeige, dass genau 4 der 4294967296 Verknüpfungen $\alpha : \mathbf{N}_4 \times \mathbf{N}_4 \to \mathbf{N}_4$ eine Gruppe $(\mathbf{N}_4, \alpha)$ liefern.

VII. Zeige, dass $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x, y) \neq (0, 0)\}$ unter $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ eine Gruppe ist.

VIII. Zeige, dass $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4; (x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)\}$ unter $(x_1, y_1, z_1, t_1) * (x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 - t_1t_2, x_1y_2 + x_2y_1 + z_1t_2 - z_2t_1, x_1z_2 + x_2z_1 + y_2t_1 - y_1t_2, x_1t_2 + x_2t_1 + y_1z_2 - y_2z_1)$ eine Gruppe ist [Sir William Rowan Hamilton 16. Oktober 1843].

David William Masser FRS

5. Oktober 2010