Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Freitag, 31.01.2003, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (P): (Ein Examen? Nee, Maxe, nie!)
Sei $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie invertierbare Matrizen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$, so dass $\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-1}$ die in Satz 11.22 angegebene Gestalt hat.

b) Schreiben Sie $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}^{-1}$ als Produkte von Elementarmatrizen.

c) Warum darf man bei dem Algorithmus von Satz 11.17 keine Spaltenoperationen vornehmen?

Aufgabe 2 (P): (O Genie, der Herr ehre dein Ego!)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Finden Sie jeweils eine Elementarmatrix $\mathcal{A}$, so dass das Produkt $\mathcal{M}\mathcal{A}$ der folgenden Spaltenoperation entspricht.

a) Multiplikation der i–ten Spalte mit einem Skalar $c \in K$.

b) Addition des c–fachen der j–ten Spalte zur i–ten Spalte.

c) Vertauschung der i–ten und der j–ten Spalte.

Aufgabe 3 (D+L): (Regelbarer Ableger)
Sei K ein Körper, sei V ein endlich–dimensionaler K–Vektorraum, und seien $\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{V}''$ drei Basen von V. Beweisen Sie die folgenden Regeln für Transformationsmatrizen:

a) $\left(\mathcal{T}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}$ (Inversenregel)

b) $\left(\mathcal{T}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}\right) \cdot \left(\mathcal{T}_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}}\right) = \mathcal{T}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}}$ (Kürzungsregel)

Aufgabe 4 (D+L): (Maetressenhuhnesserteam)

a) Beweisen Sie, dass für jede Matrix $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Formel $\mathrm{Rang}(\mathcal{M}) = \mathrm{Rang}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^{tr})$ gilt.

b) Gilt diese Formel auch für alle $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Aufgabe 5 ($\star$): (Hofstadter's Gesetz: Es dauert immer länger als man denkt, selbst wenn man Hofstadter's Gesetz einberechnet.)

a) Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der inversen Matrix in einer Maple–Funktion **Invertierung** $(\dots)$

b) Wenden Sie Ihre Funktion **Invertierung** $(\dots)$ an einigen selbst gewählten Beispielen an und demonstrieren Sie ihre Korrektheit sowohl für invertierbare als auch für nicht invertierbare Matrizen.

c) Berechnen Sie die inverse Matrix der Hilbert–Matrix $\mathcal{H}_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1\dots n} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ für $n = 1, 2, \dots, 30$.