Der
Knuth–Bendix–Vervollständigungsalgorithmus
und ein wenig mehr

Anhand der untenstehenden Aufgabe und noch einem weiteren Beispiel will ich hier noch ein Mal den *Knuth–Bendix–Vervollständigungsalgorithmus* (Satz 5.31) erläutern.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe:
Gegeben seien die Gleichungen

F_1: $g(x, a) = x$,

F_2: $f(g(x, y)) = f(x)$,

F_3: $g(g(x, x), y) = g(x, y)$.

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Termersetzungssystem Noethersch ist.

b) Prüfen Sie, ob das Termersetzungssystem konfluent ist, und vervollständigen Sie es ggf. zu einem Noetherschen und konfluenten Termersetzungssystem.

1 Noethersch

In Definition 5.27 wird *Noethersch* mittels einer Termordnung erklärt. Diese Möglichkeit haben wir natürlich immer, es ist nur nicht unbedingt der anschaulichste Weg. Bei unserer Aufgabe können wir *Noethersch* auch über die Eigenschaften der durch die Gleichungen definierten Ersetzungsregeln erklären:
„*Alle drei Gleichungen angewendet auf einen endlichen Term verkürzen diesen, d. h. nach endlich vielen Ersetzungsschritten sind keine Ersetzungen mehr möglich, da der Term keinen Teilterm mehr enthält, auf den eine der drei linken Seiten passt.*“
Dabei darf man nicht vergessen, dass wir die Gleichungen nur gerichtet lesen, also nur $\xrightarrow{\mathcal{M}}$, wobei $\mathcal{M} = \{F_1, F_2, F_3\}$.
Wenn nun zusätzlich z. B. die Assoziativität mit zum Gleichungssystem gehört

G: $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$,

müssen wir noch zusätzlich argumentieren:
„*Die Gleichung G sorgt für eine Verschiebung innerhalb des Terms, in diesem Fall werden zwei Funktionen durch einen Term getrennt, auch dieser Vorgang ist, in einem endlichen Term, nur endlich oft möglich.*“

2 Knuth–Bendix–Vervollständigungsalgorithmus (Satz 5.31)

Hierbei betrachten wir die kritischen Paare. Ein kritisches Paar ist definiert als

$$\big(\sigma\,(t_1)\,;\sigma\big(s_1|_{\widetilde{s_1}\mapsto\sigma(t_2)}\big)\big).$$

Nun diese Definition sagt so erst ein Mal überhaupt nichts aus. Wir müssen zuerst klären, was $s_1, \widetilde{s_1}, t_1, t_2, \sigma$ sind.

Mit s und t werden die *linke* und *rechte* Seite einer Ersetzungsregel beschrieben. So ist z. B. in F_1 $s = g\,(x, a)$ und $t = x$. In der Definition des kritischen Paares stehen jetzt s_1, t_1, t_2, dies liegt daran, dass man immer zwei Ersetzungsregeln betrachten. Man konstruiert immer den Fall, dass man auf einen Term zwei Regeln anwenden kann und schaut dann, ob man auf den selben Term kommen kann.

Mit $\widetilde{s_1}$ ist ein Teilterm von s_1 gemeint, welcher keine Variable ist, aber auch ganz s_1 sein kann (siehe unten).

Mit σ wird ein allgemeinster Unifikator verwendet, welcher $\widetilde{s_1}$ und s_2 unifiziert. Deshalb werden die zu untersuchenden Gleichungen auch variablenfremd notiert. Das Konzept des allgemeinsten Unifikators ist uns ja noch aus dem Kapitel *Prädikatenlogik* bekannt.

Findet man jetzt nur kritische Paare, bei denen auf der linken und rechten Seite nach Anwendung aller Ersetzungsregeln das selbe herauskommt, so ist das Termersetzungssystem (TES) konfluent. Findet man ein kritisches Paar, wo auf der linken und rechten Seite etwas unterschiedliches herauskommt, so muss man eine neue Ersetzungsregel zu unseren Regeln hinzunehmem. Wobei darauf zu achten ist, dass das System *Noethersch* bleibt und ob mit dieser neuen Regel nicht eine alte überflüssig wird.
Dabei sollte man systematisch vorgehen, um nicht einen Fall zu übersehen. Am Besten startet man mit der ersten Regel und schaut mit welcher sich ein kritisches Paar bilden lässt und so weiter.

Dies wollen wir jetzt mal an den gegebenen drei Ersetzungsregeln ausprobieren.

- F_1 und F_3

  F_1: $g\,(x, a) = x$
  F_3: $g\,(g\,(y, y)\,, z) = g\,(y, z)$

  $$\widetilde{s_1} = g\,(x, a) = s_1, \quad s_2 = g\,(g\,(y, y)\,, z),$$
  $$\sigma = (x \mapsto g\,(y, y)\,, z \mapsto a)$$

  $$\begin{tikzcd}
  & \sigma\,(s_1) = g\,(g\,(y, y)\,, a) \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_3"] & \\
  \sigma\,(t_1) = g\,(y, y) & & g\,(y, a) = \sigma\big(s_1|_{\widetilde{s_1}\mapsto\sigma(t_2)}\big) \arrow[d, "F_1"] \\
  & & y
  \end{tikzcd}$$

  Ersetze also F_3: $g\,(g\,(x, x)\,, y) = g\,(x, y)$ durch die Gleichung

  F_3': $g\,(x, x) = x$,

  denn mit F_3' lässt sich die linke Seite von F_3 vereinfachen:

  $$g\,(g\,(x, x)\,, y) \xrightarrow{F_3'} g\,(x, y)\,.$$

- F_2 und F_1:

  F_2: $f\left(g\left(x,y\right)\right) = f\left(x\right)$

  F_1: $g\left(z,a\right) = z$

$$\widetilde{s}_1 = g\left(x,y\right), \quad s_2 = g\left(z,a\right),$$
$$\sigma = \left(x \mapsto z, y \mapsto a\right)$$

$$\begin{tikzcd}
& f\left(g\left(z,a\right)\right) \arrow[dl, "F_2"'] \arrow[dr, "F_1"] & \\
f\left(z\right) & & f\left(z\right)
\end{tikzcd}$$

Da sich auf der linken, wie auf der rechten Seite das selbe ergibt, ist das kritische Paar „harmlos“. Wenn man die leere Ersetzungsregel verwendet, ergibt sich auch das gesuchte Konfluenzbild:

$$\begin{tikzcd}
& f\left(g\left(z,a\right)\right) \arrow[dl, "F_2"'] \arrow[dr, "F_1"] & \\
f\left(z\right) \arrow[dr, dashed] & & f\left(z\right) \arrow[dl, dashed] \\
& f\left(z\right) &
\end{tikzcd}$$

- F_3' und F_1:

  F_3': $g\left(x,x\right) = x$

  F_1: $g\left(y,a\right) = y$

$$\widetilde{s}_1 = g\left(x,x\right), \quad s_2 = g\left(y,a\right),$$
$$\sigma = \left(x \mapsto a, y \mapsto a\right)$$

$$\begin{tikzcd}
& g\left(a,a\right) \arrow[dl, "F_1"'] \arrow[dr, "F_3'"] & \\
a \arrow[dr, dashed] & & a \arrow[dl, dashed] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

- F_2 und F_3:

  F_2: $f\left(g\left(x,y\right)\right) = f\left(x\right)$

  F_3': $g\left(z,z\right) = z$

$$\widetilde{s}_1 = g\left(x,y\right), \quad s_2 = g\left(z,z\right),$$
$$\sigma = \left(x \mapsto z, y \mapsto z\right)$$

$$\begin{tikzcd}
 & f\left(g\left(z,z\right)\right) \arrow[dl, "F_2"'] \arrow[dr, "F_3'"] & \\
f\left(z\right) \arrow[dr, dashed] & & f\left(z\right) \arrow[dl, dashed] \\
 & f\left(z\right) &
\end{tikzcd}$$

Da es keine weiteren kritischen Paare mehr gibt und die gefundenen nun alle „harmlos“ sind, ist das durch die Gleichungen F_1, F_2, F_3' beschriebene Termersetzungssystem konfluent.
Das System $\mathcal{M} = \{F_1, F_2, F_3'\}$ ist auch weiterhin *Noethersch*, denn auch die Regel F_3', angewendet auf einen endlichen Term, verkürzt diesen.

Ein kritisches Paar, welches meistens vergessen wird, ist das kritische Paar, welches von zwei gleichen Ersetzungsregeln erzeugt wird. Verwenden wir also wieder die Assoziativität:

G: $f\left(f\left(x,y\right),z\right) = f\left(x, f\left(y,z\right)\right)$

G: $f\left(f\left(u,v\right),w\right) = f\left(u, f\left(v,w\right)\right)$

$$\widetilde{s}_1 = f\left(x,y\right), \quad s_2 = f\left(f\left(u,v\right),w\right),$$
$$\sigma = \left(x \mapsto f\left(u,v\right), y \mapsto w\right)$$

$$\begin{tikzcd}
 & f\left(f\left(f\left(u,v\right),w\right),z\right) \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "G"] & \\
f\left(f\left(u,v\right),f\left(w,z\right)\right) \arrow[d, "G"'] & & f\left(f\left(u,f\left(v,w\right)\right),z\right) \arrow[d, "G"] \\
f\left(u,f\left(v,f\left(w,z\right)\right)\right) \arrow[dr, dashed] & & f\left(u,f\left(f\left(v,w\right),z\right)\right) \arrow[dl, "G"] \\
 & f\left(u,f\left(v,f\left(w,z\right)\right)\right) &
\end{tikzcd}$$