Interdisziplinäres Vertiefungsfach

Geld und Finanzierung

Vertiefungskurs I: Optionspreise und Derivate

Klaus Pötzelberger
Institut für Statistik und Mathematik
Wirtschaftsuniversität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **3**

1.1 Optionspreis . . . 3

1.2 Literatur . . . 6

2 Grundlegende Konzepte **8**

2.1 Beispiele . . . 8

2.2 Portfolios . . . 13

2.3 Arbitrage . . . 15

2.4 Aufgaben . . . 19

3 Stochastische Prozesse **21**

3.1 Definition . . . 21

3.2 Irrfahrt . . . 22

3.3 Brown'sche Bewegung . . . 32

3.4 Aufgaben . . . 37

4 Martingal **40**

4.1 Martingal . . . 40

4.2 Strategien . . . 43

4.3 Aufgaben . . . 45

5 Arbitragefreiheit **47**

5.1 Charakterisierung . . . 47

5.2 CRR-Modell . . . 49

5.3 Aufgaben . . . 54

6 Vollständigkeit **57**

6.1 Duplizierendes Portfolio . . . 57

6.2 Aufgaben 60

7 Modell von Black und Scholes **64**

7.1 Optionspreise 64

7.1.1 Modell 64

7.1.2 Martingalmaß und Preise 64

7.1.3 Sensitivitäten 68

7.2 Diffusionsprozesse 76

7.2.1 Approximation des Modells von Cox, Ross, Rubinstein 76

7.2.2 Itokalkül 78

7.3 Duplizierungsstrategien 83

7.4 Aufgaben 88

8 Optimale Investitionspläne **92**

8.1 Investitionsplanung 92

8.2 Konsum-und Investitionsplanung 98

8.3 Aufgaben 100

Kapitel 1

Motivation

1.1 Optionspreis

Eine (europäische) Calloption ist ein Vertrag, der dem Käufer das Recht einräumt, eine bestimmte Aktie zu einem festgesetzten Preis, dem Ausübungspreis der Option, zu einem festen Zeitpunkt, dem Ausübungszeitpunkt, zu kaufen. Im Rahmen finanzmathematischer Modelle kann der Preis bzw. der Wert der Option berechnet werden.
Wir wollen erörtern, von welchen Größen der Wert einer Option abhängt.

A Größen, die explizit Bestandteil des Vertrags sind.

1. Die Aktie, das sogenannte Underlying.
2. Der Ausübungszeitpunkt T.
3. Der Ausübungspreis K.

B Kosten und Restriktionen.

1. Transaktionskosten, Steuern usw.
2. Öffnungszeiten von Börsen usw.
3. Dividenden, Kosten und Vergünstigungen, die mit dem Besitz von Aktien verbunden sind.

C Stochastisches Modell.

1. Die Wertpapiere, aus denen ein duplizierendes Portfolio gebildet werden kann, insbesondere der Bankkontoprozeß.

2. Die gemeinsame Verteilung des Aktienkursen $(S_t)_{t\in[0,T]}$ und des Bankkontoprozesses $(B_t)_{t\in[0,T]}$ bzw. der Komponenten von Portfolios.

Die Auszahlungsfunktion ist der Wert der Option zum Ausübungszeitpunkt. Die Calloption wird genau dann ausgeübt, wenn $S_T > K$. Falls sie ausgeübt wird, zahlt der Käufer K und bekommt S_T, d.h. der Wert ist dann $S_T - K$. Der Wert ist 0 falls $S_T \leq K$. Die Auszahlungsfunktion ist also $\max\{S_T - K, 0\}$. Meist kürzen wir $\max\{S_T - K, 0\}$ mit $(S_T - K)_+$ ab. Man beachte, daß zum Zeitpunkt $t = 0$, dem Zeitpunkt des Kaufs der Option, S_T unbekannt und damit eine stochastische Größe ist. Daher ist auch $(S_T - K)_+$ stochastisch. Wir werden sehen, daß die Verteilung von $(S_T - K)_+$ den Preis der Option noch nicht festlegt.

Das stochastische Modell spezifiziert insbesondere die gemeinsame Verteilung des Aktienkurses $(S_t)_{t\in[0,T]}$ und des Bankkontoprozesses $(B_t)_{t\in[0,T]}$. Dabei werden nicht nur die Randverteilungen, d.h. die Verteilungen von (S_t, B_t) zu allen festen Zeitpunkten t festgelegt. Es wird angenommen, daß ein Zufallsexperiment die Dynamik der Prozesse $(S_t)_{t\in[0,T]}$ und $(B_t)_{t\in[0,T]}$ steuert. Aus einer Menge Ω von möglichen Szenarien wird entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P ein Element (Szenario) ω ausgewählt. Die realisierten Pfade der des Aktienprozesses und des Bankkontoprozesses sind $(S_t(\omega))_{t\in[0,T]}$ und $(B_t(\omega))_{t\in[0,T]}$. Für festes Zufallselement ω sind die Pfade Funktionen der Zeit.

Anhand eines Zweiperiodenmodells wollen wir mögliche Bewertungen der Calloption erörtern. Das Modell ist natürlich zu einfach, um praxisrelevant zu sein. Seine Einfachheit erlaubt es aber, die Problemstellungen aufzuzeigen, ohne auf zusätzliche technische Schwierigkeiten eingehen zu müssen.

Eine Calloption auf eine Aktie, die in $t = 0$ $S_0 = 100$ kostet, soll bewertet werden. Der Ausübungszeitpunkt sei $T = 2$, der Ausübungspreis sei $K = 107$. Der Bankkontoprozeß sei deterministisch entsprechend einem Zinssatz (effektiv) von 3%, d.h. $B_0 = 1$, $B_1 = 1.03$, $B_2 = (1.03)^2 = 1.0609$. Die Stochastik des Aktienprozesses sei durch die Verteilung der Renditen festgelegt. Es gelte, daß in den beiden Perioden die Renditen identisch und unabhängig verteilt seien, und zwar sei die Rendite 5% mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.7$ und gleich 2% mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.3$. Dann ist $S_1 = 105$ bzw. 102 mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. $1 - p$. S_2 kann die Werte $100 \times 1.05^2 = 110.25$, $100 \times 1.05 \times 1.02 = 107.1$ und $100 \times 1.02^2 = 104.04$ annehmen und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten $0.7^2 = 0.49$, $0.7 \times 0.3 + 0.3 \times 0.7 = 0.42$ und $0.3^2 = 0.09$. Entsprechend gilt

$$C_2 = (S_2 - K)_+ = \begin{cases} 3.25 & \text{mit Wahrsch. } 0.49 \\ 0.1 & \text{mit Wahrsch. } 0.42 \\ 0 & \text{mit Wahrsch. } 0.09 \end{cases}$$

Die folgende Diskussion soll zeigen, wie der Wert (der Preis) der Option zum Zeitpunkt 0 bestimmt werden könnte und wie er davon abhängen wird, welche Anlagemöglichkeiten dem Verkäufer der Option offenstehen.

1. Der Preis C_0 ist der Erwartungswert, d.h. $C_0 = 3.25 \times 0.49 + 0.1 \times 0.42 + 0 \times 0.09 = 1.6345$. Argument: C_2 ist eine Zufallsgröße mit Erwartungswert 1.6345. Wenn die Bank eine große Anzahl von Calloptionen (auf verschiedene Aktien, zu unterschiedlichen Ausübungspreisen und Laufzeiten) verkauft, dann wird sie keinen Verlust machen. Andererseits kann der Preis aber auch nicht höher sein, denn sonst könnte ein Konkurrenzunternehmen die Calloption billiger anbieten und die Bank würde die Kunden verlieren.

2. Das Argument aus Punkt 1 berücksichtigt nicht, daß der Erlös investiert werden kann. Der Erlös C_0 kann zumindest auf ein Konto gelegt werden, wodurch er nach zwei Perioden auf $C_0 B_2$ anwächst. Mit der Argumentation aus Punkt 1 wäre der Preis dann der Erwartungswert der abgezinsten Auszahlung C_2/B_2 und damit $1.6345/1.0609 = 1.5407$.

3. Die Bank könnte den Erlös in den Bankkontoprozeß und die Aktie investieren und so versuchen ein Portfolio zu bilden, das in $t = 2$ den Wert C_2 hätte. Der Preis eines solchen Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ wäre dann der Preis der Calloption. Nehmen wir an, das Portfolio besteht aus π^1 Aktien und π^2 GE, die in den Bankkontoprozeß investiert werden. Der Wert in $t = 2$ ist dann $\Pi = \pi^1 S_2 + \pi^2 B_2$. Wenn $\Pi = C_2$ erfüllt sein soll, dann ist (π^1, π^2) Lösung von

   $$\begin{aligned} 110.25\pi^1 + 1.0609\pi^2 &= 3.25 \\ 107.1\pi^1 + 1.0609\pi^2 &= 0.1 \\ 104.04\pi^1 + 1.0609\pi^2 &= 0. \end{aligned}$$

   Dieses Gleichungssystem besitzt aber keine Lösung: Subtrahiert man von den ersten beiden Gleichungen die dritte, so erhält man

   $$\begin{aligned} 6.21\pi^1 &= 3.25 \\ 3.06\pi^1 &= 0.1 \\ 104.04\pi^1 + 1.0609\pi^2 &= 0. \end{aligned}$$

   Damit wäre $\pi_1 = 3.25/6.21 = 0.523$ nach der ersten und $\pi_1 = 0.1/3.06 = 0.0327$ nach der zweiten Gleichung.

4. Die Bank kann versuchen, in $t = 0$ ein Portfolio zusammenzustellen und es in $t = 1$ umzuschichten, ohne Geld zu entnehmen oder hinzuzufügen, sodaß der Wert des Portfolios in

$t=2$ gleich C_2 ist. Sei (π_t^1, π_t^2) das Portfolio im Zeitpunkt t. Das Portfolio (π_1^1, π_1^2) ist eine Funktion von S_1. Wir schreiben $(\pi_1^1(105), \pi_1^2(105))$ bzw. $(\pi_1^1(102), \pi_1^2(102))$. Wir erhalten $\pi_1^1(105)$, $\pi_1^2(105)$ als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} 110.25\pi_1^1(105) + 1.0609\pi_1^2(105) &= 3.25 \\ 107.1\pi_1^1(105) + 1.0609\pi_1^2(105) &= 0.1 \end{aligned}$$

und $\pi_1^1(102)$, $\pi_1^2(102)$ als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} 107.1\pi_1^1(102) + 1.0609\pi_1^2(102) &= 0.1 \\ 104.04\pi_1^1(102) + 1.0609\pi_1^2(102) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\pi_1^1(105) = 1$, $\pi_1^2(105) = -100.8578$, $\pi_1^1(102) = 0.03268$, $\pi_1^2(102) = -3.2048$. Der Wert ist $V_1(105) = 105\pi_1^1(105) + 1.03\pi_1^2(105) = 1.1165$ bzw. $V_1(102) = 102\pi_1^1(102) + 1.03\pi_1^2(102) = 0.03236$. (π_0^1, π_0^2) löst dann

$$\begin{aligned} 105\pi_0^1 + 1.03\pi_0^2 &= V_1(105) \\ 102\pi_0^1 + 1.03\pi_0^2 &= V_1(102). \end{aligned}$$

Es ist $\pi_0^1 = 0.36138$, $\pi_0^2 = -35.7558$ und $V_0 = 100\pi_0^1 + \pi_0^2 = 0.382275$. Wenn die Bank die Calloption zu diesem Preis (d.h. $C_0 = V_0$) verkauft, das Portfolio bildet und in $t=1$ umschichtet, dann besitzt sie in $t=2$ genau den Betrag, den die Option dann wert ist.

Man beachte, daß der Preis, der genügt, um die Calloption zu duplizieren, wesentlich geringer als der Erwartungswert bzw. der abgezinste Erwartungswert von C_2 ist. Weiters sieht man, daß der Preis C_0 eigentlich nicht von p abhängt. Jede andere Wahrscheinlichkeit p mit $0 < p < 1$ liefert den selben Wert C_0. In die Gleichungen, deren Lösungen π_1^1, π_1^2, π_0^1, π_0^2 sind gehen nur die Werte des Aktienkurses ein, die mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden können. Wir werden sehen, daß C_0 Erwartungswert von S_2/B_2 unter einer Verteilung Q ist. Typischerweise ist Q vom Verteilungsgesetz, das die Stochastik von (S_t) steuert, dem sogenannten physischem Maß P, verschieden. Allerdings besitzen P und Q dieselben Nullmengen. Vereinfacht heißt das, die Pfade, die unter P bzw. Q positive Wahrscheinlichkeit besitzen, stimmen überein. Die Existenz dieses Maßes Q, des Martingalmaßes, ist äquivalent zu Lösbarkeit der Gleichungen, die zum Portfolio (π_t) führen.

1.2 Literatur

1. Hull J. C. *Options, Futures, and other Derivative Securities.* Prentice-Hall Int. Ed., 1993.

2. Karlin S. und Taylor H. *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1997.

3. Lamberton D. und Lapeyre B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman and Hall, 1996.

4. Oksendal B. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, 1991.

5. Sandmann K. *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte.* 2. Auflage, Springer, 2001.

6. Wilmott P. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance.* John Wiley and Sons, 2001.

Eine didaktisch ausgezeichnete Einführung in die Finanzmathematik sind *Hull*, *Sandmann* und *Wilmott*. Für die Theorie stochastischer Prozesse kann *Karlin und Taylor* empfohlen werden. Der für die Finanzmathematik relevante Teil der Theorie stochastischer Differentialgleichungen findet sich in *Oksendal* und *Lamberton und Lapeyre*.

Kapitel 2

Grundlegende Konzepte

Inhalt: Aktienkurse, Bankkonto, Calloption, Putoption, Forward, Europäische Option, Amerikanische Option, Portfolio; Arbitrage;

2.1 Beispiele

Ein wesentlicher Teil der Finanzmathematik beschäftigt sich mit der Theorie der Preise von Wertpapieren im Rahmen eines stochastischen Modells des Markts. Dieser Markt besteht aus Finanztiteln, die gehandelt werden, und deren Preise zumindest im Prinzip beobachtbar sind.

Die Finanzmathematik untersucht zuerst einmal Bedingungen für diese Wertpapiere (eigentlich für deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen), unter denen sinnvoller Weise von Preisen geprochen werden kann. Es hat sich die Arbitragefreiheit von Finanzmärkten als Konzept von zentrale Bedeutung etabliert. Der wesentliche Fortschritt der Theorie war die Formulierung von zur Arbitragefreiheit äquivalenten Bedingungen, die die Berechnung von Preisen erlauben (oder zumindest die Angabe von Intervallen, in denen die Preise liegen müssen).

Ein Derivat ist ein Finanztitel (Wertpapier), dessen Preis von einem anderen Wertpapier (dem Underlying) abhängt. Typischerweise wird das Underlying am Markt gehandelt. In arbitragefreien Märkten können die Preise von Derivate wieder angegeben (bzw. eingegrenzt) werden. Eine Option besitzt einen eindeutigen Preis, wenn sie dupliziert werden kann, d.h., wenn ein Portfolio aus gehandelten Wertpapieren gebildet werden kann, das zum Ausübungszeitpunkt der Option den selben Wert besitzt. Märkte heißen vollständig, wenn jedes Derivat duplizierbar ist.

2.1 BEISPIEL. Aktienkurs. Aktienkurse sind die wichtigsten Beispiele für gehandelte Wertpapiere. In der Finanzmathematik wird der Aktienkurs als Zufallsprozeß (stochastischer Prozeß) (S_t) modelliert.

Abhängig von der Struktur der Indexmenge (die als Zeit bezeichnet wird) unterscheiden wir den zeitstetigen und den zeitdiskreten Fall. Im zeitstetigen Fall existiert zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ ein Kurs. S_0 ist der aktuelle Kurs. Für jedes $t \in [0,T]$ ist S_t eine Zufallsvariable, entsprechend ist der Aktienkurs eine zufällige Funktion mit Definitionsbereich $[0,T]$ und Werten in den reellen Zahlen.

Im zeitdiskreten Fall existiert der Kurs zu Zeitpunkten $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N$, der Aktienkurs ist eine endliche (oder unendliche) Folge von Zufallsgrößen, $(S_{t_i})_{i=0}^N$ oder $(S_i)_{i=0}^N$.

□

2.2 BEISPIEL. Bankkonto. Wir nehmen an, daß es ein Bankkonto (eine risikolose Anlageform)(B_t) gibt. Eine Geldeinheit, in $t = 0$ auf dieses Konto eingezahlt, sei zum Zeitpunkt t B_t Geldeinheiten wert. Der Bankkontoprozeß (Numeraire) (B_t) erfüllt

$$B_0 = 1 \quad \text{und} \qquad B_{t_1} \leq B_{t_2} \text{ für alle } t_1 < t_2.$$

Ist der Bankkontoprozeß deterministisch mit konstantem Zinssatz, besitzt er die Form

$$B_t = e^{rt},$$

wobei r der nominelle Zinssatz ist. Eine alternative Darstellung ist

$$B_t = (1 + r_{eff})^t.$$

r_{eff} ist der effektive Zinssatz. Die Gleichheit der Aufzinsungsfaktoren (pro Zeiteinheit) e^r bzw. $1 + r_{eff}$ führt zu

$$\begin{aligned} e^r &= 1 + r_{eff} \\ r_{eff} &= e^r - 1 \\ r &= \ln(1 + r_{eff}). \end{aligned}$$

Wenn der Bankkontoprozeß festgelegt ist, und X_t eine Variable (Wertpapier, Kurs) bezeichnet, kürzen wir die diskontierte Größe X_t/B_t durch $\tilde{X}_t$ ab.

□

2.3 BEISPIEL. Europäische Calloption. Die europäische Calloption ist das Recht, das Underlying S (Aktie, Wechselkurs, Index, Anleihe) zum **Ausübungszeitpunkt** T zum **Ausübungspreis** (Strikepreis) K zu kaufen.

Sei C_t der Wert dieser Option im Zeitpunkt t. Der Kontrakt legt die Auszahlungsfunktion (und damit C_T) fest: Ist $S_T \leq K$, dann wird die Option nicht ausgeübt. Falls $S_T > K$, wird S_T zum

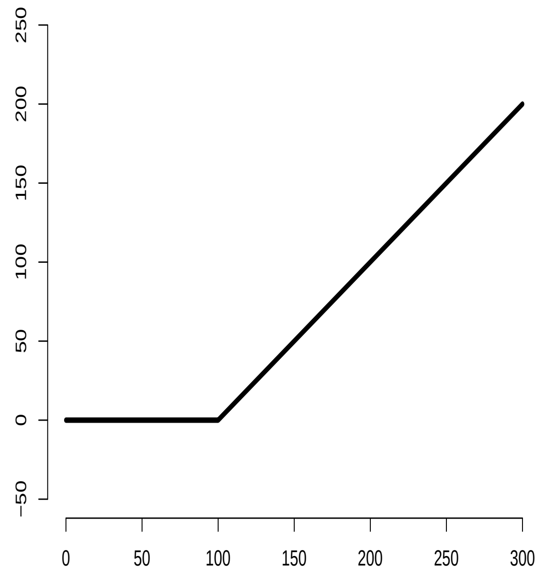

Abbildung 2.1: Call: Payoff $(S_T - K)_+$

Preis von K gekauft. Es ist

$$C_T = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad S_T \leq K \\ S_T - K & \text{falls} \quad S_T > K, \end{cases}$$

d.h.

$$C_T = (S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Die Option ist im Geld, wenn $S_t > K$, am Geld, wenn $S_t = K$ und aus dem Geld, wenn $S_t < K$. $\square$

2.4 BEISPIEL. Amerikanische Calloption. Die amerikanische Calloption ist das Recht, das Underlying S (die Aktie) bis zum Zeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu kaufen. Der Kontrakt legt wieder die Auszahlungsfunktion fest: Sei $\tau \leq T$ der Zeitpunkt, zu dem die Option ausgeübt wird oder (falls sie nicht ausgeübt wird) verfällt. Dann ist

$$C_\tau = (S_\tau - K)_+ = \max\{S_\tau - K, 0\}.$$

$\square$

2.5 BEISPIEL. Putoption. Die europäische Putoption ist das Recht, das Underlying S (die Aktie) zum Ausübungszeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu verkaufen.

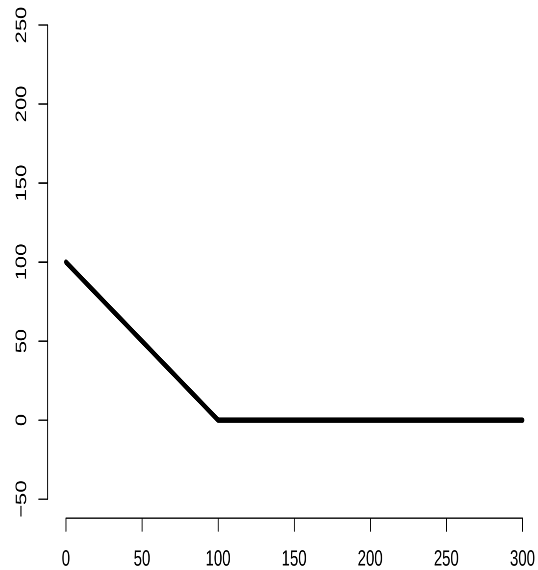

Abbildung 2.2: Put: Payoff $(K - S_T)_+$

Sei P_t der Wert dieser Option im Zeitpunkt t. Der Kontrakt legt die Auszahlungsfunktion (und damit P_T) fest: Die Option wird ausgeübt, falls $S_T < K$. Es ist

$$P_T = (K - S_T)_+ = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Die amerikanische Putoption ist das Recht, das Underlying S (die Aktie) bis zum Zeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu verkaufen. Sei $\tau \leq T$ der Zeitpunkt, zu dem die Option ausgeübt wird oder (falls sie nicht ausgeübt wird) verfällt. Es ist

$$P_\tau = (K - S_\tau)_+ = \max\{K - S_\tau, 0\}.$$

Die Option ist im Geld, wenn $S_t < K$, am Geld, wenn $S_t = K$ und aus dem Geld, wenn $S_t > K$. $\square$

2.6 BEISPIEL. Barriereoption. Barrieren erlauben, extreme Situationen auszuschließen bzw. Optionen für extreme Situationen zu adaptieren. Will jemand zum zukünftigen Zeitpunkt T eine Aktie kaufen, kann er sich mit einer Calloption gegen hohe Preise der Aktie absichern. Möglicherweise ist er aber nicht an der Aktie interessiert, wenn sie irgendwann im Zeitraum $t \in [0, T]$ extrem teuer ist. Oder der Verkäufer der Option sieht sich nicht imstande, das extreme Verhalten der Aktie zu versichern. Die Auszahlungsfunktion dieser Barriereoption könnte

$$(S_T - K)_+ I_{\{S_t \le B \text{ für alle } t \le T\}}$$

sein. K ist der Ausübungspreis der Calloption, $B > K$ die Barriere. Sei

$$M_T = \max\{S_t \mid 0 \le t \le T\}.$$

Die Auszahlungsfunktion kann auch als

$$(S_T - K)_+ I_{\{M_T \le B\}}$$

geschrieben werden.

Ein weiteres Beispiel für eine Barriereoption ist die Option mit Auszahlungsfunktion

$$I_{\{M_T > B\}}$$

Sie zahlt eine Geldeinheit, wenn die Aktien im Intervall $[0, T]$ zumindest einmal über B ist.

$\square$

2.7 BEISPIEL. Forwards und Futures. Ein Forward (Termingeschäft) ist ein Kontrakt, zu einem festgelegten zukünftigen Zeitpunkt T das Underlying S zum Preis F zu kaufen (oder zu verkaufen). S kann eine Aktie, Fremdwährung oder Waren wie Weizen, Kakao, Schweinebäuche, Erdöl oder Edelmetalle sein.

Forwards werden meist nicht an der Börse gehandelt. In großem Umfang werden - oft an eigenen Börsen - Futures gehandelt. Für diesen Handel legt die Börse einen Ablauf fest. Um Ausfallrisiken zu vermindern, finden die Transaktionen über einen Intermediär statt. Margen (margins) werden einbezahlt. Die Verträge sind standardisiert, etwa in Bezug auf die gehandelten Mengen und Qualitäten oder die Lieferbedingungen.

$\square$

2.8 BEISPIEL. Anleihen, Zinsstrukturmodelle. Der Baustein des Anleihenmarkts ist der Zero-Coupon Bond. Er zahlt zum spezifizierten Fälligkeitszeitpunkt T eine Geldeinheit. Sei $B_t(T)$ sein Preis zum Zeitpunkt t, $0 \le t \le T$. Verschiedene Produkte lassen sich als Linearkombinationen von Zero-Coupon Bonds darstellen. So ist zum Beispiel

$$C_1 B_t(T_1) + C_2 B_t(T_2) + \cdots + C_n B_t(T_n)$$

eine kouponzahlende Anleihe. Sie zahlt $C_1, C_2, \ldots, C_n$ zu den Zeitpunkten $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Zinsstrukturmodelle spezifizieren die gemeinsame Verteilung von Bonds $(B_t(T)_{t\leq T})$ für Fälligkeiten $T \in [0, T^*]$. Die Abhängigkeiten und Restrikitionen zwischen den Bonds implizieren, daß Zinsstrukturmodelle recht kompliziert sind. Anders als im Fall von Modellen für Aktienmärkte haben sich auch keine Standards (vergleichbar mit dem Black-Scholes Modell) etabliert.

$\square$

2.9 BEISPIEL. Exotische Optionen. Während in der Regel die an den Börsen gehandelten Optionen auf wenige Typen beschränkt sind, existiert eine große Vielfalt unter den am Over-The-Counter Markt gehandelten Derivaten. Viele sind für spezielle Bedürfnisse maßgeschneidert.
Die Auszahlungsfunktion einer **asiatischen** Option hängt vom Durchschnitt

$$\bar{S}_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

des Underlying ab.

$$(\bar{S}_T - K)_+$$

ist der Payoff eines Calls auf den Durchschnitt,

$$(S_T - \bar{S}_T)_+$$

der Payoff der Option, das Underlying zum Durchschnittspreis zu kaufen.
Andere Kontrakte beziehen sich auf Höchst-oder Tiefstkurse:

$$(\max\{S_t \mid 0 \leq t \leq T\} - K)_+\,, \qquad (S_T - \min\{S_t \mid 0 \leq t \leq T\})_+.$$

$\square$

2.2 Portfolios

Ein Investor wird sein Vermögen meist nicht in einem einzigen Wertpapier anlegen, er wird ein Portfolio von Wertpapieren halten. Portfolios können nach verschiedenen Gesichtspunkten zusammengestellt werden. Ein Aspekt kann die Verminderung des Risikos, ein anderer die Finanzierung eines Anspruchs sein. Optionen und Derivate werden durch Portfolios gehedget (dupliziert). Preise von Optionen werden berechnet, indem man hypothetische Portfolios zusammenstellt (deren Wert man berechnen kann, wenn die Preise der Komponenten bekannt sind), deren Payoff mit dem der Option übereinstimmen.
Seien $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^m$ die Kurse von Wertpapieren. Ein Portfolio wird durch die Mengen $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^m)$, die an den einzelnen Wertpapieren gehalten werden, festgelegt. Wir nehmen an, daß die Mengen φ_t^k beliebige reelle Zahlen sein können. So können z.B. Anteile von Aktien gekauft

werden. Negative Mengen entsprechen Verkäufen. Leerverkäufe, z.B. Verkäufe von Aktien, die man nicht besitzt, sind erlaubt.
Der Wert des Portfolios ist

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t^1 S_t^1 + \cdots + \varphi_t^m S_t^m.$$

Die Gewichte eines statischen Portfolios sind konstant, sie hängen nicht von der Zeit t ab. Bei dynamischen Portolios ändert sich die Zusammensetzung der Komponenten über die Zeit. Das Portfolio kann umgeschichtet werden, Beträge können entnommen oder zugeschossen werden. Die Gewichte eines dynamischen Portfolios können natürlich nur auf Grund der zum jeweiligen Zeitpunkt verfügbaren Information gewählt werden. Portfolios werden auch **Strategien** genannt.

2.10 BEISPIEL. Am Markt existiert ein Bankkontoprozeß (B_t) (mit $B_0 = 1, B_1 = 1.1, B_2 = 1.2$) und ein Aktienkurs $(S_t)_{t=0,1,2}$. Nur zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ kann das Portfolio zusammengestellt bzw. geändert werden.
Ein Anleger bildet ein Portfolio, bestehend aus 10 Aktien und einem Guthaben am Bankkonto von 10000. Falls die Aktie nach einer Periode mehr wert als in $t = 0$ ist, kauft er vom gesamten Bankguthaben weitere Aktien. Sonst ändert er das Portfolio nicht.
In $t = 0$ sind die Kurse bekannt, es sei $S_0 = 250$. Die Gewichte φ_1^0 und φ_1^1 sind nicht stochastisch. Es ist $\varphi_1^0 = 10000$, $\varphi_1^1 = 10$ und $V_0 = 10000 \times 1 + 10 \times 250 = 12500$.
In $t = 1$ ist $V_1 = 10000 \times 1.1 + 10 \times S_1 = 11000 + 10S_1$. Es wird umgeschichtet, φ_2^0 und φ_2^1 sind

$$\begin{aligned}
\varphi_2^0 &= \begin{cases} 10000 & \text{falls} \quad S_1 \le 250 \\ 0 & \text{falls} \quad S_1 > 250 \end{cases} \\
\varphi_2^1 &= \begin{cases} 10 & \text{falls} \quad S_1 \le 250 \\ V_1/S_1 & \text{falls} \quad S_1 > 250. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Die Gewichte $\varphi_t^k, t > 1$ können stochastisch sein. Sie dürfen aber nur von der Information abhängen, die vor t verfügbar war. φ_t^k kann eine Funktion von $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$, aber nicht von $S_t, S_{t+1}, \ldots$ sein.
Ein Portfolio, dem kein Geld entnommen oder zugeschossen wird, heißt **selbstfinanzierend**. Dann wird, wenn das Poltfolio geändert wird, das vorhandene Vermögen neu auf die zur Verfügung stehenden Wertpapiere verteilt. Kann nur zu den Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ umgeschichtet werden, ist das Portfolio selbstfinanzierend, falls für $i = 1, \ldots, n-1$

$$\varphi_{t_i}^0 S_{t_i}^0 + \varphi_{t_i}^1 S_{t_i}^1 + \cdots + \varphi_{t_i}^m S_{t_i}^m = \varphi_{t_{i+1}}^0 S_{t_i}^0 + \varphi_{t_{i+1}}^1 S_{t_i}^1 + \cdots + \varphi_{t_{i+1}}^m S_{t_i}^m.$$

2.3 Arbitrage

Das Konzept der Arbitragefreiheit hat sich als fundamental für theoretische finanzmathematische Untersuchungen herausgestellt.

Eine Arbitragemöglichkeit ist eine Strategie, ohne Kapitaleinsatz und nur durch Umschichten des Portfolios einen positiven Erlös zu generieren. Ein Markt heißt arbitragefrei, wenn keine Arbitragemöglichkeit existiert. Eine genauere Definition werden wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen.

Ausschließlich arbitragefreie Märkte zu untersuchen beruht zum Teil auf einem ökonomischen Argument. Gibt es in einem genügend liquiden Markt Arbitragemöglichkeiten, so werden diese Möglichkeiten, risikolose Gewinne zu erzielen, ergriffen. Ist z.B. ein Wertpapier entsprechend unterbewertet, wird dieses gekauft, der Preis steigt und die Arbitragemöglichkeit verschwindet. Falls es überhaupt Arbitragemöglichkeiten gibt, so das Argument, verschwinden diese innerhalb kürzester Zeit und sind für die Analyse des Marktes irrelevant. Wir wollen die Stichhaltigkeit dieser Argumentation dahingestellt lassen. Für uns gibt es zumindest einen Grund, die Arbitragefreiheit als zentralen Begriff zu sehen. Relevante Fragestellungen bei Märkten mit Arbitragemöglichkeit sehen wesentlich anders aus als die bei Märkten ohne diese Möglichkeit. So ist z.B. der Preis einer Option, deren Kauf der Absicherung gegen Kursverlust eines Wertpapiers dienen soll, wenig interessant, wenn man immer ohne Kapitaleinsatz und risikofrei (und auch beliebig große) Gewinne erzielen kann.

Die Arbitagefreiheit hängt eng mit zwei Konzepten, jenem der Existenz von **dominierenden Strategien**, und dem **Gesetz des einzigen Preises**, zusammen. Seien φ und ψ zwei selbstfinanzierende Handelsstrategien. φ *dominiert* ψ, falls $V_0(\varphi) = V_0(\psi)$ und $V_T(\varphi)(\omega) > V_T(\psi)(\omega)$ fast sicher. Im zeitdiskreten finanzmathematischen Modell gilt das *Gesetz des einzigen Preises*, falls für alle selbstfinanzierende Handelsstrategien φ und ψ aus $V_T(\varphi) = V_T(\psi)$ auch $V_t(\varphi) = V_t(\psi)$ für alle $0 \leq t \leq T$ folgt.

2.11 PROPOSITION. *1. In einem (zeitdiskreten) arbitragefreien Markt gibt es keine selbstfinanzierende Strategie φ mit $V_0(\varphi) < 0$ und $V_T(\varphi) \geq 0$.*

2. In einem (zeitdiskreten) arbitragefreien Markt gibt es gibt keine dominierende Strategie.

3. In einem (zeitdiskreten) arbitragefreien Markt gilt das Gesetz des einzigen Preises.

BEGRÜNDUNG. 1. Sei φ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_0(\varphi) < 0$ und $V_T(\varphi) \geq 0$. Man kauft das Portfolio und erhält dafür $|V_0(\varphi)|$. Legt man diesen Betrag im Bankkontoprozeß an, erhält man eine selbstfinanzierende Strategie ψ mit $V_0(\psi) = 0$ und $V_T(\psi) > 0$.

2. Erfüllen zwei selbstfinanzierende Handelstrategien φ und ψ, $V_0(\varphi) = V_0(\psi)$ und $V_T(\varphi) - V_T(\psi) > 0$ gleichzeitig, dann ist $\varphi - \psi$ eine Arbitragemöglichkeit.
3. Seien φ und ψ selbstfinanzierende Strategien mit $V_T(\varphi) = V_T(\psi)$ fast sicher. Angenommen, es gibt ein t^* mit

$$V_{t^*}(\varphi) > V_{t^*}(\psi)$$

mit positiver Wahrscheinlichkeit. Sei

$$A = \{\omega \mid V_{t^*}(\varphi)(\omega) > V_{t^*}(\psi)(\omega)\}.$$

Wir definieren die selbstfinanzierende Handelsstrategie φ' durch $\varphi'_t = 0$ für $t \leq t^*$. Für $t > t^*$ ist $\varphi'_t(\omega) = 0$ für $\omega \notin A$ und

$$\varphi'_t(\omega) = \psi_t(\omega) - \varphi_t(\omega) \qquad \text{für } \omega \in A.$$

Zusätzlich wird im Fall $\omega \in A$, $\varphi_{t^*}(\omega) - \psi_{t^*}(\omega)$ in $t = t^*$ auf das Bankkonto gelegt. In $t = T$ erhält man

$$V_T(\varphi')(\omega) = \begin{cases} (\varphi_{t^*}(\omega) - \psi_{t^*}(\omega))B_T/B_{t^*} & \text{falls} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{falls} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

□

2.12 BEISPIEL. Put-Call Parität. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Seien $P_t(T, K)$ und $C_t(T, K)$ der Wert der Putoption bzw. der Calloption auf das Wertpapier zum Zeitpunkt t. Der Ausübungszeitpunkt sei T und der Ausübungspreis K.
Zum Ausübungszeitpunkt T ist

$$C_T(T, K) - P_T(T, K) = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K.$$

Ein Portfolio, bestehend aus einem gekauften Call und einem verkauften Put, besitzt in $t = T$ denselben Wert wie ein Portfolio, das in $t = 0$ aus einer Aktie und einem Kredit der Höhe K/B_T besteht. Nach dem Gesetz des einzigen Preises muß die Put-Call Parität

$$C_t(T, K) - P_t(T, K) = S_t - KB_t/B_T$$

gelten.
Der Kurs einer Aktie betrage $S_0 = 100$, der Bankkontoprozeß sei $B_t = e^{rt}$ mit $r = 0.03$. Es sei $C_0(1, 100) = 26.8$, $P_0(1, 100) = 24.5$. Wir wollen überprüfen, ob eine Arbitragemöglichkeit besteht. Nach der Put-Call Parität müßte der Preis des Put

$$C_0(1, 100) - S_0 + Ke^{-r} = 26.8 - 100 + 97.045 = 23.845$$

betragen. Der Put ist demnach zu teuer. Wir bilden folgendes Portfolio: Wir kaufen 1000 Calls, verkaufen 1000 Puts und 1000 Aktien legen die Differenz, 102300, auf das Bankkonto. In $t = 1$ besitzen wir 1000 Calls, haben 1000 Puts und 1000 Aktien leerverkauft und verfügen über ein Bankkonto der Höhe

$$102300 \times e^{0.03} = 105415.50.$$

Wir können bzw. müssen die Aktien wieder zum Preis von $1000 \times 100 = 100000$ zurückkaufen. Es verbleibt ein Gewinn von 5415.50: Ist $S_1 > K = 100$, verfallen die Puts, wir üben die Calloptionen aus und erhalten die 1000 Aktien. Ist $S_1 \leq K = 100$, verfallen die Calls, der Käufer der Puts übt die Optionen aus, wir müssen die Aktien kaufen. □

2.13 BEISPIEL. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Seien $P_t(T, K)$ und $C_t(T, K)$ der Wert der Putoption bzw. der Calloption auf das Wertpapier zum Zeitpunkt t. Der Ausübungszeitpunkt sei T und der Ausübungspreis K.
Aus

$$C_T(T, K) = (S_T - K)_+ \geq S_T - K$$

folgt

$$C_t(T, K) \geq S_t - KB_t/B_T.$$

Da $C_t(T, K)$ immer nichtnegativ ist, folgt

$$C_t(T, K) \geq (S_t - KB_t/B_T)_+.$$

Analog zeigt man, daß

$$P_t(T, K) \geq (KB_t/B_T - S_t)_+.$$

Der Kurs einer Aktie betrage $S_0 = 100$, der Bankkontoprozeß sei $B_t = e^{rt}$ mit $r = 0.03$. Die Putoption $P_0(1, 120)$ koste 12.5.
Sie sollte zumindest

$$S_0 - Ke^{-r} = 16.45$$

kosten. Da sie zu billig ist, kaufen wir Puts und Aktien. Wir bezahlen für 100 Aktien und 100 Puts $100 \times 100 + 100 \times 12.5 = 11250$, was wir durch einen Kredit finanzieren. In $t = 1$ besitzen wir neben den 100 Aktien und Puts $-11250 \times e^{0.03} = -11592.61$ am Konto. Wir können die Aktien zu einem Preis von mindestens 120×100 verkaufen. Der Gewinn beträgt mindestens 407.39. □

2.14 BEISPIEL. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Sei $C_t(T, K)$ der Wert

der Calloption auf das Wertpapier zum Zeitpunkt t. Der Ausübungszeitpunkt sei T und der Ausübungspreis K.
Wir wollen zeigen, daß von zwei Calloptionen mit demselben Strikepreis diejenige mit der kürzeren Laufzeit die billigere ist,

$$C_t(T_1, K) \leq C_t(T_2, K)$$

für $T_1 \leq T_2$ und $t \leq T_1$.
Angenommen, es gibt $t_0 \leq T_1 \leq T_2$ mit $C_{t_0}(T_1, K) > C_{t_0}(T_2, K)$. Wir kaufen in t_0 eine Calloption mit Ausübungszeitpunkt T_2 und verkaufen eine mit Ausübungszeitpunkt T_1. Die Differenz legen wir auf das Bankkonto. Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $S_{T_1} \leq K$, verfällt die verkaufte Calloption, wir besitzen dann eine Calloption und einen positiven Betrag am Bankkonto. Falls $S_{T_1} > K$ wird die verkaufte Option ausgeübt, wir legen den erhaltenen Betrag K wieder auf das Bankkonto. Das Portfolio ist in $t = T_2$

$$-S_{T_2} + (S_{T_2} - K)_+ + KB_{T_2}/B_{T_1} + (C_{t_0}(K; T_1) - C_{t_0}(K, T_2))B_{T_2}/B_{t_0}$$

wert. Da

$$-S_{T_2} + (S_{T_2} - K)_+ \geq -K$$

besitzen wir zumindest

$$K(B_{T_2}/B_{T_1} - 1) + (C_{t_0}(K; T_1) - C_{t_0}(K, T_2))B_{T_2}/B_{t_0} > 0.$$

Wir wollen noch feststellen, daß bei amerikanischen Optionen immer die Option mit längerer Laufzeit die teurere ist. □

2.15 BEISPIEL. Forward. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Kontrakte, deren Auszahlungsfunktion lineare Funktionen des Underlying sind, insbesondere Forwards, besitzen eindeutige Preise.
Sei F der Preis, der in $t = 0$ vereinbart wurde (zu zahlen in $t = T$) für den Kauf des Wertpapiers. Wir betrachten ein Portfolio, das in $t = 0$ aus einem Forward, einer verkauften Aktie und einem Bankkonto der Höhe S_0 besteht. Sein Wert ist $0 - S_0 + S_0 = 0$. Der Wert in $t = T$ beträgt

$$S_T - F \quad - S_T \quad + S_0 B_T = -F + S_0 B_T.$$

Man wird das Portfolio kaufen, falls $F < S_0 B_T$ und verkaufen, falls $F > S_0 B_T$, um einen Arbitragegewinn zu machen. Daher muß

$$F = S_0 B_T$$

gelten. □

2.4 Aufgaben

AUFGABE 2.1. Am Markt befinden sich zwei Aktien, (S_t^0), (S_t^1). Ein Anleger bildet ein Portfolio, das aus der ersten Aktie besteht. Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \ldots, T-1$ bildet er ein Portfolio bestehend aus der besseren Aktie aus der Vorperiode. Wie lauten φ_t^0 und φ_t^1? Ist das Portfolio selbstfinanzierend?

AUFGABE 2.2. Am Markt befinden sich zwei Aktien, (S_t^0), (S_t^1) und ein Bankkonto (B_t). Ein Anleger bildet ein Portfolio, das aus der ersten Aktie besteht. Zu jedem Zeitpunkt $t = 1, \ldots, T-1$ bildet er ein Portfolio bestehend aus der schlechteren Aktie aus der Vorperiode. Überschüsse werden auf das Bankkonto gelegt.Wie lauten φ_t^0 und φ_t^1? Ist das Portfolio selbstfinanzierend?

AUFGABE 2.3. In einem Markt kostet ein Call 57.1 und ein Put 25.5. Ausübungspreis und -zeitpunkt seien $K = 120$ und $T = 2$, das Underlying kostet 130. Der nominelle Zinssatz ist 5%. Finden Sie eine Arbitragemöglichkeit!

AUFGABE 2.4. In einem arbitragefreien Markt kostet ein Call 57.1 und ein Put 35.5. Ausübungspreis und -zeitpunkt seien $K = 120$ und $T = 1$, das Underlying kostet 130. Berechnen Sie den konstanten nominellen Zinssatz.

AUFGABE 2.5. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Seien $P_t(T, K)$ und $C_t(T, K)$ der Wert der Putoption bzw. der Calloption auf das Wertpapier zum Zeitpunkt t. Der Ausübungszeitpunkt sei T und der Ausübungspreis K.
Man zeige, daß für $K \leq K'$,

$$C_t(T, K') \leq C_t(T, K) \leq C_t(T, K') + (K' - K)B_t/B_T,$$

$$P_t(T, K) \leq P_t(T, K') \leq P_t(T, K) + (K' - K)B_t/B_T.$$

AUFGABE 2.6. Sei ein arbitragefreies finanzmathematisches Modell, bestehend aus einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. Seien $P_t(T, K)$ und $C_t(T, K)$ der Wert der Putoption bzw. der Calloption auf das Wertpapier zum Zeitpunkt t. Der Ausübungszeitpunkt sei T und der Ausübungspreis K.
Sei $\alpha \in [0, 1]$ und $K = \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$. Man zeige, daß

$$C_t(T, K) \leq \alpha C_t(T, K_1) + (1-\alpha)C_t(T, K_2),$$

$$P_t(T, K) \leq \alpha P_t(T, K_1) + (1-\alpha)P_t(T, K_2).$$

AUFGABE 2.7. In Beispiel 2.15 wird angenommen, daß das Underlying keine Dividenden oder Zinsen zahlt. Sind mit dem Besitz des Underlying Zahlungen verbunden, müssen sie berücksichtigt werden.
Sei S_t ein Wechselkurs, z.B. der Preis eines Dollar (in Euro). In den USA und Europa seien die nominellen Zinssätze $r_a = 1.5\%$ bzw. $r_e = 2.5\%$. Ein Termingeschäft legt in $t = 0$ den Preis F fest, der für 1 Dollar in $t = T$ zu zahlen ist. Sei $S_0 = 0.8$ und $T = 1$. Berechnen Sie F!

AUFGABE 2.8. In Beispiel 2.15 wurde für einen Forward die Höhe des in $t = T$ zu zahlenden Preises ($F = S_0 B_T$) festgelegt. Sei f_t der Wert des Forward zum Zeitpunkt t ($0 \leq t \leq T$). Berechnen Sie f_t in einem arbitragefreien Markt.

Kapitel 3

Stochastische Prozesse

Inhalt: Irrfahrt, Geometrische Irrfahrt, Brown'sche Bewegung, Geometrische Brown'sche Bewegung.

3.1 Definition

Kurse von Wertpapieren werden als stochastische Prozesse modelliert, das sind Zufallsgrößen, die sich über die Zeit ändern. Zeitabhängige Zufallsgrößen sind Folgen bzw. Familien von Zufallsgrößen, die mit der Zeit indiziert sind.

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Wir unterscheiden stochastische Prozesse in diskreter Zeit, das sind Folgen von Zufallsgrößen, $(X_n)_{n=0}^N$, mit $N \in \mathbb{N}$ oder unendliche Folgen $(X_n)_{n=0}^\infty$ und Prozesse in stetiger Zeit $(X_t)_{0\le t\le T}$ bzw. $(X_t)_{0\le t\le\infty}$.

In der Folge bezeichnet N eine natürliche Zahl oder ∞ und T eine positive reelle Zahl oder ∞.

Jedem Szenario $\omega \in \Omega$ entspricht ein Pfad $(X_n(\omega))_{n=0}^N$ bzw. $(X_t(\omega))_{0\le t\le T}$. Jeder Pfad is also eine Abbildung mit der Indexmenge als Definitionsbereich und $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^d$) als Wertebereich. Die Verteilung des stochastischen Prozesses ist eine Verteilung auf der Menge der Pfade, einer Mengen von Funktionen. Entsprechend vielfältig ist die Struktur dieser Verteilungen.

Wir wollen zuerst die Diskussion auf zeitdiskrete Prozesse beschränken.

Die Verteilung des Prozesses $(X_n)_{n=0}^N$ kann festgelegt werden, indem man die Verteilung des Anfangswerts X_0 und aller bedingter Verteilungen $X_n \mid X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, $n = 1, \ldots, N$, angibt. Es gibt eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen (Z_n) und Abbildungen $g_0(z_0), g_1(x_0, z_1), \ldots, g_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, z_n), \ldots$ mit

$$X_0 = g_0(Z_0), \tag{3.1}$$

$$X_n = g_n(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Z_n). \tag{3.2}$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, man kann meist die Abhängigkeitsstruktur, d.h. Funktionen (g_n) (und die Verteilung der Faktoren Z_n) entsprechend der Problemstellung geeignet wählen.
Die einfachste Struktur besitzt eine Folge (X_n) von zentrierten identisch verteilten und unabhängigen Zufallsgrößen, sogenanntes weißes Rauschen. Nach (3.1) und (3.2) bildet **weißes Rauschen** den Grundbaustein für Verteilungen stochastischer Prozesse.

3.2 Irrfahrt

Ein Prozeß $(X_n)_{n=0}^N$ mit unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen heißt **Irrfahrt**. Es gibt unabhängige Zufallsvariable X_0, $Z_1, \dots, Z_N$, mit $Z_i \sim Z_1$ und für $n = 1, \dots, N$,

$$X_n = X_{n-1} + Z_n. \tag{3.3}$$

Aus (3.3) folgt die Darstellung.

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + Z_n \\ X_n &= X_{n-2} + Z_{n-1} + Z_n \\ &\vdots \\ X_n &= X_0 + Z_1 + \cdots + Z_n. \end{aligned}$$

3.1 BEISPIEL. Der **Binomialprozeß** (X_n) ist eine Irrfahrt mit Zuwächsen, die nur zwei Werte, u und d, annehmen können. Es gibt ein $0 \le p \le 1$, sodaß $P(Z_n = u) = p$ und $P(Z_n = d) = 1 - p$. Sei $X_0 = 0$, $u = 1$ und $d = 0$. Dann ist $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ mit unabhängigen und identisch verteilten Indikatorvariablen $Z_1, \dots, Z_n$. Damit ist

$$X_n \sim B(n, p)$$

und

$$X_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1 = \begin{cases} x_{n-1} + 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ x_{n-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p. \end{cases}$$

Die bedingte Verteilung von $X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_1$ hängt nur von der unmittelbaren Vergangenheit X_{n-1} ab.
Für allgemeine Parameter u, d, p der Verteilung der Zuwächse ist die Anzahl der u's binomialverteilt. Es ist also

$$X_n = X_0 + uB_n + d(n - B_n),$$

wobei $B_n \sim B(n, p)$ und

$$X_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1 = \begin{cases} x_{n-1} + u & \text{mit Wahrscheinlicheit } p \\ x_{n-1} + d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p. \end{cases}$$

$\square$

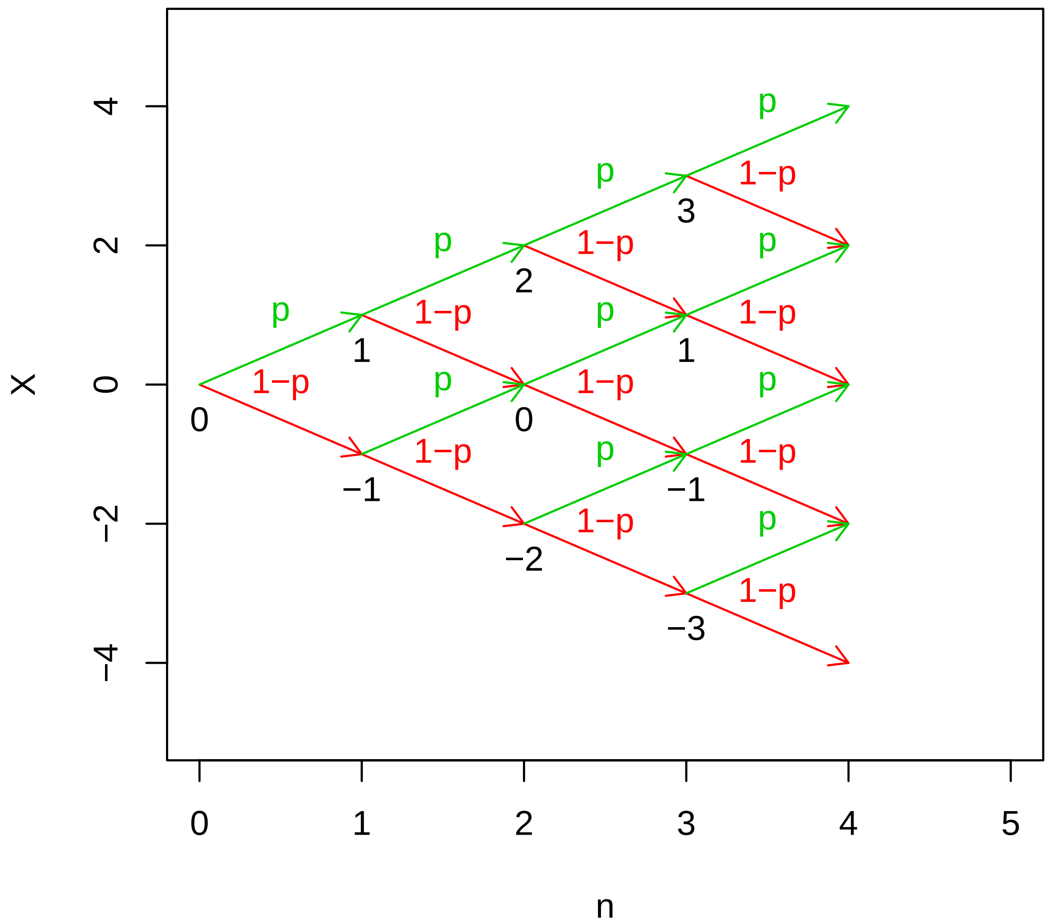

Abbildung 3.1: Baumstruktur des Binomialprozesses, $X_0 = 0$, $u = 1$, $d = -1$

Erwartungswert und Varianz einer Irrfahrt (X_n) sind

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}[X_0 + Z_1 + \cdots + Z_n] \\ &= \mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}[Z_1] + \cdots + \mathbb{E}[Z_n] \\ &= \mathbb{E}[X_0] + n\mathbb{E}[Z_1], \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}[X_n] = \mathbb{V}[X_0 + Z_1 + \cdots + Z_n]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{V}[X_0] + \mathbb{V}[Z_1] + \cdots + \mathbb{V}[Z_n] \\
&= \mathbb{V}[X_0] + n\mathbb{V}[Z_1].
\end{aligned}
$$

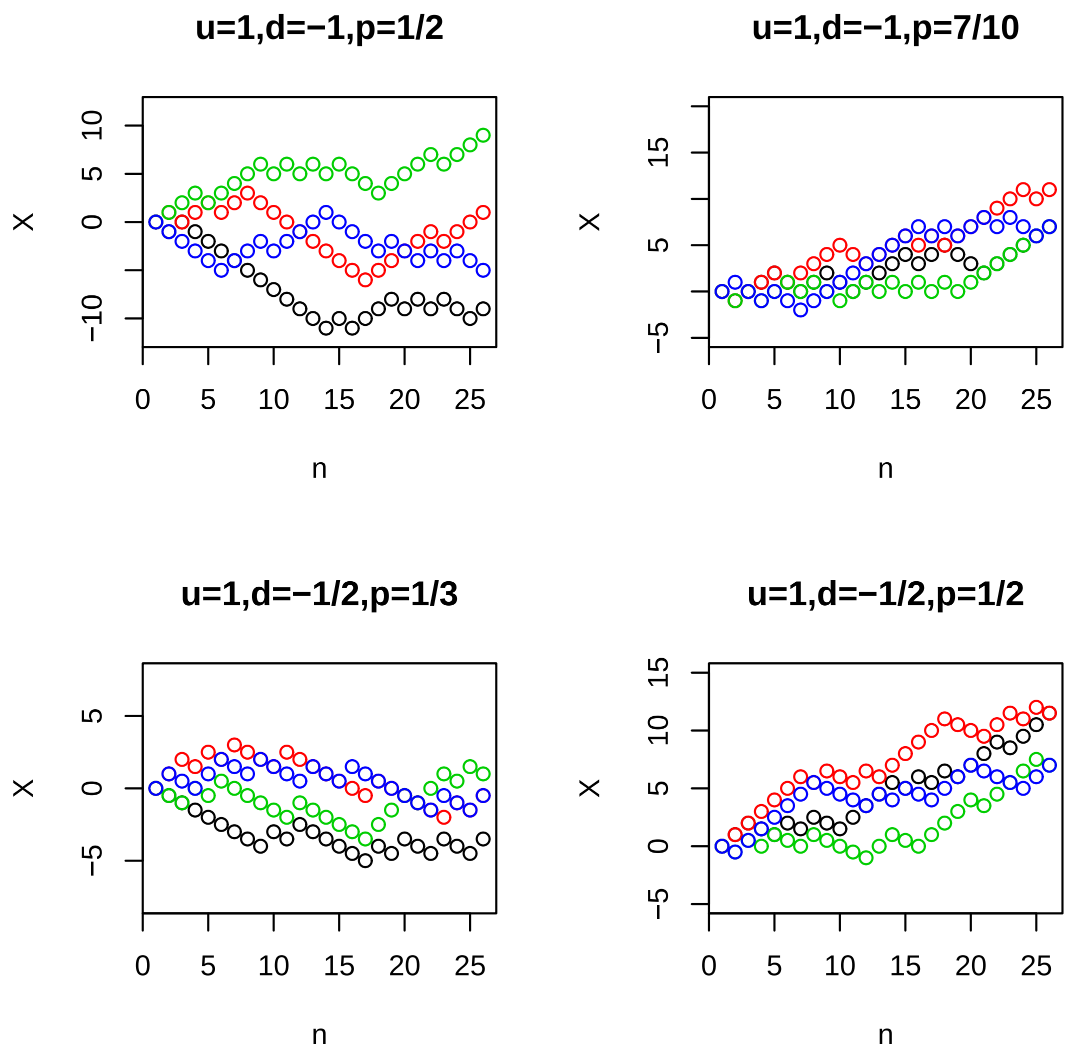

Abbildung 3.2: Pfade von Irrfahrten

3.2 BEISPIEL. Sei (X_n) ein Binomialprozeß mit $X_0 = 0$. Aus

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{E}[Z_1] \\
&= pu + (1-p)d, \\
\sigma^2 &= \mathbb{V}[Z_1] \\
&= p(u-\mu)^2 + (1-p)(d-\mu)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p(1-p)^2(u-d)^2 + (1-p)p^2(u-d)^2 \\
&= p(1-p)(u-d)^2
\end{aligned}
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= n\mu \\
&= n(pu + (1-p)d) \\
\mathbb{V}[X_n] &= n\sigma^2 \\
&= np(1-p)(u-d)^2.
\end{aligned}
$$

```
> u<-1
> d<--1
> p<-1/2
> n<-25
> Z<-sample(c(u,d),n,replace=T,prob=c(p,1-p))
> X<-c(0,cumsum(Z))
> plot(X,type="b",xlab="n",ylab="X",ylim=c(-15,15))
> for(i in 1:5){Z<-sample(c(u,d),n,replace=T,prob=c(p,1-p))
+ X<-c(0,cumsum(Z)) + lines(X,type="b",col=i)  }
> title("u=1, d=-1, p=1/2")
```

□

Sei (X_n) eine Irrfahrt mit $X_n = X_{n-1} + Z_n$ und (Z_n) unabhängig und identisch verteilt. Sei μ der Erwartungswert von Z_n und $Z_n^* = Z_n - \mu$. Dann ist

$$X_n = X_{n-1} + \mu + Z_n^*$$

eine alternative Darstellung des Irrfahrt. μ stellt die systematische Komponente, Z_n^* die stochastische Komponente des Zuwachses dar. Eine weitere Darstellung erhalten wir, wenn wir

$$X_n^* = Z_1^* + \cdots + Z_n^*$$

setzen. (X_n^*) ist eine Irrfahrt mit zentrierten Zuwächsen, kumuliertes weißes Rauschen. Wir erhalten eine Darstellung von (X_n),

$$X_n = X_0 + n\mu + X_n^*,$$

bestehend aus Startwert, linearem Trend und kumuliertem weißem Rauschen.

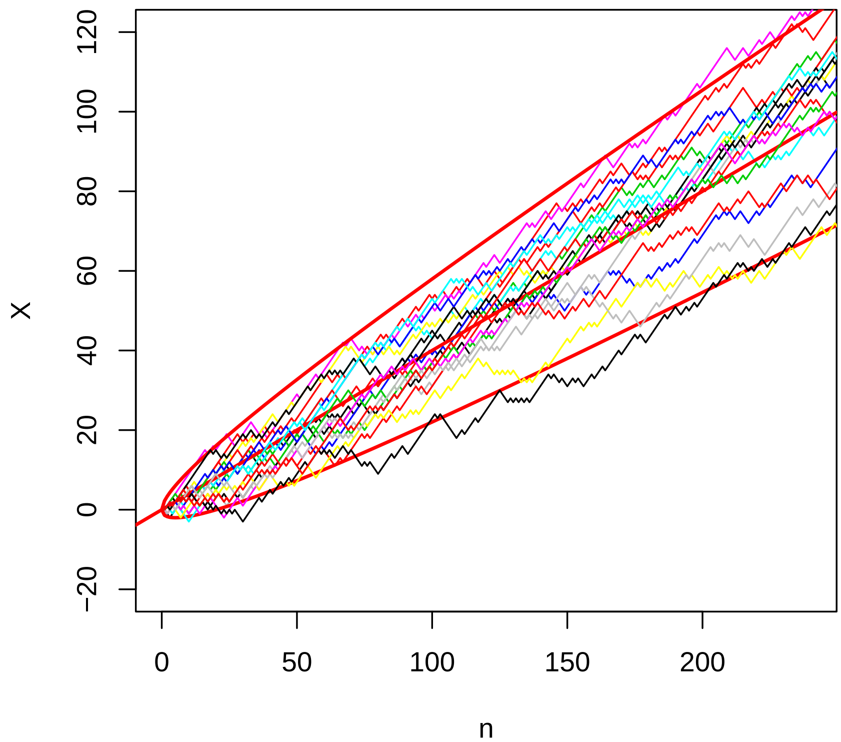

Abbildung 3.3: Pfade des Binomialprozesses, $u = 1, d = -1, p = 7/10$

Das langfristige Verhalten hängt bei Irrfahrten von der systematischen Komponente μ ab: Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \to \mu = \mathbb{E}[Z_1].$$

Ist $\mu > 0$, dann konvergiert X_n gegen ∞, da für $x \in \mathbb{R}$

$$P(X_n \leq x) = P(X_n/n \leq x/n) \to P(\mu \leq 0) = 0.$$

Bei negativem Trend ($\mu < 0$) konvergiert X_n gegen $-\infty$,

$$P(X_n \geq x) \to 0,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir betonen, daß im allgemeinen Fall die Asymptotik des Prozesses nicht mit der der Erwartungswerte übereinstimmen muß.

3.3 BEISPIEL. Sei (X_n) eine Irrfahrt mit $\mathbb{V}[Z_1] = \sigma^2$. Da für $k \leq n$ $X_n - X_k$ von X_k unabhängig ist, sind Kovarianz und Korrelation zwischen X_k und X_n $(k \leq n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov[X_k, X_n] &= \mathbb{C}ov[X_k, X_k] + \mathbb{C}ov[X_k, X_n - X_k] \\ &= \mathbb{C}ov[X_k, X_k] \\ &= \mathbb{V}[X_k] \\ &= \mathbb{V}[X_0] + k\sigma^2 \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{C}or[X_k, X_n] = \frac{\mathbb{V}[X_k]}{\mathbb{V}[X_k]^{1/2}\mathbb{V}[X_n]^{1/2}} = \sqrt{\frac{\mathbb{V}[X_k]}{\mathbb{V}[X_n]}}.$$

Falls X_0 konstant ist, ist

$$\mathbb{C}ov[X_k, X_n] = \mathbb{V}[X_k] = k\sigma^2$$

und

$$\mathbb{C}or[X_k, X_n] = \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

□

3.4 BEISPIEL. Ein Spieler setzt in jeder Periode ein Kapital d. Mit Wahrscheinlichkeit p gewinnt er zusätzlich u Geldeinheiten. Ist X_0 das Startkapital, dann besitzt er nach n Spielen

$$X_n = X_0 + Z_1 + \cdots + Z_n,$$

wobei $P(Z_n = u) = p$ und $P(Z_n = -d) = 1 - p$. □

3.5 BEISPIEL. Ein Versicherungsunternehmen besitzt ein Kapital der Höhe X_0. In jeder Periode zahlen die Versicherten α Geldeinheiten als Prämien. Die Zahlungen des Unternehmens sind die zufällig anfallenden Schadensummen. Es ist

$$X_n = X_0 + \alpha n - \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

wobei die Ansprüche U_i nichtnegative Zufallsvariable sind. α wird Prämienrate genannt. □

Ein Prozeß $(X_n)_{n=0}^N$ mit unabhängigen und identisch verteilten relativen Zuwächsen heißt **geometrische Irrfahrt**. Es gibt unabhängige Zufallsvariable X_0, $Z_1, \ldots, Z_N$, mit $Z_i \sim Z_1$ und für $n = 1, \ldots, N$,

(3.4)
$$\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = Z_n.$$

Aus (3.4) folgt die Darstellung.

$$X_n = X_0(1 + Z_1) \cdots (1 + Z_n).$$

3.6 BEISPIEL. Modell von Cox, Ross und Rubinstein (CRR-Modell). Das einfachste Modell zur Bewertung von Optionen unterstellt geometrische Irrfahrten (S_n) als Aktienkurse,

$$S_n = S_0 Z_1 Z_2 \cdots Z_n,$$

mit

$$\begin{aligned} P(Z_n = U) &= p, \\ P(Z_n = D) &= 1 - p. \end{aligned}$$

$S_0 > 0$ ist konstant. Die Zahlen U und D sind die möglichen Werte der Faktoren $Z_n = S_n / S_{n-1}$. $\square$

3.7 BEISPIEL. Der Erwartungswert einer geometrischen Irrfahrt (X_n) ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}[X_0 Z_1 \cdots Z_n] \\ &= \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[Z_1] \cdots \mathbb{E}[Z_n] \\ &= \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[Z_1]^n. \end{aligned}$$

Sei (S_n) ein geometrischer Binomialprozeß (CRR-Modell). Aus

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[Z_1] \\ &= pU + (1-p)D \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &= S_0 \mu^n \\ &= S_0 \left(pU + (1-p)D\right)^n. \end{aligned}$$

$\square$

3.8 BEISPIEL. Sei (X_n) eine Irrfahrt, dann ist (Y_n) mit $Y_n = e^{X_n}$ eine positive geometrische Irrfahrt.
Ist (Y_n) eine positive geometrische Irrfahrt, dann ist $(X_n) = (\log Y_n)$ eine Irrfahrt. $\square$

3.9 BEISPIEL. Dieses Beispiel zeigt, daß es einfache Prozesse gibt, deren asymptotisches Verhalten nicht an Hand des Verhaltens der Erwartungswerte bestimmt werden kann. Im folgenden Beispiel gilt $\mathbb{E}[X_n] \to \infty$ und $X_n \to 0$.
Sei (X_n) ein CRR-Prozeß, d.h. eine geometrische Irrfahrt

$$X_n = X_{n-1} Z_n$$

mit unabhängigen Zufallsgrößen Z_n, die die Werte $U = 7/4$ und $D = 2/7$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ annehmen. $X_0 = x_0 = 1$ sei konstant. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n] &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{57}{56} > 1, \\ \mathbb{E}[X_n] &= \left(\frac{57}{56}\right)^n \to \infty.\end{aligned}$$

$(\log X_n)$ ist eine Irrfahrt, die Zuwächse $\log Z_n$ besitzen den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}[\log Z_n] \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{7} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{7 \times 2}{4 \times 7} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\log 2}{2} < 0.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\log X_n \to -\infty$$

und damit

$$X_n \to 0.$$

□

3.10 BEISPIEL. Die Baumstruktur des CRR-Prozesses (S_n) erlaubt die einfache Berechnung von Erwartungswerten. Seien U und D reelle Zahlen mit $P(S_{n+1} = s_n U \mid S_n = s_n) = q$ und $P(S_{n+1} = s_n D \mid S_n = s_n) = 1 - q$, mit $S_0 = 100$, $U = 1.21$, $D = 0.88$ und $q = 2/3$.
Wir wollen den erwarteten Barwert einer Calloption mit Ausübungspreis $K = 100$ und Ausübungszeitpunkt $N = 3$ berechnen. Der effektive Zinssatz sei 10% pro Periode, d.h. der Aufzinsungsfaktor ist $e^r = 1.1$
Um den erwarteten Barwert der Calloption zu berechnen, geht man folgendermaßen vor. $\tilde{C}_n$ bezeichnet den abgezinsten Optionspreis zum Zeitpunkt n. Abbildung 3.4 zeigt die Baumstruktur des Prozesses. In $n = 0$ ist $S_n = 100$. In $n = 1$ ist der Prozeß entweder im Knoten $100 \times U = 121$ oder in $100 \times D = 88$. Jeder Knoten hat zwei Nachfolger. Der obere Knoten entspricht einem U, der untere einem D. Die Wahrscheinlichkeit zum oberen Nachfolgeknoten zu gelangen ist gleich $q = 2/3$. Die Wahrscheinlichkeit zum unteren Nachfolgeknoten zu gelangen entsprechend $1 - q = 1/3$.

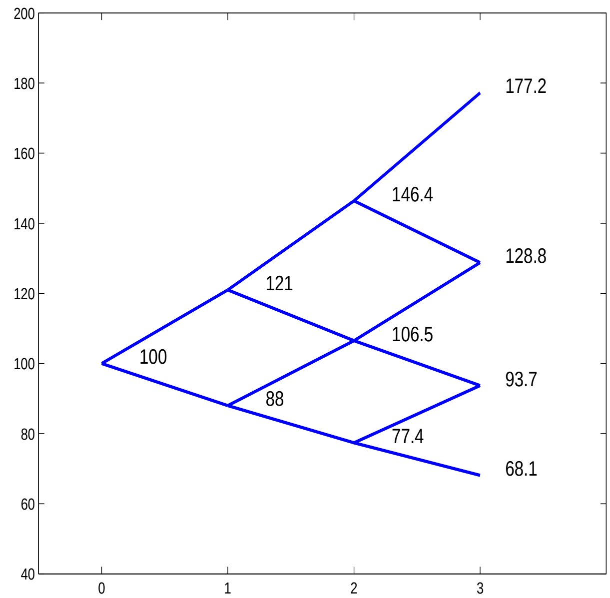

Abbildung 3.4: CRR-Baum, $(S_n)_{n=0}^3$

Im nächsten Schritt berechnet man den Wert $\tilde{C}_n$ zum einzigen Zeitpunkt zu dem dies trivial ist, im Ausübungszeitpunkt $N = 3$. Man beachte, daß die Option nur in den beiden oberen Knoten im Geld ist. $\tilde{C}_3$ ist im obersten Knoten gleich

$$e^{-3r}(100U^3 - 100) = 58$$

und im zweiten

$$e^{-3r}(100U^2D - 100) = 21.7.$$

Die Werte sind gerundet. Dann füllt man den Baum von rechts nach links auf. In jeden Knoten wird das gewichtete Mittel der beiden Nachfolger geschrieben. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_2(S_2 = 100U^2) &= q\tilde{C}_3(S_3 = 100U^3) + (1-q)\tilde{C}_3(S_3 = 100U^2D) \\
&= \frac{2}{3} \times 58 + \frac{1}{3} \times 21.7 \\
&= 45.9
\end{aligned}$$

Schließlich erhält man $C_0 = \tilde{C}_0 = 26.8$. $\square$

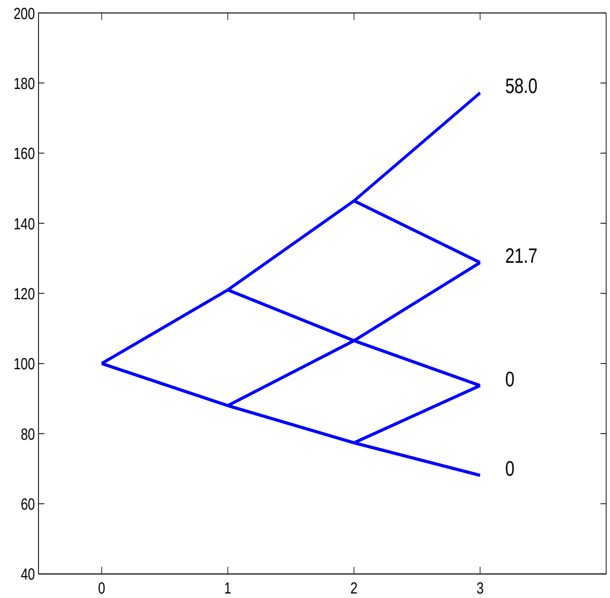

Abbildung 3.5: $\tilde{C}_N$

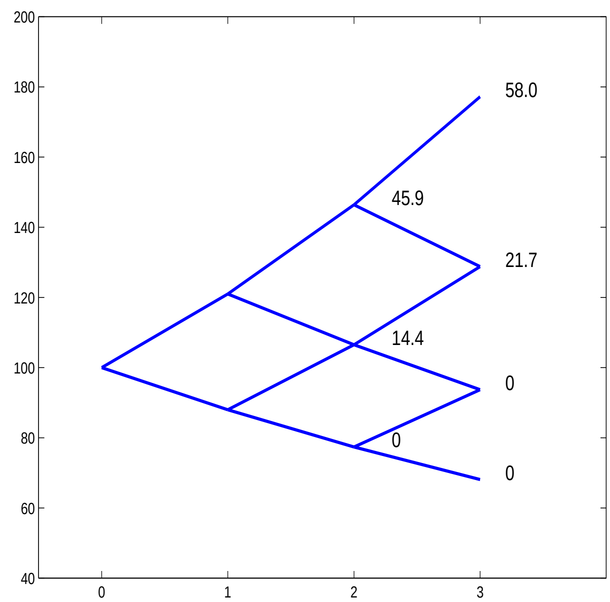

Abbildung 3.6: $\tilde{C}_{N-1}$

.

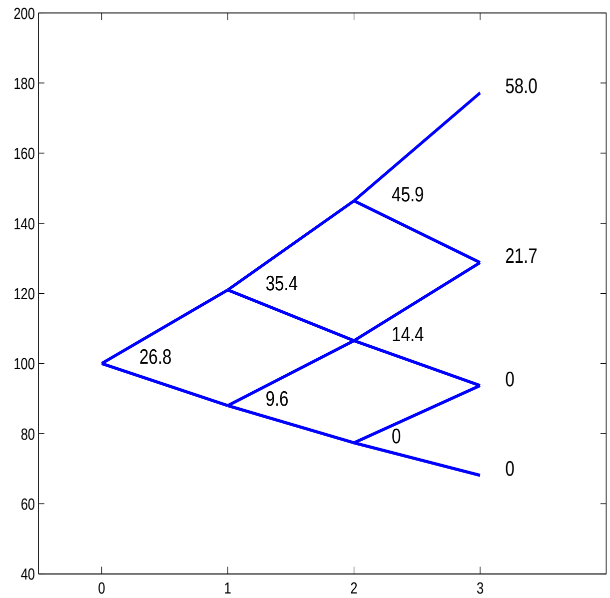

Abbildung 3.7: $\tilde{C}_0$

3.3 Brown'sche Bewegung

Ein Prozeß $(W_t)_{0\leq t<\infty}$ wird **Brown'sche Bewegung** genannt, wenn

1. $W_0 = 0$,
2. die Pfade $t \mapsto W_t(\omega)$ stetig sind,
3. für alle $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ die Zuwächse $W_{t_1},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ \ldots W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ unabhängig und normalverteilt sind mit $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$.

Es ist nicht trivial, daß ein Prozeß mit diesen Eigenschaften existiert. Die Existenz der Brown'schen Bewegung (B.B.) ist ein tiefes Resultat und wie fast alle Ergebnisse aus diesem Bereich ist der entsprechende Beweis aufwendig. Wir akzeptieren die Existenz der B.B. und versuchen einige ihrer Eigenschaften herzuleiten.

Die Brown'sche Bewegung entspricht einer Irrfahrt in stetiger Zeit. Die Zuwächse $W_t - W_s$ sind unabhängig, ihre Verteilung hängt nur von der Länge des Intervalls $[s, t]$ ab.

Zur Simulation von Pfaden $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ unterteilt man das Intervall $[0, T]$ in n Teilintervalle (der Länge $h = T/n$). Die Zuwächse $W_{ih} - W_{(i-1)h}$ sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h. Entsprechend ist $W_{hi} \sim \sqrt{h}Z_1 + \cdots + \sqrt{h}Z_i$ mit $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängig $N(0,1)$-verteilt.

```
> n<-500
> T<-5
> h<-T/n
> t<-(0:n)*h
> X<-c(0,cumsum(rnorm(n)*sqrt(h)))
> plot(t,X,type="l",xlab="t",ylab="W",ylim=c(-5,5))
> for(i in 1:4)lines(t,c(0,cumsum(rnorm(n)*sqrt(h))),col=i+1)
```

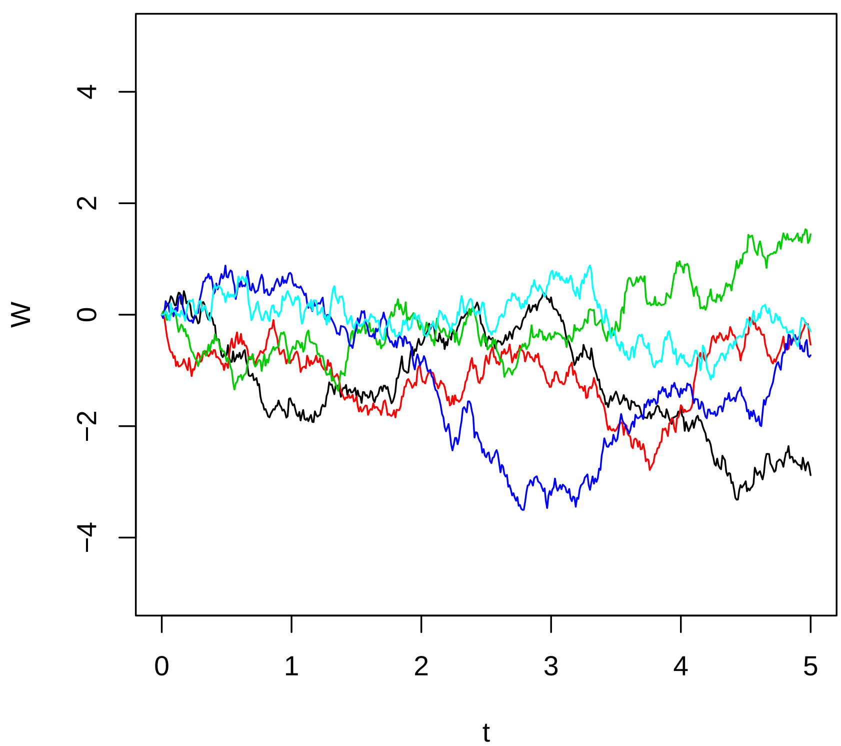

Abbildung 3.8: Pfade der Brown'schen Bewegung

Die Kovarianz zwischen W_s und W_t ($s < t$) ist

$$\mathbb{C}ov[W_s, W_t] = \mathbb{E}[W_s W_t]$$

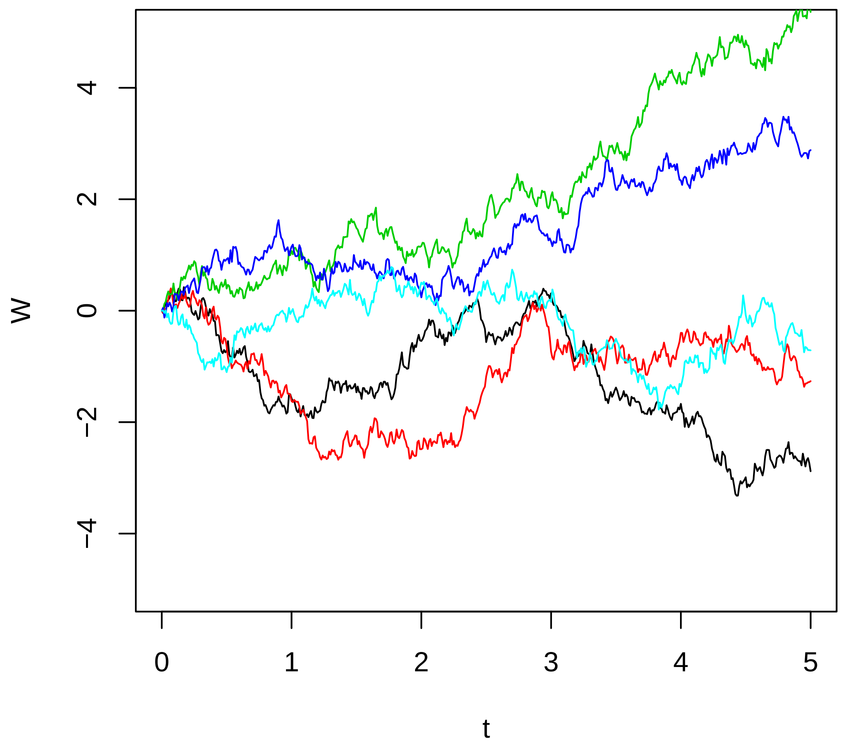

Abbildung 3.9: Pfade der Brown'schen Bewegung

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s + W_s)] \\
&= \mathbb{E}[W_s(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] \\
&= 0 \times 0 + s \\
&= s \\
&= \min\{s, t\}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen einige bemerkenswerte Eigenschaften aller Pfade (oder aller Pfade bis auf eine Menge von Wahrscheinlichkeit 0) der Brown'schen Bewegung erwähnen:

1. Die Pfade sind stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar.

2. Alle offenen Intervalle $]a, b[$ enthalten lokale Maxima (jedes Pfades).

3. Nullstellen sind nicht isoliert, d.h. für alle Pfade $t \mapsto W_t(\omega)$ und alle t mit $W_t(\omega) = 0$ gibt es eine Folge (t_i) mit $t_i \to t$ und $W_{t_i}(\omega) = 0$. Die Menge der Nullstellen umfaßt kein Intervall.

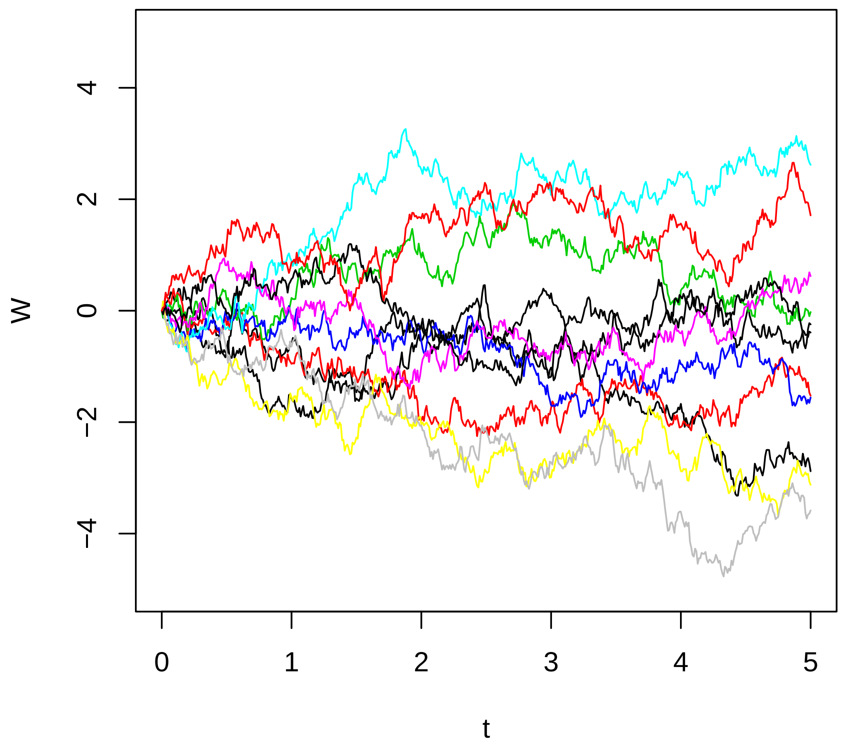

Abbildung 3.10: Pfade der Brown'schen Bewegung

3.11 BEISPIEL. Sei $(W_t)_{0 \le t < \infty}$ eine Brown'sche Bewegung und X_0 eine davon unabhängige Zufallsgröße. Ein Prozeß (X_t) mit $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$ heißt Brown'sche Bewegung mit **Driftkoeffizient** μ und **Diffusionskoeffizient** σ. (X_t) ist ein Prozeß mit stetigen Pfaden, die Zuwächse $X_{t_4} - X_{t_3}$ und $X_{t_2} - X_{t_1}$ sind für nichtüberlappende Intervalle $]t_1, t_2[$, $]t_3, t_4[$ unabhängig und $X_t - X_s \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$. □

3.12 BEISPIEL. Die Brown'sche Bewegung dient oft als Baustein bei der Konstruktion von stochastischen Modellen, analog zum kumulierten weißen Rauschen bei diskreter Zeit. Das wichtigste Beispiel in der Finanzmathematik ist die geometrische Brown'sche Bewegung. Im Black Scholes Modell zur Bewertung von Optionen wird angenommen, daß Aktienkurse geometrische Brown'sche Bewegungen sind.

Sei $(W_t)_{0 \le t < \infty}$ eine Brown'sche Bewegung und $S_0 > 0$ eine davon unabhängige Zufallsgröße. Ein Prozeß $(S_t)_{0 \le t < \infty}$ der Form

(3.5) $$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

heißt **geometrische Brown'sche Bewegung**.

Ist (S_t) eine geometrische Brown'sche Bewegung, dann ist $(\log S_t)$ eine Brown'sche Bewegung mit Drift.

(S_t) ist ein lognormalverteilter Prozeß mit stetigen Pfaden. Die relativen Zuwächse (Renditen) (zwischen u und t) sind

$$\begin{aligned} R_{u,t} &= \frac{S_t - S_u}{S_u} \\ &= \frac{S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} - S_0 e^{\mu u + \sigma W_u}}{S_0 e^{\mu u + \sigma W_u}} \\ &= e^{\mu(t-u) + \sigma(W_t - W_u)} - 1. \end{aligned}$$

R_{u_1,t_1} und R_{u_2,t_2} sind unabhängig, wenn $u_1 < t_1 \leq u_2 < t_2$. □

3.13 BEISPIEL. Sei eine geometrische Brown'sche Bewegung (S_t) durch (3.5) gegeben mit $S_0 = s_0 > 0$ konstant. Da $(\log S_t)$ eine Brown'sche Bewegung mit Drift ist, hängt das asymptotische Verhalten von (S_t) (für $t \to \infty$) vom Driftparameter μ ab:

Ist $\mu > 0$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\infty} P(\log S_t > x) = 1$ und damit ist für alle $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(S_t > x) = 1.$$

Ist $\mu < 0$, dann ist für alle $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(S_t < x) = 1.$$

Der Median von S_t ist

$$Q_{1/2} = s_0 e^{\mu t}.$$

Andererseits ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}[s_0 e^{\mu t + \sigma W_t}] \\ &= s_0 e^{\mu t} \mathbb{E}[e^{\sigma W_t}] \\ &= s_0 e^{\mu t} e^{\sigma^2 t/2} \\ &= s_0 e^{(\mu + \sigma^2/2)t}. \end{aligned}$$

Für

$$-\sigma^2/2 < \mu < 0$$

gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} S_t = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_t] = \infty.$$

□

Sei (X_t) eine Irrfahrt, eine geometrische Irrfahrt, Brown'sche Bewegung oder geometrische Brown'sche Bewegung. Dann ist (X_t) ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen oder unabhängigen relativen Zuwächsen. Sei $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Die unter $X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}$ bedingte Verteilung von X_{t_n} hängt dann nur von $X_{t_{n-1}}$ ab. Prozesse mit dieser Eigenschaft werden **Markovprozesse** genannt. Sie haben eine einfache Struktur. Ihre Verteilung ist durch die Verteilung des Startwerts X_0 und die **Übergangswahrscheinlichkeiten**, d.h. die bedingten Verteilungen von $X_t \mid X_s$ für $s < t$ festgelegt. Insbesondere gilt für alle $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$\mathbb{E}[X_{t_n} \mid X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}] = \mathbb{E}[X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}}].$$

3.4 Aufgaben

AUFGABE 3.1. X_t sei der Wert einer Investition zum Zeitpunkt t (in 1000 GE). (X_t) sei eine Brown'sche Bewegung mit Drift $\mu = 1$, $\sigma^2 = 12$ und $X_0 = 4$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert der Investition nach einem halben Jahr negativ ist? Zu welchem Zeitpunkt ist die Wahrscheinlichkeit eines negativen Werts maximal und wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

AUFGABE 3.2. X_t sei der Wert einer Investition zum Zeitpunkt t (in 1000 GE). (X_t) sei eine Brown'sche Bewegung mit Drift $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 12$. Wie groß muß X_0 mindestens sein, damit $P(X_1 < 0) < 0.05$?

AUFGABE 3.3. Sei (W_t) eine Brown'sche Bewegung. Man zeige, daß die folgenden Prozesse ebenfalls Brown'sche Bewegungen sind:

1. Sei $c \neq 0$ und $\tilde{W}_t = cW_{t/c^2}$ (Zeittransformation).
2. Sei $h > 0$ und $(\tilde{W}_t) = (W_{t+h} - W_h)$. $(\tilde{W}_t)$ ist die in W_h neu gestartete Brown'sche Bewegung.
3. Sei $\tau > 0$ und $\tilde{W}_t = W_t$ falls $t \leq \tau$ und $\tilde{W}_t = 2W_\tau - W_t$ falls $t > \tau$. $(\tilde{W}_t)$ ist die an $w = W_\tau$ reflektierte Brown'sche Bewegung.

AUFGABE 3.4. Berechnen Sie für den CRR-Prozeß aus Beispiel 3.10 den erwarteten Barwert der Putoption mit Ausübungszeitpunkt $T = 3$ und Ausübungspreis $K = 110$.

AUFGABE 3.5. Sei (S_t) ein CRR-Prozeß mit $P(S_{t+1} = S_tU)$ =p, $P(S_{t+1} = S_tD) = 1 - p$, $U = 1.025$, $D = 0.97$, $p = 0.6$, $S_0 = 100$, und nominellem Zinssatz 0.1/50. Berechnen Sie die erwarteten Barwerte einer Calloption und einer Putotion mit Ausübungspreis $K = 110$ und Ausübungszeitpunkt $T = 50$.
Wie groß ist für die beiden Optionen (jeweils) die Wahrscheinlichkeit, daß sie im Geld sind.

AUFGABE 3.6. Man zeige, daß jeder Prozeß (X_t) mit stetigen Pfaden eine Brown'sche Bewegung ist, wenn alle X_t gemeinsam normalverteilt mit $\mathbb{E}[X_t] = 0$ sind, $X_0 = 0$ und $\mathbb{C}ov[X_s, X_t] = \min\{s,t\}$.

AUFGABE 3.7. Man zeige, daß die Korrelation der Brown'sche Bewegung (W_t) gleich $\mathbb{C}or[W_s, W_t] = \sqrt{\min\{s,t\}/\max\{s,t\}}$ ist.

AUFGABE 3.8. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.3$. C_T bezeichne die Auszahlungsfunktion einer Calloption mit Ausübungspreis $K = 100$. Schätzen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[C_T]$ und $P(C_T > 0)$ für $T = 1$ und $T = 5$ mittels Monte Carlo-Simulation.

AUFGABE 3.9. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.3$. P_T bezeichne die Auszahlungsfunktion einer Putoption mit Ausübungspreis $K = 100$. Schätzen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[P_T]$ und $P(P_T > 0)$ für $T = 1$ und $T = 5$ mittels Monte Carlo-Simulation.

AUFGABE 3.10. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.3$. Sei $M_T = \max_{t \le T} S_t$. Eine Option sei durch die Auszahlungsfunktion $C_T = (M_T - 100)_+$ definiert. Schätzen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[C_T]$ und $P(C_T > 0)$ für $T = 1$ und $T = 5$ mittels Monte Carlo-Simulation.

AUFGABE 3.11. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.3$. Sei $M_T = \min_{t \le T} S_t$. Eine Option sei durch die Auszahlungsfunktion $P_T = (100 - M_T)_+$ definiert. Schätzen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[P_T]$ und $P(P_T > 0)$ für $T = 1$ und $T = 5$ mittels Monte Carlo-Simulation.

AUFGABE 3.12. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.3$. Sei $M_T = \max_{t \le T} S_t$ und B eine Barrieroption mit $B_T = (S_T - K)_+ I_{\{M_T \le \tilde{K}\}}$, wobei $K = 100$ und $\tilde{K} = 140$. Schätzen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[B_T]$ und $P(B_T > 0)$ für $T = 1$ und $T = 5$ mittels Monte Carlo-Simulation.

AUFGABE 3.13. Die Kurs zweier Aktien S^1 und S^2 seien unabhängige geometrische Brown'sche Bewegungen mit $\mu_1 = -0.12$, $\sigma_1^2 = 0.3$, $\mu_2 = -0.17$ und $\sigma_2^2 = 0.4$. Weiters seien $S_0^1 = 1000$ und $S_0^2 = 1000$, der nominelle Zinssatz sei 3%.
Die Option, Aktie S^1 durch Aktie S^2 zu tauschen, besitzt die Auszahlungsfunktion $(S_T^1 - S_T^2)_+$. Man bestimme durch Simulation die Verteilung der Auszahlungsfunktion und den erwarteten Barwert $(T = 1)$.

AUFGABE 3.14. Eine asiatische Option ist ein Kontrakt, dessen Auszahlungsfunktion vom Durchschnitt $\bar{S}_T = \int_0^T S_t dt/T$ abhängt. Sei $C_T = (S_T - \bar{S}_T)_+$, d.h. C ist die Auszahlungsfunktion einer Option, die dem Käufer gestattet, zum Zeitpunkt N die Aktie zu ihrem Durchschnittswert

$\bar{S}_T$ zu erwerben. Man versuche, $P(C_T > 0)$ und den erwarteten Barwert zu schätzen. (S_t) sei eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $\mu = -0.15$, $\sigma^2 = 0.4$ und nominellem Zinssatz 5%. Der Ausübungszeitpunkt der Option sei $T = 1$.

AUFGABE 3.15. Sei (S_t) eine geometrische Brown'sche Bewegung und $s < t$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s]$ für $f(x) = I_{\{x>K\}}$.

AUFGABE 3.16. Sei (S_t) eine geometrische Brown'sche Bewegung und $s < t$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s]$ für $f(x) = (x - K)_+$.

Kapitel 4

Martingal

Inhalt: Martingal, selbstfinanzierende Strategie.

4.1 Martingal

Seien $(Y_n)_{n=0}^N$ und $(X_n)_{n=0}^N$ stochastische Prozesse. Der Prozeß $(X_n)_{n=0}^N$ ist ein **Martingal** bezüglich $(Y_n)_{n=0}^N$, wenn für alle $n = 0, 1, \ldots$, $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ und

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] = X_n. \tag{4.1}$$

Wir interpretieren $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ als Information, die zum Zeitpunkt n zur Verfügung steht. In wichtigen Fällen sind die Prozesse (X_n) und (Y_n) ident. Wenn der Prozeß (Y_n) nicht angegeben ist, unterstellen wir immer $(X_n) = (Y_n)$.

4.1 BEISPIEL. Sei (X_n) ein Prozeß mit unabhängigen zentrierten Zuwächsen Z_n. Sei $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{E}[|X_n|] \le \mathbb{E}[|X_0|] + \mathbb{E}[|Z_1|] + \cdots + \mathbb{E}[|Z_n|] < \infty$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] &= \mathbb{E}[X_n + Z_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] \\
&= \mathbb{E}[X_n \mid X_0, \ldots, X_n] + \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] \\
&= X_n + \mathbb{E}[Z_{n+1}] \\
&= X_n + 0 \\
&= X_n,
\end{aligned}$$

d.h. (X_n) ist ein Martingal.

$\square$

4.2 BEISPIEL. Sei (X_n) eine geometrische Irrfahrt mit $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$. Die Faktoren Z_n seien integrierbar mit $\mathbb{E}[Z_n] = 1$. Dann ist

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|X_0|]\mathbb{E}[|Z_1|] \cdots \mathbb{E}[|Z_n|] < \infty$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[X_n Z_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n] \\ &= X_n \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_0, \dots, X_n] \\ &= X_n \mathbb{E}[Z_{n+1}] \\ &= X_n. \end{aligned}$$

(X_n) ist ein Martingal. $\square$

4.3 BEISPIEL. Sei ein CRR-Modell mit $P(S_t/S_{t-1} = U) = p = 1 - P(S_t/S_{n-1} = D)$ und $B_t = e^{rt}$ gegeben. Wir wollen untersuchen, wann $(\tilde{S}_t)$ ein Martingal ist.
Es ist

$$\tilde{S}_t = S_0 Z_1 Z_2 \cdots Z_t$$

mit unabhängigen Z_i, die die Werte $\tilde{U} = Ue^{-r}$ und $\tilde{D} = De^{-r}$ mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ annehmen. $(\tilde{S}_t)$ ist ein Martingal, wenn

$$\mathbb{E}[Z_i] = 1.$$

Aus

$$\mathbb{E}[Z_i] = p\tilde{U} + (1 - p)\tilde{D}$$

folgt

$$1 = p\tilde{U} + (1 - p)\tilde{D},$$

d.h.

$$p = \frac{1 - \tilde{D}}{\tilde{U} - \tilde{D}}.$$

$\square$

4.4 BEISPIEL. Sei $(Z_n)_{n=1}^N$ eine Folge von unabhängigen integrierbaren Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Folge von meßbaren Funktionen, sodaß für alle $n \geq 1$

$$f_n(Z_0, \dots, Z_{n-1}) Z_n$$

integrierbar ist. Weiters sei $X_0 = Z_0$ integrierbar. Definiert man für $n \geq 1$, X_n durch

$$X_n = X_{n-1} + f_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) Z_n,$$

dann ist (X_n) ein Martingal, da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n \mid X_0, \ldots, X_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_{n-1} + f_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) Z_n \mid X_0, \ldots, X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + f_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \mathbb{E}[Z_n \mid X_0, \ldots, X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + f_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \mathbb{E}[Z_n] \\
&= X_{n-1} + f_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \times 0 \\
&= X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel enthält Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen, z.B. Irrfahrten, als Spezialfälle (dann ist $f(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = 1$). Im allgemeinen Fall kann z.B. die Varianz der Zuwächse von der Vergangenheit abhängen. □

In stetiger Zeit ist die Definition des Martingals etwas subtiler. Seien $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ stochastische Prozesse. Der Prozeß $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein Martingal bezüglich $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$, wenn für alle $0 \leq s < t$, alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s_1 < \cdots < s_n < s$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ und

$$\mathbb{E}[X_t \mid Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_n}, Y_s] = X_s. \tag{4.2}$$

4.5 BEISPIEL. Prozesse mit unabhängigen und zentrierten Zuwächsen sind Martingale, wenn sie endliche Erwartungswerte besitzen. Insbesondere ist die Brown'sche Bewegung ein Martingal. □

4.6 BEISPIEL. Die geometrische Brown'sche Bewegung

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t},$$

$S_0 = s_0 > 0$ konstant, ist ein Martingal, wenn

$$\mu = -\sigma^2/2.$$

(S_t) ist ein Markovprozeß. Es gilt für $s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t \mid S_{s_1}, \ldots, S_{s_n}, S_s] &= \mathbb{E}[S_t \mid S_s] \\
&= \mathbb{E}[s_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \mid S_s] \\
&= s_0 e^{\mu t + \sigma W_s} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)} \mid S_s] \\
&= s_0 e^{\mu t + \sigma W_s} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] \\
&= s_0 e^{\mu t + \sigma W_s} e^{\sigma^2 (t-s)/2} \\
&= s_0 e^{\mu s + \sigma W_s} e^{(\mu + \sigma^2/2)(t-s)} \\
&= S_s e^{(\mu + \sigma^2/2)(t-s)}.
\end{aligned}$$

(S_t) ist also ein Martingal, wenn

$$e^{(\mu+\sigma^2/2)(t-s)} = 1,$$

d.h. wenn

$$\mu = -\sigma^2/2.$$

□

4.7 BEISPIEL. Prozesse können ein Martingal werden, wenn man einen geeigneten Trend abzieht. Sei z.B. (W_t) eine Brown'sche Bewegung. (W_t^2) ist kein Martingal (bezüglich (W_t)), weil für $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t^2 \mid W_s] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s + W_s)^2 \mid W_s] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 \mid W_s] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 \mid W_s] + \mathbb{E}[2(W_t - W_s)W_s \mid W_s] + \mathbb{E}[W_s^2 \mid W_s] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] + 2W_s\mathbb{E}[W_t - W_s \mid W_s] + W_s^2 \\
&= t - s + 2W_s \times 0 + W_s^2 \\
&= t - s + W_s^2.
\end{aligned}$$

Sei aber $X_t = W_t^2 - t$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t \mid W_s] &= \mathbb{E}[W_t^2 - t \mid W_s] \\
&= t - s + W_s^2 - t \\
&= W_s^2 - s \\
&= X_s.
\end{aligned}$$

□

4.2 Strategien

Viele Fragestellungen aus der Finanzmathematik verlangen die Konstruktion von Strategien, d.h. dynamischen Portfolios, mit gewissen Eigenschaften. Ein Derivat wird z.B. dupliziert, indem ein Portfolio aus Wertpapieren, die am Markt gehandelt werden, gebildet wird. Dieses Portfolio soll zu jedem Zeitpunkt den selben Wert wie das Derivat besitzen. Dazu müssen zu jedem Zeitpunkt die Anteile der Wertpapiere, die das Portfolio bilden, neu bestimmt, das Portfolio muß also dynamisch umgeschichtet werden. Es ist einsichtig, daß die Möglichkeit, solche duplizierende Portfolios bilden, von den verfügbaren Wertpapieren und der Information, die zu den Zeitpunkten, an denen gehandelt werden kann, zugänglich ist, abhängt. Insbesondere wird in die Konstruktion keine erst in der Zukunft erhältliche Information einfließen können.

Das Modell besteht aus endlich vielen stochastischen Wertpapieren $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^m$, von denen eines der Bankkontoprozeß ist. Der Prozeß $Y_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^m)$ liefert die Information, die zur Konstruktion von Strategien verwendet werden kann. Im einfachsten Fall besteht das Modell aus nur einem Wertpapier (S_t) und einem deterministischen Wertpapierprozeß, es ist dann $(Y_t) = (S_t)$.
Ein Prozeß (X_t) ist **adaptiert**, falls für alle $t \in [0,T]$, X_t eine Funktion von $(Y_s)_{s \leq t}$ ist.
Im zeitdiskreten Fall heißt das, daß es Funktionen g_t gibt mit $X_t = g_t(Y_0, Y_1, \ldots, Y_t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$.
Ein zeitdiskreter Prozeß $(X_n)_{t=0}^T$ ist **vorhersehbar** falls für alle t, X_t eine Funktion von $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{t-1}$ ist.
Wichtige Beispiele für vorhersehbare Prozesse sind **Strategien** (φ_t), d.h. die Gewichte von dynamischen Portfolios. Wir beschränken uns in der Folge auf einen Markt mit einem einzigen stochastischen Wertpapier (S_t).
Der **Wert** des Portfolios zum Zeitpunkt t ist

$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t.$$

Eine Handelsstrategie, bei der mit Ausnahme vom Zeitpunkt $t = 0$, Geld weder entnommen noch zugeschossen wird, d.h. für die zu allen Zeitpunkten t

$$\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t = \varphi_{t+1}^0 B_t + \varphi_{t+1}^1 S_t$$

gilt, heißt **selbstfinanzierend**.
Für einen zeitdiskreten Prozeß $(X_t)_{t=0}^T$ ist $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ und $(\Delta X_t) = (X_t - X_{t-1})_{t=1}^T$ der Prozeß der Differenzen.

4.8 PROPOSITION. *Eine Handelsstrategie $\varphi = (\varphi_t)_{t=0}^T$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn für alle $1 \leq t \leq N$*

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \sum_{i=1}^{t} \varphi_i^1 \Delta \tilde{S}_i. \tag{4.3}$$

BEGRÜNDUNG. Die Aussage, daß φ selbstfinanzierend ist, d.h. daß

$$\varphi_{t-1}^0 B_{t-1} + \varphi_{t-1}^1 S_{t-1} = \varphi_t^0 B_{t-1} + \varphi_t^1 S_{t-1}$$

gilt, ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_t(\varphi) - \tilde{V}_{t-1}(\varphi) \\ = \quad & (\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t)/B_t - (\varphi_{t-1}^0 B_{t-1} + \varphi_{t-1}^1 S_{t-1})/B_{t-1} \\ = \quad & (\varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t)/B_t - (\varphi_t^0 B_{t-1} + \varphi_t^1 S_{t-1})/B_{t-1} \\ = \quad & \varphi_t^0 (B_t/B_t - B_{t-1}/B_{t-1}) + \varphi_t^1 (S_t/B_t - S_{t-1}/B_{t-1}) \\ = \quad & \varphi_t^1 \Delta \tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Aus

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \sum_{i=1}^{t}(\tilde{V}_i(\varphi) - \tilde{V}_{i-1}(\varphi)),$$

folgt, daß φ genau dann selbstfinanzierend ist, wenn (4.3) erfüllt ist. □

Eine selbstfinanzierende Strategie φ ist durch ihren Anfangswert $V_0(\varphi)$ und durch die Komponenten, die in die Aktie investiert werden, $\varphi_t^1, 1 \le t \le N$ eindeutig festgelegt. Zu jedem Zeitpunkt t wird der Wert $V_t(\varphi)$ neu in das risikobehaftete Wertpapier und in B_t veranlagt. Ist der Anteil $\varphi_{t+1}^1 S_n$, festgelegt, so geht der Rest auf das Bankkonto. Dieser Anteil φ_{t+1}^0 ist zum Zeitpunkt t bekannt.

4.9 PROPOSITION. *Ist $(\tilde{S}_t)_{t=0}^T$ ein Martingal, dann ist für jede selbstfinanzierende Strategie $\varphi = (\varphi_t)_{t=0}^T$ auch $(\tilde{V}_t(\varphi)_{t=0}^T)$ ein Martingal.*

BEGRÜNDUNG. Da $(\tilde{S}_t)_{t=0}^N$ ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1} \mid Y_0, \ldots, Y_{t-1}] = 0.$$

(φ_t) ist vorhersehbar, daher ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{V}_t(\varphi) - \tilde{V}_{t-1}(\varphi) \mid Y_0, \ldots, Y_{t-1}] &= \mathbb{E}[\varphi_t^1(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) \mid Y_0, \ldots, Y_{t-1}] \\
&= \varphi_t^1 \mathbb{E}[\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1} \mid Y_0, \ldots, Y_{t-1}] \\
&= \varphi_t^1 \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

4.3 Aufgaben

AUFGABE 4.1. Sei (X_t) ein Martingal. Man zeige, daß für alle $t \ge 0$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$.

AUFGABE 4.2. Man zeige, daß ein deterministisches Martingal (d.h. $X_t = f(t)$ für eine Funktion f) konstant ist.

AUFGABE 4.3. Sei (X_t) ein (zu (Y_t)) adaptierter Prozeß, d.h. für alle t ist X_t eine Funktion von $(Y_s)_{0 \le s \le t}$. Man zeige, daß (X_t) genau dann ein Martingal ist, wenn für alle $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s < t$, $\mathbb{E}[X_t - X_s \mid Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_n}, Y_s] = 0$.

AUFGABE 4.4. Sei $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ein Martingal mit $X_0 = 0$. Man zeige, daß

$$\mathbb{V}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i - X_{i-1}].$$

AUFGABE 4.5. Sei (X_n) eine Irrfahrt, deren Zuwächse $Z_n = X_n - X_{n-1}$

$$P(Z_n = 1) = p = 1 - P(Z_n = -1)$$

erfüllen. Man zeige, daß

$$((1-p)/p)^{X_n})$$

ein Martingal ist.

AUFGABE 4.6. Sei (X_n) eine Irrfahrt mit Zuwächsen $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Sei $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ und $\mathbb{V}[Z_n] = \sigma^2$. Man zeige, daß

$$(X_n^2 - n\sigma^2)$$

ein Martingal ist.

AUFGABE 4.7. Sei $(S_t)_{t=0}^T$ ein CRR-Prozeß mit $D < 1 < U$, τ definiert durch $\tau = T$ falls $S_t > S_{t-1}$ für alle $t \leq T$ gilt, und $\tau = \min\{t \mid S_t < S_{t-1}\}$ sonst. Man bestimme die Verteilung von τ.

Hinweis.

$$P(\tau > t) = P(S_1 > S_0, S_2 > S_1, \ldots, S_t > S_{t-1})$$

$$= P(S_1/S_0 = U)P(S_2/S_1 = U) \cdots P(S_t/S_{t-1} = U) = p^t.$$

Damit gilt für $1 \leq t < T$

$$P(\tau = t) = P(\tau > t-1) - P(\tau > t) = p^{t-1} - p^t = (1-p)p^{t-1}.$$

AUFGABE 4.8. Der Preis einer Aktie folge einem CRR-Prozeß. Ein Anleger kauft eine Aktie und behält sie, solange der Kurs steigt. Sobald der Kurs zum ersten Mal fällt, verkauft er und legt das Geld als Sparbuch an.

Man zeige, daß der Anleger eine selbstfinanzierende Strategie φ verfolgt und gebe die Verteilung von $V_T(\varphi)$ an. Vgl. Aufgabe 4.7.

Kapitel 5

Arbitragefreiheit

Inhalt: Maßtransformation, Arbitragefreiheit.

5.1 Charakterisierung

> Eine **Arbitragemöglichkeit** ist eine selbstfinanzierende Strategie φ mit $V_0(\varphi) = 0$, $V_T(\varphi) \geq 0$ und $P(V_T(\varphi) > 0) > 0$.

Die folgende Überlegung führt zum zentralen Ergebnis der Optionspreistheorie. Sei φ selbstfinanzierend. Es gilt

$$\tilde{V}_T(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \sum_{i=1}^{T}(\tilde{V}_i(\varphi) - \tilde{V}_{i-1}(\varphi)).$$

Nehmen wir an, $(\tilde{S}_t)$ ist ein Martingal. Dann ist auch $(\tilde{V}_t(\varphi))$ ein Martingal. Es folgt

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_T(\varphi)] = \mathbb{E}[\tilde{V}_0(\varphi)] = \tilde{V}_0(\varphi) = V_0(\varphi).$$

Dann kann φ aber keine Arbitragemöglichkeit darstellen: $V_0(\varphi) = 0$ impliziert $\mathbb{E}[\tilde{V}_T(\varphi)] = 0$. Andererseits folgt aus $V_T(\varphi) \geq 0$ und $P(V_T(\varphi) > 0) > 0$

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_T(\varphi)] > 0.$$

Erwartungswert, bedingter Erwartungswert und damit die Martingaleigenschaft hängt von der Wahrscheinlichkeitsverteilung ab. Die Überlegung, daß das Modell arbitragefrei ist, wenn das diskontierte Wertpapier $(\tilde{S}_t)$ ein Martingal ist, bleibt natürlich schlüssig, wenn $(\tilde{S}_t)$ unter irgendeiner Verteilung Q ein Martingal ist, solange $P(V_T(\varphi) > 0) > 0$ genau dann gilt, wenn $Q(V_T(\varphi) > 0) > 0$.

Zwei Verteilungen P und Q heißen **äquivalent**, $P \sim Q$, wenn für alle Ereignisse A, $P(A) = 0$ genau dann gilt, wenn $Q(A) = 0$. Stimmen die Nullmengen überein, dann stimmen auch die Ereignisse mit positiven Wahrscheinlichkeiten überein.

5.1 SATZ. Erster Fundamentalsatz der Finanzmathematik. *Ein zeitdiskreter Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es eine zur physischen Verteilung P äquivalente Verteilung Q gibt, unter der die diskontierten Wertpapierprozesse $(\tilde{S}_t^k)$ Martingale sind.*

Unsere Überlegungen stellen die einfachere Hälfte des Beweises dar (Arbitragefreiheit, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert). Der schwierigere Teil, die Existenz des äquivalenten Martingalmasses bei Arbitragefreiheit, verwendet sehr anspruchsvolle mathematische Werkzeuge.
Der Satz beinhaltet folgende Schritte zur Berechnung von Derivaten.

1. Es sei ein Markt, bestehend aus einem Aktienkurs (S_t) und einem Bankkontoprozeß (B_t) gegeben. P sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Stochastik des Marktes steuert.

2. Ein Derivat (vom europäischen Typ) sei zu bewerten. Es sei durch die Auszahlungsfunktion h definiert, d.h. zum Ausübungszeitpunkt T sei h der Wert der Option. Wie lautet der Wert V_t? Ist er eindeutig?

3. Man bestimmt
$$\mathcal{Q} = \{Q \mid Q \sim P, (\tilde{S}_t) \text{ ist ein } Q - \text{Martingal}\}$$

4. $\mathcal{Q} = \emptyset$, dann ist der Markt nicht arbitragefrei.

5. Ist $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, dann ist der Markt arbitragefrei. Für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ ist
$$V_0^Q = \mathbb{E}^Q[\tilde{h}]$$
ein Preis des Derivats, bei dem der Markt arbitragefrei bleibt. Der Preis ist eindeutig, wenn $\mathbb{E}^Q[\tilde{h}]$ nicht von Q abhängt. Sonst gibt es ein Intervall $[V_*, V^*]$, sodaß das Modell Arbitrage zuläßt, wenn der Preis V_0 kleiner als V_* oder größer als V^* gewählt wird. Für $V_* < V_0 < V^*$ bleibt das Modell arbitragefrei.

6. Für $0 \leq t \leq T$ haben arbitragefreie Preise die Form
$$\tilde{V}_t^Q = \mathbb{E}^Q[\tilde{h}]$$
für ein $Q \in \mathcal{Q}$.

7. Werden mehrere Derivate mit Payoffs $h_1, \ldots, h_m$ bewertet, dann muß ein äquivalentes Martingalmaß Q gewählt und
$$\mathbb{E}^Q[\tilde{h}_i]$$
ist der diskontierte Preis des i-ten Derivats.

5.2 CRR-Modell

Wir wollen diese Schritte im Rahmen des CRR-Modells erörtern.
Es sei also ein CRR-Modell gegeben, es gelte $P(S_t/S_{t-1} = U) = p = 1 - P(S_t/S_{n-1} = D)$ und $B_t = e^{rt}$ für $t = 1, \ldots, T$. p mit $0 < p < 1$ definiert das physische Maß.
Zuerst müssen alle äquivalenten Martingalmaße Q gefunden werden. Es gibt 2^T Pfade (S_t) mit positiver Wahrscheinlichkeit und zwar alle, die in S_0 starten und die Bedingung
$$\frac{S_t}{S_{t-1}} \in \{U, D\}$$
erfüllen. Daher müssen auch unter Q genau diese Pfade eine positive Wahrscheinlichkeit haben.
Sei
$$q = Q(S_t/S_{t-1} = U \mid S_1, \ldots, S_{t-1}).$$
Es ist $0 < q < 1$, $\tilde{U} = Ue^{-r}$, $\tilde{D} = De^{-r}$ und
$$\tilde{S}_{t-1} = \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_t \mid \tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}\left(q\tilde{U} + (1-q)\tilde{D}\right),$$
woraus (vgl. Beispiel 4.3)
$$1 = q\tilde{U} + (1-q)\tilde{D}$$
und

(5.1)
$$q = \frac{1 - \tilde{D}}{\tilde{U} - \tilde{D}}$$
folgt. q hängt nicht von $S_1, \ldots, S_{t-1}$ ab, $(\tilde{S}_t)$ und (S_t) sind wieder CRR-Prozesse unter Q.
$$0 < q < 1$$
ist äquivalent mit $\tilde{D} < 1 < \tilde{U}$ und $D < e^r < U$. Wir fassen zusammen:

1. Das CRR-Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn
$$D < e^r < U.$$

2. In diesem Fall ist das Martingalmaß eindeutig und durch (5.1) gegeben.

3. Unter Q ist (S_t) ebenfalls ein CRR-Prozeß.

5.2 BEISPIEL. Das Martingalmaß Q hängt nur von den Sprüngen U und D, nicht aber von p ab. Daher sind Optionspreise ebenfalls unabhängig von p und allen damit verbundenen Wahrscheinlichkeiten, wie z.B. der Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.
Sei $U = 1.21$, $D = 0.99$, $e^r = 1.1$, sei $S_0 = 100$ und $K = 220$ der Strikepreis der Calloption, die in $T = 5$ fällig wird. Die Option wird nur dann ausgeübt, wenn der Kurs nie fällt, da

$$100 \times 1.21^4 \times 0.99 = 212.22 < K.$$

Es ist $\tilde{U} = 1.21/1.1 = 1.1$, $\tilde{D} = 0.99/1.1 = 0.9$ und

$$q = \frac{1 - 0.9}{1.1 - 0.9} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}.$$

Der Preis der Option ist

$$C_0 = q^5 e^{-Tr}(S_0 U^5 - K) = 0.764.$$

Sei $P(S_t/S_{t-1} = U) = p$. Ist $p = 0.01$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option ausgeübt wird, $p^5 = 10^{-10}$. $p = 0.99$ ergibt $p^5 = 0.951$. □

Zur Berechnung der bedingten Erwartungswerte

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^Q[\tilde{h} \mid S_1, \dots, S_t] = \mathbb{E}^Q[\tilde{h} \mid S_t]$$

können verschiedene Methoden gewählt werden. Die erste, die die Baumstruktur des CRR-Prozesses ausnutzt, haben wir in Beispiel 3.10 kennengelernt. Sie kann für Bäume kleiner und mittlerer Tiefe für Optionen, deren Payoff nur vom Underlying S_T zum Ausübungszeitpunkt abhängt, $h = h(S_T)$, eingesetzt werden.
Die zweite Methode bietet sich bei großer Tiefe T und Payoff der Form $h = h(S_T)$ an. Wir wollen sie für Calloptionen erklären.
Sei $h = (S_T - K)_+$ die Auszahlungsfunktion einer europäischen Calloption, $C_t(T, K, S_t)$ bezeichne den Preis der Option zum Zeitpunkt t.

$$\begin{aligned} C_t(T, K, S_t) &= \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mid S_t] \\ &= \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} e^{-r(T-t)} (S_t U^i D^{T-t-i} - K)_+. \end{aligned}$$

$(S_t U^i D^{T-t-i} - K)_+$ ist 0, falls $S_t U^i D^{T-t-i} \le K$, d.h. falls $(U/D)^i \le K/(S_t D^{T-t})$ und damit falls

$$i \le \frac{\log(K/S_t) - (T-t)\log D}{\log(U/D)}. \tag{5.2}$$

Anderenfalls ist $(S_t U^i D^{T-t-i} - K)_+ = S_t U^i D^{T-t-i} - K$. Sei

$$i_t = \left[\frac{\log(K/S_t) - (T-t)\log D}{\log(U/D)}\right] \tag{5.3}$$

der ganzzahlige Anteil der rechten Seite von (5.2) und

$$\tilde{q} = \tilde{U} q.$$

Dann ist

$$1 - \tilde{q} = \tilde{D}(1-q).$$

Mit $B(.;q,m)$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit Parameter q und m. $1 - B(.;q,m)$ kürzen wir mit $\bar{B}(.;q,m)$ ab. Dann ist

$$\begin{aligned}
C_t(T,K,S_t) &= \sum_{i=i_t+1}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} e^{-r(T-t)} (S_t U^i D^{T-t-i} - K) \\
&= S_t \sum_{i=i_t+1}^{T-t} \binom{T-t}{i} (\tilde{U}q)^i (\tilde{D}(1-q))^{T-t-i} - e^{-r(T-t)} K \sum_{i=i_t+1}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} \\
&= S_t \sum_{i=i_t+1}^{T-t} \binom{T-t}{i} (\tilde{q})^i (1-\tilde{q})^{T-t-i} - e^{-r(T-t)} K \sum_{i=i_t+1}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} \\
&= S_t \bar{B}(i_t;\tilde{q},T-t) - e^{-r(T-t)} K \bar{B}(i_t;q,T-t).
\end{aligned}$$

5.3 BEISPIEL. Der nominelle Zinssatz sei 12% pro Jahr. Der Aktienkurs ist $S_0 = 100$. Er macht pro Monat Sprünge $U = 1.02$ oder $D = 1$. Man berechne den Preis einer Calloption mit $T = 36$ Monate und $K = 150$.

```
> r<-0.01
> U<-1.02
> D<-1
> K<-150
> S0<-100
> B1<-exp(r)
> Ut<-U/B1
> Dt<-D/B1
> q<-(1-Dt)/(Ut-Dt)
> qt<-q*Ut
> it<-floor((log(K/S0)-T*log(D))/log(U/D))
> it
[1] 20
```

```
> C<-S0*(1-pbinom(it,T,qt))-exp(-T*r)*K*(1-pbinom(it,T,q))
> C
[1] 0.7852354
```

□

Die dritte Methode, Erwartungswerte und Optionspreise zu berechnen, ist die Monte Carlo Simulation.

5.4 BEISPIEL. Eine Look-Back-Option ist ein Kontrakt, dessen Auszahlungsfunktion vom gesamten Pfad $S_1, \ldots, S_T$ abhängt. Sei ein CRR-Prozeß $S_0 = 100$, $U = 1.01$, $D = 0.99$, $p = 0.55$, $T = 20$, $r = 0.05/T$ gegeben. Wir definieren M durch die Auszahlungsfunktion $C_T = \max\{(S_1 - 105)_+, \ldots, (S_T - 105)_+\}$. Man schätze den Preis C_0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.

```
> U<-1.01
> D<-0.99
> T<-20
> r<-0.05/T
> B1<-exp(r)
> B1
[1] 1.002503
> S0<-100
> K<-105
> p<-0.55
> Ut<-U/B1
> Dt<-D/B1
> q<-(1-Dt)/(Ut-Dt)
> q
[1] 0.6251564
> t<-1:T
> B<-exp(r*T)                              # Bankkonto

> N<-10000
> C<-1:N
```

```
# Preis:

> for(i in 1:N){ ii<-cumsum(rbinom(T,1,q)) # Spruenge
+ S<-S0*(U^ii)*(D^(t-ii))                   # Kurs
+ Cplus<-apply(rbind(S-105,0),2,max)        #(S-105)_+
+ C[i]<-max(Cplus/B)}

> C0<-mean(C)
> C0
[1] 2.180091
> c(C0-2*sqrt(var(C)/N),C0+2*sqrt(var(C)/N))
[1] 2.126654 2.233527

# P(Option im Geld):

> for(i in 1:N){ ii<-cumsum(rbinom(T,1,p)) # Wahrsch. unter p
+ S<-S0*(U^ii)*(D^(t-ii))
+ Cplus<-apply(rbind(S-105,0),2,max)
+ C[i]<-max(Cplus/B)}

> ig<-mean((C>0))
> ig
[1] 0.4155
> c(ig-2*sqrt(ig*(1-ig)/N),ig+2*sqrt(ig*(1-ig)/N))
[1] 0.4056438 0.4253562
```

□

Zeitdiskrete Modelle besitzen in der Regel mehr als ein Martingalmaß.

5.5 BEISPIEL. Ein (geometrischer) **Trinomialprozeß** (S_t) ist eine geometrische Irrfahrt, bei der die Faktoren $Z_t = S_t/S_{t-1}$ drei Werte $D < M < U$ mit den Wahrscheinlichkeiten p_U, p_M, p_U annehmen. Werden z.B. für einen CRR-Prozeß nur die geraden Zeitpunkte beobachtet, entsteht ein Trinomialprozess. Der Trinomialprozeß ist ein Martingal unter einer Verteilung Q, der die Wahrscheinlichkeiten $q_D = q_D(S_1, \ldots, S_{t-1})$, $q_M = q_M(S_1, \ldots, S_{t-1})$, $q_U = q_U(S_1, \ldots, S_{t-1})$ ent-

sprechen. Dabei ist $q_D(S_1,\dots,S_{t-1}) = Q(S_t/S_{t-1} = D \mid S_1,\dots,S_{t-1})$, $q_M(S_1,\dots,S_{t-1}) = Q(S_t/S_{t-1} = M \mid S_1,\dots,S_{t-1})$, $q_U(S_1,\dots,S_{t-1}) = Q(S_t/S_{t-1} = U \mid S_1,\dots,S_{t-1})$.
Analog zum CRR-Prozeß erfüllen sie

$$\begin{aligned} q_U + q_M + q_D &= 1 \\ \mathbb{E}^Q[\tilde{S}_t/\tilde{S}_{t-1}] = \tilde{U}q_U + \tilde{M}q_M + \tilde{D}q_D &= 1 \\ q_D &> 0 \\ q_M &> 0 \\ q_U &> 0. \end{aligned}$$

Ist $D = 0.99, M = 1.1, U = 1.21$, $e^r = 1.1$, dann ist $\tilde{D} = 0.9$, $\tilde{M} = 1$ und $\tilde{U} = 1.1$. Als Lösung erhalten wir $q_U = q_D$, $q_M = 1 - 2q_D$ und $0 < q_D < 1/2$ beliebig. □

5.3 Aufgaben

AUFGABE 5.1. Sei (S_t) der Trinomialprozeß aus Beispiel 5.5 mit $S_0 = 100$. Berechnen Sie die arbitragefreien Preise einer Calloption mit Strikepreis $K = 120$ und Fälligkeit $T = 5$.

AUFGABE 5.2. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/3$, $B_0 = 1$, $B_1 = 1.1$, $B_2 = 1.2$, $S_0 = 2$, $S_1(\omega_1) = 2.2$, $S_1(\omega_2) = S_1(\omega_3) = 1.5$, $S_2(\omega_1) = 2.4$, $S_2(\omega_2) = 2.0$, $S_2(\omega_3) = 2.2$. Man zeige

1. Das Modell erlaubt Arbitrage.
2. Es gibt eine Verteilung Q, unter der $(\tilde{S}_t)_{t=0}^2$ ein Martingal ist.
3. Es gibt keine zu P äquivalente Verteilung Q, unter der $(\tilde{S}_t)_{t=0}^2$ ein Martingal ist.

AUFGABE 5.3. Seien X_0, $Z_1,\dots,Z_T$, $\epsilon_1,\dots,\epsilon_T$ unabhängig und beschränkt mit $\mathbb{E}[Z_t] = 0$, $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 1$. Sei $X_t = X_0 + \epsilon_1 Z_1 + \cdots + \epsilon_t Z_t$.
Man zeige, daß (X_t) ein Martingal bezüglich (X_t), nicht aber bezüglich $(Y_t) = ((X_t, Z_{t+1}))$ ist. Man diskutiere, ob Arbitragemöglichkeiten durch Vergrößerung der Informationsmenge entstehen können. Hinweis: Gilt z.B. $P(Z_t = 1) = P(Z_t = -1) = 1/2$ und $\epsilon_i \geq 0$, dann entspricht Z_t der Information ob der Preis steigt oder fällt.

AUFGABE 5.4. Sei $(S_t)_{t=0,1}$ ein Aktienkurse (Einperiodenmodell), $S_1 = S_0 e^{\mu - \sigma^2/2 + \sigma Z}$ mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.03$ und $Z \sim N(0,1)$. Die Varianz σ^2 sei stochastisch, $1/\sigma^2 \sim \Gamma(1,5)$. Es sei ein nomineller Zinssatz von 3% gegeben.

1. Berechnen Sie den/einen Preis einer Calloption auf die Aktie mit Ausübungspreis $K = 100$ und Ausübungszeitpunkt $T = 1$ und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.
2. Berechnen Sie den/einen Preis einer Putoption mit Ausübungspreis $K = 120$ und Ausübungszeitpunkt $T = 1$ und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.
3. Sei eine Binäroption gegeben. Sie zahlt eine Geldeinheit, falls $S_1 > K$ $(K = 100, T = 1)$. Berechnen Sie den/einen Preis und die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.

Versuchen Sie, die Genauigkeit und damit die Größe der Stichproben geeignet zu wählen, etwa $\pm 1\%$.

AUFGABE 5.5. Sei (S_t) ein CRR-Prozeß mit $P(S_{t+1} = S_t U) = p$, $P(S_{t+1} = S_t D) = 1 - p$, $U = 1.025$, $D = 0.97$, $p = 0.7$, $S_0 = 100$, und nominellem Zinssatz $0.1/50$. Berechnen Sie die Preise einer Calloption und einer Putotion mit Ausübungspreis $K = 110$ und Ausübungszeitpunkt $T = 50$.
Wie groß ist für die beiden Optionen (jeweils) die Wahrscheinlichkeit, daß sie im Geld sind.

AUFGABE 5.6. Sei ein CRR-Prozeß $S_0 = 100$, $U = 1.01$, $D = 0.99$, $p = 0.55$, $T = 20$, $r = 0.05/T$ gegeben. Wir definieren M durch $M_T = (\max\{S_1, S_2, \ldots, S_T\} - 105)_+$. Man schätze den Preis von C_T. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option nicht im Geld ist.

AUFGABE 5.7. Sei ein CRR-Prozeß $S_0 = 100$, $U = 1.01$, $D = 0.99$, $p = 0.55$, $T = 20$, $r = 0.05/T$ gegeben. Wir definieren P durch $P_T = (100 - \min\{S_1, S_2, \ldots, S_T\})_+$. Man schätze den Preis von P_T. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option nicht im Geld ist.

AUFGABE 5.8. Es seien (S_t) und (X_t) zwei Aktienkurse. Die Option, Aktie S durch Aktie X zu tauschen besitzt die Auszahlungsfunktion $(S_T - X_T)_+$. Unterstellen Sie für (S_t) und (X_t) zwei unabhängige CRR-Prozesse mit Parameter $U = 1.05$, $D = 0.99$, $p = 0.7$ bzw. $U = 1.1$, $D = 0.94$, $p = 0.6$, $e^r = 1.02$, $S_0 = X_0 = 100$ und $T = 10$. Ist das Martingalmaß eindeutig? Man bestimme durch Simulation einen bzw. den Preis.

AUFGABE 5.9. Eine asiatische Option ist ein Kontrakt, dessen Auszahlungsfunktion vom Durchschnitt $\bar{S}_T = (S_1 + \cdots + S_T)/T$ abhängt. Sei $A_T = (S_T - \bar{S}_T)_+$, d.h. A_T ist die Auszahlungsfunktion einer Option, die dem Käufer gestattet, zum Zeitpunkt T die Aktie zu ihrem Durchschnittswert $\bar{S}_T$ zu erwerben. Man schätze $P(A_T > 0)$ und den Preis der Option. Dabei setze man ein CRR-Modell mit $T = 20$, $U = 1.1$, $D = 1/U$, und $r = 0$ $p = 0.5$ voraus.

AUFGABE 5.10. Sei ein CRR-Prozeß (S_t) mit $S_0 = 100$, $U = 1.05$, $D = 0.975$, $r = 0.03$, $p = 0.55$, $T = 20$ gegeben. Wir definieren die Barrieroption B durch $B_T = (S_T - 105)_+$ falls

$S_t \leq 150$ für alle $i \leq T$ und $B_T = 0$ sonst. Man schätze den Preis von B_N. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Option im Geld ist.

Kapitel 6

Vollständigkeit

6.1 Duplizierendes Portfolio

In diesem Abschnitt soll die Bewertung von Derivaten in einem arbitragefreien zeitdiskreten Modell untersucht werden. Ein Derivat oder abgeleiteter Anspruch ist definiert durch einen Ausübungszeitpunkt T und eine nichtnegative Auszahlungsfunktion h, die Zahlung des Verkäufers des Kontrakts an den Käufer. Sie ist eine Funktion des Underlying $(S_t)_{t\leq T}$. Dabei sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Welche Derivate können dupliziert werden?
2. Wie kann eine Duplizierungsstrategie gefunden werden?
3. Welche Möglichkeiten gibt es zur Bewertung von Derivaten, die nicht dupliziert werden können?

Eine nichtnegative meßbare Zufallsgröße h ist **duplizierbar**, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ existiert mit

$$V_T(\varphi) = h.$$

Das Modell heißt **vollständig**, wenn alle meßbaren Zufallsgrößen h duplizierbar sind.

h muß keine Funktion von S_T sein, wie das bei Calloptionen oder Putoptionen der Fall ist. Die Derivate können von den Wertpapierprozessen auch zu anderen als dem Ausübungszeitpunkten

abhängen, wie z.B. Optionen vom asiatischen Typ $h = h(S_1 + \cdots + S_T)$ oder etwa Knockoutoptionen $h = (S_T - K)_+ I_{\{max_t S_t \leq B\}}$.
Man beachte, daß in einem arbitragefreien Markt der Wertprozeß einer selbstfinanzierenden Strategie φ, die h dupliziert, notwendigerweise nichtnegativ ist, denn für ein Martingalmaß Q ist

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_T(\varphi) \mid Y_1, \ldots, Y_t] = \mathbb{E}^Q[\tilde{h} \mid Y_1, \ldots, Y_t] \geq 0.$$

Eine duplizierbare Option besitzt immer einen eindeutigen Preis, den Wert des duplizierenden Portfolios. Nachdem Gesetz des einzigen Preises besitzt jedes duplizierende Portfolio den selben Wert. Aus

$$\tilde{h} = \tilde{V}_T(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{t=1}^{T} \varphi_t^1 \Delta \tilde{S}_t$$

folgt für alle Martingalmaße $Q \in \mathcal{Q}$,

$$V_0(\varphi) = \mathbb{E}^Q[\tilde{h}].$$

Daraus können folgende einfache, aber grundlegenden Schlüsse gezogen werden.

1. Ist h duplizierbar, dann hängt $\mathbb{E}^Q[\tilde{h}]$ nicht von der Wahl des Martingalmaßes Q ab.

2. Ist das Modell vollständig, dann muß das Martingalmaß Q eindeutig bestimmt sein, denn die Indikatorfunktion jedes Ereignisses in dem sich zwei Martingalmaße unterscheiden könnten, wäre nicht duplizierbar.

6.1 SATZ. Zweiter Fundamentalsatz der Finanzmathematik. *Sei ein arbitragefreier zeitdiskreter Markt mit deterministischem S_0 gegeben.*
Eine Option mit Payoff h ist genau dann duplizierbar, wenn $\mathbb{E}^Q[\tilde{h}]$ nicht von $Q \in \mathcal{Q}$ abhängt.
Der Markt ist genau dann vollständig, wenn das zu P äquivalente Martingalmaß Q eindeutig ist. Ist φ die h duplizierende Handelstrategie, dann ist für $0 \leq t \leq T$,

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \mathbb{E}^Q[\tilde{h} \mid Y_1, \ldots, Y_t].$$

Die Strategie φ, die ein Derivat dupliziert, kann berechnet werden, sobald der Preis V_t des Derivats in jedem Zeitpunkt t berechenbar ist. Wir werden an Hand des CRR-Modells vorführen, wie Preise und Strategie simultan berechnet werden.

Die Preise V_t sind Funktionen von S_t, $V_t = V_t(S_t)$. Zum Ausübungszeitpunkt ist $\tilde{V}_T(S_T) = \tilde{h}(S_T)$. In $t = T$ beginnend, werden aus $\tilde{V}_t(S_t) = \tilde{V}_t(US_{t-1})$ bzw. $\tilde{V}_t(S_t) = \tilde{V}_t(DS_{t-1})$ die diskontierten Preise $\tilde{V}_{t-1}(S_{t-1})$ und $\varphi_t^1(S_{t-1})$ berechnet.
$\tilde{V}_{t-1} = \tilde{V}_{t-1}(S_{t-1})$ und $\varphi_t^1 = \varphi_t^1(S_{t-1})$ erfüllen $\tilde{V}_{t-1} + \varphi_t \Delta \tilde{S}_t = \tilde{V}_t$, d.h. die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{t-1} + \varphi_t^1(\tilde{U}\tilde{S}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1}) &= \tilde{V}_t(US_{t-1}) \\
\tilde{V}_{t-1} + \varphi_t^1(\tilde{D}\tilde{S}_{t-1} - \tilde{S}_{t-1}) &= \tilde{V}_t(DS_{t-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{S}_{t-1}(\tilde{U}-1) \\ 1 & \tilde{S}_{t-1}(\tilde{D}-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{t-1} \\ \varphi_t^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_t(US_{t-1}) \\ \tilde{V}_t(DS_{t-1}) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{V}_{t-1} \\ \varphi_t^1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\tilde{S}_{t-1}(\tilde{D}-\tilde{U})} \begin{pmatrix} \tilde{S}_{t-1}(\tilde{D}-1) & -\tilde{S}_{t-1}(\tilde{U}-1) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_t(US_{t-1}) \\ \tilde{V}_t(DS_{t-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{U}-1}{\tilde{U}-\tilde{D}} \tilde{V}_t(DS_{t-1}) + \frac{1-\tilde{D}}{\tilde{U}-\tilde{D}} \tilde{V}_t(US_{t-1}) \\ \frac{\tilde{V}_t(US_{t-1}) - \tilde{V}_t(DS_{t-1})}{\tilde{S}_{t-1}\tilde{U} - \tilde{S}_{t-1}\tilde{D}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-q)\tilde{V}_t(DS_{t-1}) + q\tilde{V}_t(US_{t-1}) \\ \frac{\tilde{V}_t(US_{t-1}) - \tilde{V}_t(DS_{t-1})}{\tilde{S}_{t-1}\tilde{U} - \tilde{S}_{t-1}\tilde{D}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{t-1}(S_{t-1}) &= \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_t \mid S_{t-1}] = (1-q)\tilde{V}_t(DS_{t-1}) + q\tilde{V}_t(US_{t-1}) \\
\varphi_t^1(S_{t-1}) &= \frac{\Delta \tilde{V}_t}{\Delta \tilde{S}_t} = \frac{\tilde{V}_t(US_{t-1}) - \tilde{V}_t(DS_{t-1})}{\tilde{U}\tilde{S}_{t-1} - \tilde{D}\tilde{S}_{t-1}}.
\end{aligned}$$

6.2 BEISPIEL. (Putoption) Die Auszahlungsfunktion der europäischen Putoption ist $h(S_T) = (K - S_T)_+$. Wir bezeichnen mit $\varphi_\mathbf{t}$ und $P_t(T, K, S_t)$ die selbstfinanzierende Strategie, die h dupliziert, und den Wert der Putoption. Sei $C_t(T, K, S_t)$ der Wert der Calloption zum selben Ausübungszeitpunkt und mit dem selben Ausübungspreis K. Die Put-Call-Parität besagt, daß $P_t(T, K, S_t) = C_t(T, K, S_t) - S_t + e^{-r(T-t)}K$. Sei $i_t = i_t(S_t)$ durch (5.3) definiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
P_t(T, K, S_t) &= S_t \bar{B}(i_t; \tilde{q}, T-t) - e^{-r(T-t)} K \bar{B}(i_t; q, T-t) - S_t + e^{-r(T-t)} K \\
&= S_t(\bar{B}(i_t; \tilde{q}, T-t) - 1) - e^{-r(T-t)} K (\bar{B}(i_t; q, T-t) - 1) \\
&= e^{-r(T-t)} K B(i_r; q, T-t) - S_t B(i_r; \tilde{q}, T-t).
\end{aligned}$$

φ^1 wird durch

$$\varphi_t^1 = \frac{P_t(T, K, US_{t-1}) - P_t(T, K, DS_{t-1})}{S_{t-1}(U-D)}$$

berechnet. Man beachte: $\varphi_t^1 = -1$ falls $i_t(US_{t-1}) = T - t$. Das ist genau dann der Fall, wenn $S_{t-1}U^{T-t+1} \leq K$, d.h. falls die Option mit Sicherheit im Geld endet.

Die Abbildung 6.1 zeigt den Wert einer Putoption mit $K = 100$, $T = 7$, $S_0 = 100$, $U = 1.05$, $D = 0.9$ und $r = 0.03$. Die Abbildung 6.2 zeigt $-\varphi_n^1$.

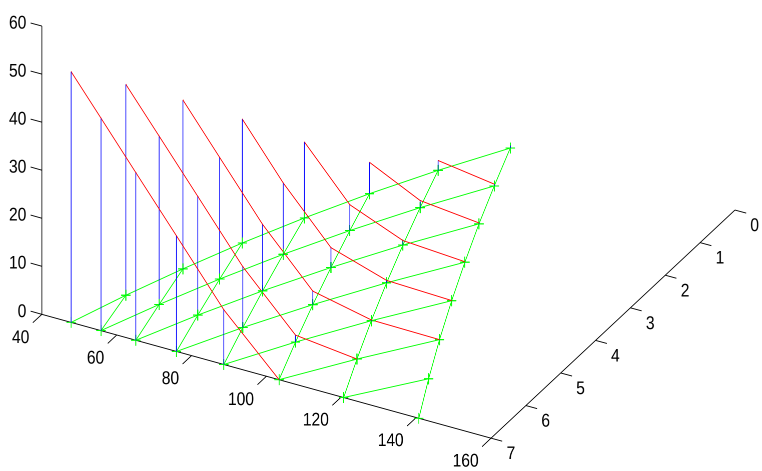

Abbildung 6.1: Wert der Putoption

□

6.3 BEISPIEL. Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen den Wert und die Handelsstrategie $(\varphi_t^1)_{t=1}^T$ einer Binäroption mit Auszahlungsfunktion $I_{\{S_T \geq 100\}}$. Dabei ist $S_0 = 100$, $U = 1.05$, $D = 0.9$, $r = 0.03$. Man beachte, daß φ_t^1 nur an Knoten "in der Nähe" von 100 ungleich 0 ist.

□

6.2 Aufgaben

AUFGABE 6.1. Sei $(S_t)_{t=0,1}$ ein Aktienkurse (Einperiodenmodell), $S_1 = S_0 e^{\mu - \sigma^2/2 + \sigma Z}$ mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.03$, $\sigma^2 = 0.4$ und $Z \sim N(0,1)$. Es sei ein nomineller Zinssatz von 3% gegeben. Ist das Modell vollständig? Wählen Sie einen Preis C_0 für eine Calloption mit $K = 100$, $T = 1$.
Schlagen Sie ein duplizierendes Portfolio φ vor und untersuchen Sie $C_1 - V_1(\varphi)$.

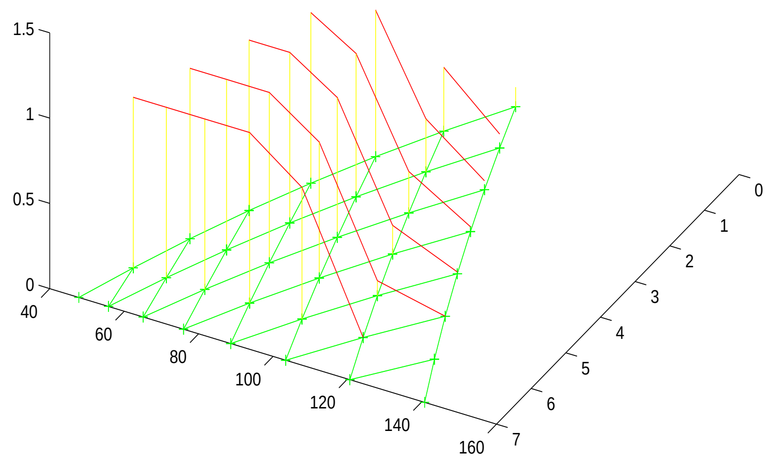

Abbildung 6.2: $-\varphi^1$, Putoption

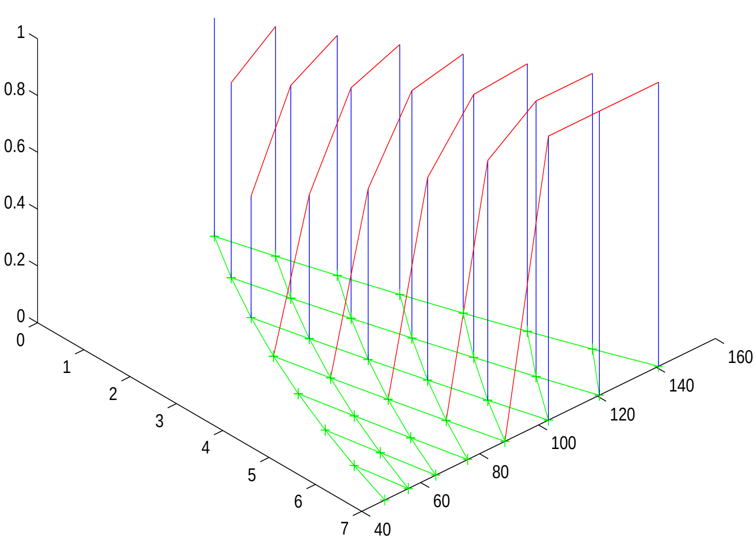

Abbildung 6.3: Wert einer Binäroption

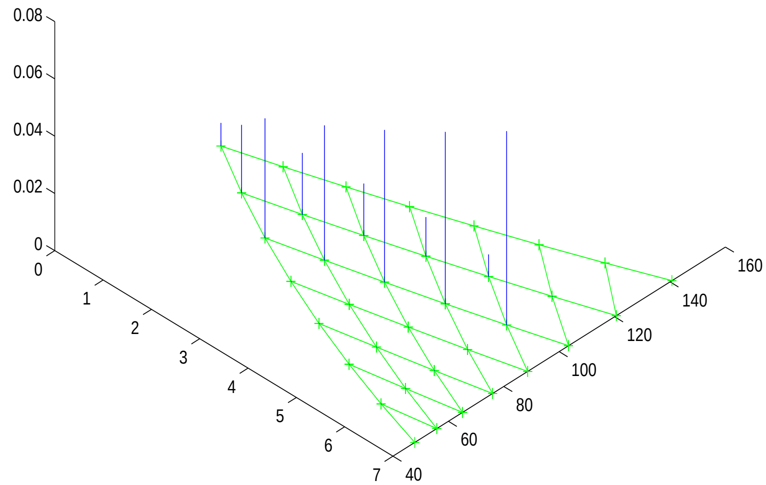

Abbildung 6.4: φ^1, Binäroption

AUFGABE 6.2. Sei (S_t) ein CRR-Prozeß mit $P(S_{t+1} = S_t U) = p$, $P(S_{t+1} = S_t D) = 1 - p$, $U = 1.025$, $D = 0.97$, $p = 0.7$, $S_0 = 100$, und nominellem Zinssatz 0.1/50. Berechnen Sie die duplizierende Strategie für eine Calloption mit Ausübungspreis $K = 110$ und Ausübungszeitpunkt $T = 50$.

Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

AUFGABE 6.3. Sei (S_t) ein CRR-Prozeß mit $P(S_{t+1} = S_t U) = p$, $P(S_{t+1} = S_t D) = 1 - p$, $U = 1.025$, $D = 0.97$, $p = 0.7$, $S_0 = 100$, und nominellem Zinssatz 0.1/50. Berechnen Sie die duplizierende Strategie für eine Putoption mit Ausübungspreis $K = 110$ und Ausübungszeitpunkt $T = 50$.

Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

AUFGABE 6.4. Sei (S_t) ein CRR-Prozeß mit $P(S_{t+1} = S_t U) = p$, $P(S_{t+1} = S_t D) = 1 - p$, $U = 1.025$, $D = 0.97$, $p = 0.7$, $S_0 = 100$, und nominellem Zinssatz 0.1/50. Berechnen Sie die duplizierende Strategie für eine Binäroption mit Payoff $I_{\{S_T \geq 100\}}$ und Ausübungszeitpunkt $T = 50$.

Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

AUFGABE 6.5. Sei ein CRR-Prozeß $S_0 = 100$, $U = 1.01$, $D = 0.99$, $p = 0.55$, $T = 20$, $r = 0.05/T$ gegeben. Wir definieren M durch $M_T = (\max\{S_1, S_2, \ldots, S_T\} - 105)_+$. Man schätze den Preis und die duplizierende Strategie der Option.
Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

AUFGABE 6.6. Eine asiatische Option ist ein Kontrakt, dessen Auszahlungsfunktion vom Durchschnitt $\bar{S}_T = (S_1 + \cdots + S_T)/T$ abhängt. Sei $A_T = (S_T - \bar{S}_T)_+$, d.h. A_T ist die Auszahlungsfunktion einer Option, die dem Käufer gestattet, zum Zeitpunkt T die Aktie zu ihrem Durchschnittswert $\bar{S}_T$ zu erwerben. Man schätze den Preis und die duplizierende Strategie der Option. Dabei setze man ein CRR-Modell mit $T = 20$, $U = 1.1$, $D = 1/U$, und $r = 0$ $p = 0.5$ voraus.
Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

AUFGABE 6.7. Sei ein CRR-Prozeß (S_t) mit $S_0 = 100$, $U = 1.05$, $D = 0.975$, $r = 0.03$, $p = 0.55$, $T = 20$ gegeben. Wir definieren die Barrieroption B durch $B_T = (S_T - 105)_+$ falls $S_t \leq 150$ für alle $i \leq T$ und $B_T = 0$ sonst. Man schätze den Preis und die duplizierende Strategie der Option.
Überprüfen Sie die Berechnungen, indem Sie zufällige Pfade (S_t) erzeugen, das Portfolio bilden, dynamisch umschichten und den Wert des Portfolios mit dem Payoff der Option (in $t = T$) vergleichen.

Kapitel 7

Modell von Black und Scholes

7.1 Optionspreise

7.1.1 Modell

Der Markt besteht aus einem Bankkontoprozeß $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ der Form

$$B_t = e^{rt}$$

und einem risikobehafteten Wertpapier (die Aktie) $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}. \tag{7.1}$$

(W_t) ist eine Brown'sche Bewegung, μ ist konstant, S_0, r, σ sind konstant und positiv. Wir nennen r den Zinssatz, μ den Drift (der Renditen) und σ die **Volatilität**.
Der Aktienkurs ist eine geometrische Brown'sche Bewegung. Der Prozeß der diskontierten Preise

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = S_0 e^{(\mu - r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

ist ebenfalls eine geometrische Brown'sche Bewegung.
Der Prozeß der kumulierten Renditen

$$\log(S_t/S_0) = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

ist eine Brown'sche Bewegung mit Driftparameter $\mu - \sigma^2/2$ und Diffusionsparameter σ.

7.1.2 Martingalmaß und Preise

In Beispiel 4.6 wurde gezeigt, welche geometrischen Brown'schen Bewegungen Martingale sind: Prozesse der Form

$$S_0 e^{-\sigma^2/2t + \sigma W_t}$$

sind Martingale. $(\tilde{S}_t)$ ist unter dem physischen Maß ein Martingal, wenn

$$r = \mu,$$

d.h. wenn der Drift mit dem Zinssatz übereinstimmt. In der Regel werden sich μ und r unterscheiden. Es gibt aber eine eindeutig bestimmte Verteilung Q, unter der $(\tilde{S}_t)$ ein Martingal ist. Das Modell ist arbitragefrei und vollständig.

Sei

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\theta^2 T/2 - \theta W_T} = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{-(\mu-r)/\sigma^2} e^{-T\kappa}$$

mit

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\mu - r}{\sigma} \\ \kappa &= \frac{(\mu - r)(\sigma^2/2 - r)}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Die Funktion dQ/dP ist die Dichte der Verteilung Q. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}^Q[f] = \mathbb{E}^P[f dQ/dP].$$

Sei

$$\bar{W}_t = \theta t + W_t.$$

Unter P ist $(\bar{W}_t)$ eine B.B. mit Drift θ. Der fundamentale Satz von Girsanov besagt, daß unter der Verteilung Q der Prozeß $(\bar{W}_t)$ eine Brown'sche Bewegung ist. Diese Aussage bildet die Grundlage der Optionspreistheorie im BS-Modell. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= S_0 e^{-\sigma^2/2t + (\mu - r)t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{-\sigma^2/2t + \sigma(\theta t + W_t)} \\ &= S_0 e^{-\sigma^2/2t + \sigma \bar{W}_t}. \end{aligned}$$

Wenn $(\bar{W}_t)$ unter Q eine Brown'sche Bewegung ist, dann ist $(\tilde{S}_t)$ unter Q ein Martingal.

7.1 SATZ. (Black Scholes-Preise). *Zum Zeitpunkt t kostet eine europäische Option mit Auszahlungszeitpunkt T und Auszahlungsfunktion $h(S_T)$ $F(t, S_t)$, mit*

$$F(t,x) = \int e^{-r(T-t)} h(x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) \phi(z) dz. \tag{7.2}$$

BEGRÜNDUNG: Es ist

$$\begin{aligned} S_T &= e^{rT}\tilde{S}_T \\ &= e^{rT}\tilde{S}_t e^{-\sigma^2(T-t)/2+\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)} \\ &= S_t e^{r(T-t)-\sigma^2(T-t)/2+\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)}. \end{aligned}$$

Unter Q ist

$$\bar{W}_T - \bar{W}_t \sim N(0, T-t),$$

d.h.

$$\bar{W}_T - \bar{W}_t = \sqrt{T-t}\,Z$$

mit

$$Z \sim N(0,1).$$

Z ist unabhängig von S_t. Der Preis der Option ist

$$\begin{aligned} e^{rt}\mathbb{E}^Q[\tilde{h}(S_T) \mid S_t] &= e^{rt}\mathbb{E}^Q[e^{-rT}h(S_T) \mid S_t] \\ &= \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}h(S_t e^{r(T-t)-\sigma^2(T-t)/2+\sigma\sqrt{T-t}Z}) \mid S_t] \\ &= \int e^{-r(T-t)}h(S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z})\phi(z)dz. \end{aligned}$$

□

7.2 BEISPIEL. (Putoption) $P_t(T,K,S_t)$, der Wert der Putoption mit Strikepreis K und Ausübungszeitpunkt T erfüllt $P_t(T,K,S_t) = F(t,S_t)$ mit

$$F(t,x) = \int e^{-r(T-t)}(K - xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z})_+\phi(z)dz.$$

Um dieses Integral auszurechnen, müssen wir zuerst das Intervall bestimmen, auf dem der Integrand positiv ist. Wir kürzen $T-t$, die Restlaufzeit, mit θ ab. Es gilt

$$K - xe^{(r-\sigma^2/2)\theta+\sigma\sqrt{\theta}z} > 0$$

genau dann, wenn

$$z < -\frac{\log(x/K) + (r-\sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} =: -d_2(x).$$

Dann ist

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^{-d_2(x)} e^{-r\theta}(K - xe^{(r-\sigma^2/2)\theta+\sigma\sqrt{\theta}z})\phi(z)dz$$

$$= e^{-r\theta}K\Phi(-d_2(x)) - x\int_{-\infty}^{-d_2(x)} e^{-\theta\sigma^2/2+\sigma\sqrt{\theta}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz$$

$$= e^{-r\theta} K\Phi(-d_2(x)) - x\int_{-\infty}^{-d_2(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\sqrt{\theta}\sigma)^2/2} dz$$

$$= e^{-r\theta} K\Phi(-d_2(x)) - x\int_{-\infty}^{-d_2(x)-\sqrt{\theta}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$= e^{-r\theta} K\Phi(-d_2(x)) - x\Phi(-d_1(x)), \tag{7.3}$$

mit

$$d_1(x) = \frac{\log(x/K) + (r+\sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, \tag{7.4}$$

$$d_2(x) = \frac{\log(x/K) + (r-\sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}. \tag{7.5}$$

Die Abbildung 7.1 zeigt den Wert der Putoption im Intervall $t \in [0,1]$.

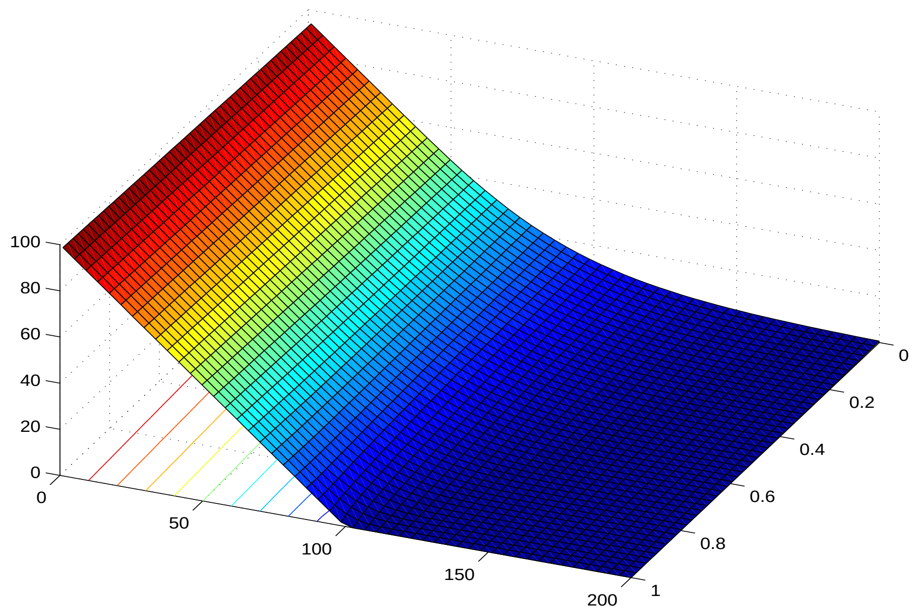

Abbildung 7.1: BS-Preis, Putoption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

□

7.3 BEISPIEL. (Calloption) Die Put-Call-Parität erleichtert die Berechnung des BS-Preises der Calloption. Aus $C_t(T,K,S_t) + Ke^{-r(T-t)} = P_t(T,K,S_t) + S_t$ (und $\theta = T - t$) folgt $C_t(T,K,S_t) = F(t,S_t)$ mit

$$\begin{aligned} F(t,x) &= -Ke^{-r\theta} + e^{-r\theta}K\Phi(-d_2(x)) - x\Phi(-d_1(x)) + x \\ &= x(1-\Phi(-d_1(x))) - Ke^{-r\theta}(1-\Phi(-d_2(x))) \\ &= x\Phi(d_1(x)) - Ke^{-r\theta}\Phi(d_2(x)). \end{aligned} \tag{7.6}$$

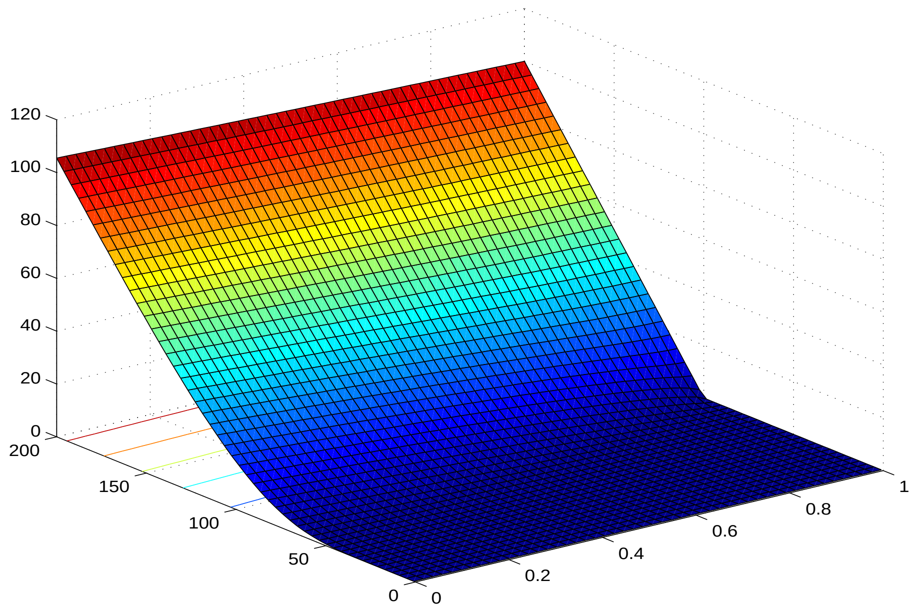

Abbildung 7.2: BS-Preis, Calloption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

Die Abbildung 7.2 zeigt den Wert der Calloption im Intervall $t \in [0, 1]$.

$\square$

7.1.3 Sensitivitäten

Die Preise von Optionen hängen vom Aktienkurs $x = S_t$, der Restlaufzeit $T - t$, dem Zinssatz r und der Volatilität σ ab. Die Volatilität ist nicht beobachtbar, sie muß aus Daten geschätzt oder aus vergangenen Preisen berechnet werden.

Wir wollen kurz erörtern, wie die BS-Preise qualitativ von den sie definierenden Größen abhängen. Die Tabelle 7.1 zeigt für die Call- und die Putoption die partiellen Ableitungen der Preise nach diesen Größen. Diese partiellen Ableitungen werden in der Börsensprache als **griechische Variablen** bezeichnet.

Das **Delta** ist die erste Ableitung des Preises nach x. Wir werden sehen, daß es φ^1, die Komponente des duplizierenden Portfolios, die aus dem der Option zu Grunde liegenden Aktienkurs besteht, ist. Es ist positiv für die Calloption, negativ für die Putoption. Steigt der Aktienkurs, so erhöht sich der Wert der Calloption, die Putoption verliert aber an Wert.

Das **Gamma** ist die Ableitung des Delta bezüglich x, gibt also die Veränderung der Menge der im Portfolio gehaltenen Aktien an, wenn sich der Preis der Aktien ändert. Das Gamma der Calloption ist gleich dem der Putoption (eine Folge der Put-Call Parität). Die Abbildung 7.5 zeigt das Gamma für eine Call (-oder Put-) Option für $0 < x < 200$ und $0 \leq t \leq 0.99$. Man sieht, daß sich das Delta

Tabelle 7.1: "Griechische Variable"

		Calloption	Putoption
Wert	$F(t,x)$	$x\Phi(d_1(x)) - e^{-r\theta}K\Phi(d_2(x))$	$e^{-r\theta}K\Phi(-d_2(x)) - x\Phi(-d_1(x))$
Delta	$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$	$\Phi(d_1(x))$	$-\Phi(-d_1(x))$
Gamma	$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}$	$\frac{\phi(d_1(x))}{x\sigma\sqrt{\theta}}$	$\frac{\phi(d_1(x))}{x\sigma\sqrt{\theta}}$
Vega	$\frac{\partial F(t,x)}{\partial \sigma}$	$e^{-r\theta}K\sqrt{\theta}\phi(d_2(x))$	$e^{-r\theta}K\sqrt{\theta}\phi(d_2(x))$
Rho	$\frac{\partial F(t,x)}{\partial r}$	$e^{-r\theta}\theta K\Phi(d_2(x))$	$-e^{-r\theta}\theta K\Phi(-d_2(x))$
Theta	$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}$	$-e^{-r\theta}\frac{K\sigma}{2\sqrt{\theta}}\phi(d_2(x)) - e^{-r\theta}rK\Phi(d_2(x))$	$-e^{-r\theta}\frac{K\sigma}{2\sqrt{\theta}}\phi(d_2(x)) + e^{-r\theta}rK\Phi(-d_2(x))$

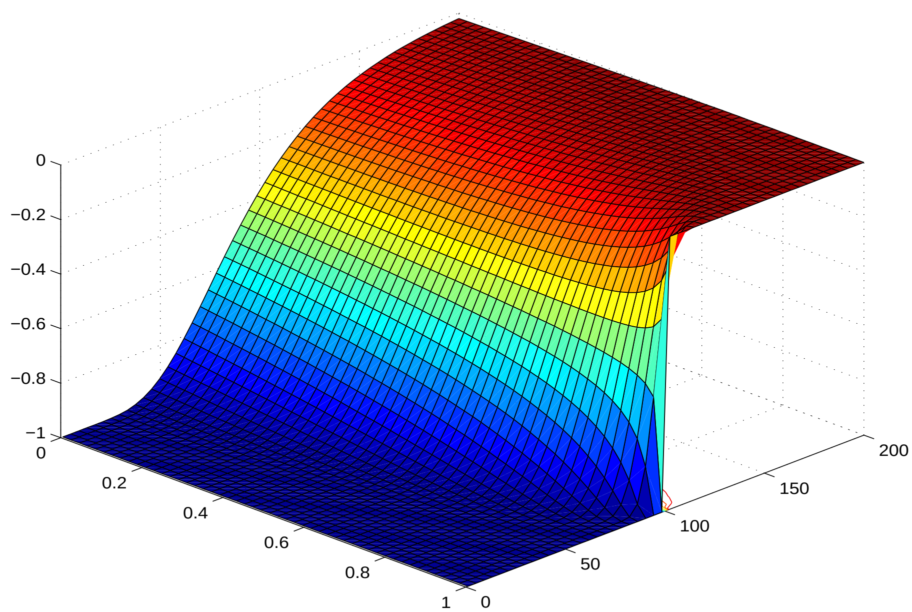

Abbildung 7.3: Delta der Putoption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

nur wenig ändert, solange die Restlaufzeit groß ist. In der Nähe des Ausübungszeitpunkts ist das Gamma klein, wenn die Option weit im oder aus dem Geld ist. Für $x \approx K$ kann sich das Delta aber noch sehr ändern.

Die Abbildung 7.6 zeigt das **Vega**, wieder für eine Call-oder Putoption. Diese Kenngröße ist für Call-oder Potoptionen immer nichtnegativ. Der Call-bzw. der Putpreis ist eine monoton wachsende Funktion der Volatilität. Man sieht, daß diese Ableitung groß in der Nähe des Ausübungspreises und bei langer Restlaufzeit ist.

Das **Rho** ist nichtnegativ für die Calloption, nichtpositiv für die Putoption. Eine Erhöhung des

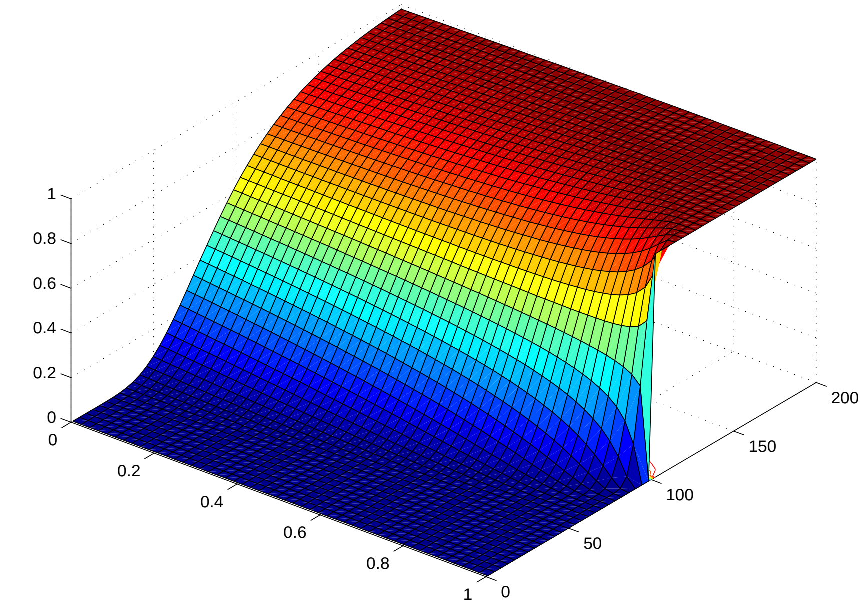

Abbildung 7.4: Delta der Calloption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

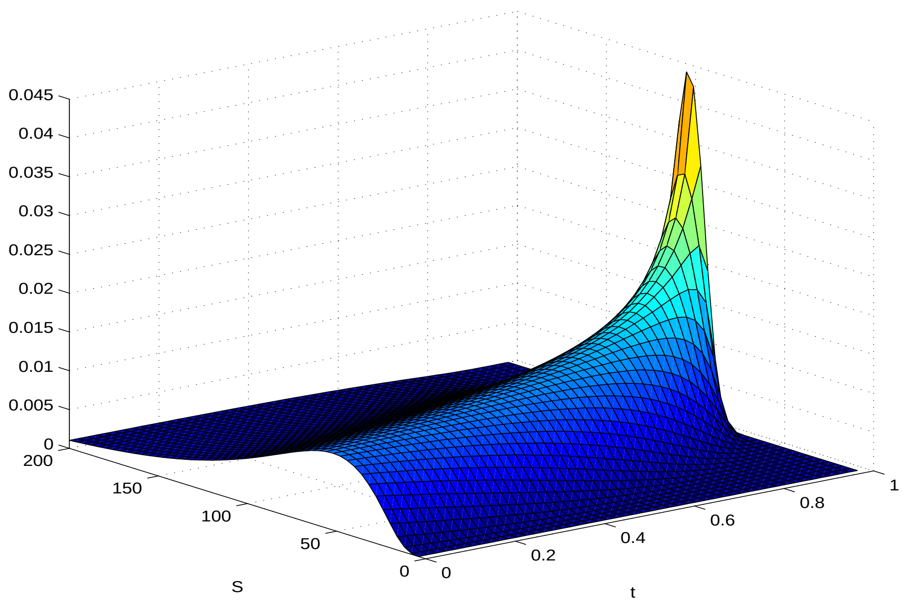

Abbildung 7.5: Gamma, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

Zinssatzes verteuert Calloptionen, während sie Putoptionen billiger werden läßt. In Abbildung 7.7 ist das Rho einer Calloption dargestellt. Der Preis reagiert stark auf eine Veränderung des Zinssatzes bei hohem Aktienkurs und langer Restlaufzeit.

Die Abbildung 7.8 zeigt schließlich das **Theta** der Calloption.

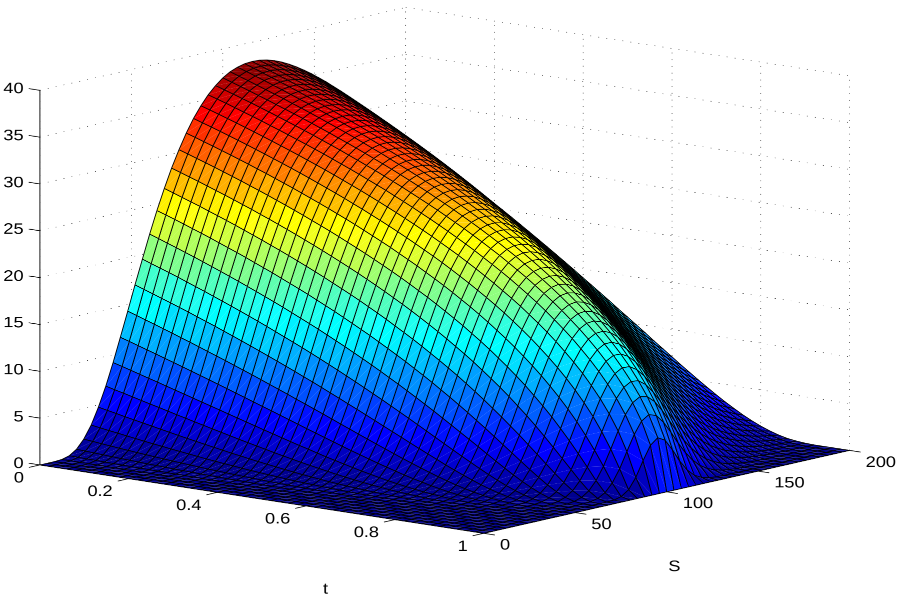

Abbildung 7.6: Vega, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

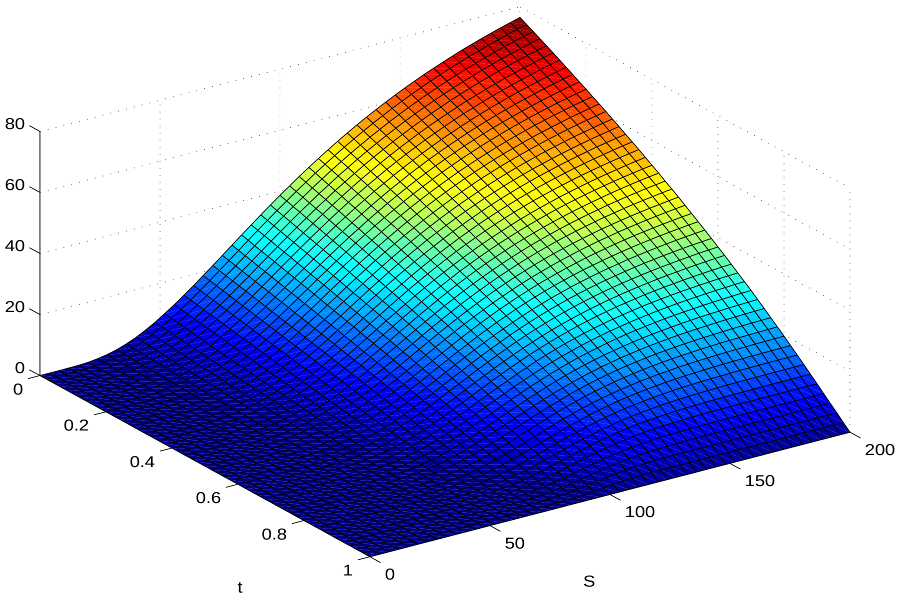

Abbildung 7.7: Rho der Calloption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

Diese Kennzahlen ermöglichen es, die Auswirkung auf den Preis und das Portfolios abzuschätzen, sollten sich die Parameter $\theta = T - t, r, \sigma, x$ ändern. Aber schon die Berechnung eines einzigen Preises erfordert die Kenntnis dieser Größen. Während Restlaufzeit, Zinssatz und Aktienkurs in der Regel mit genügend großer Genauigkeit eruierbar sind, ist die Volatilität nicht beobachtbar.

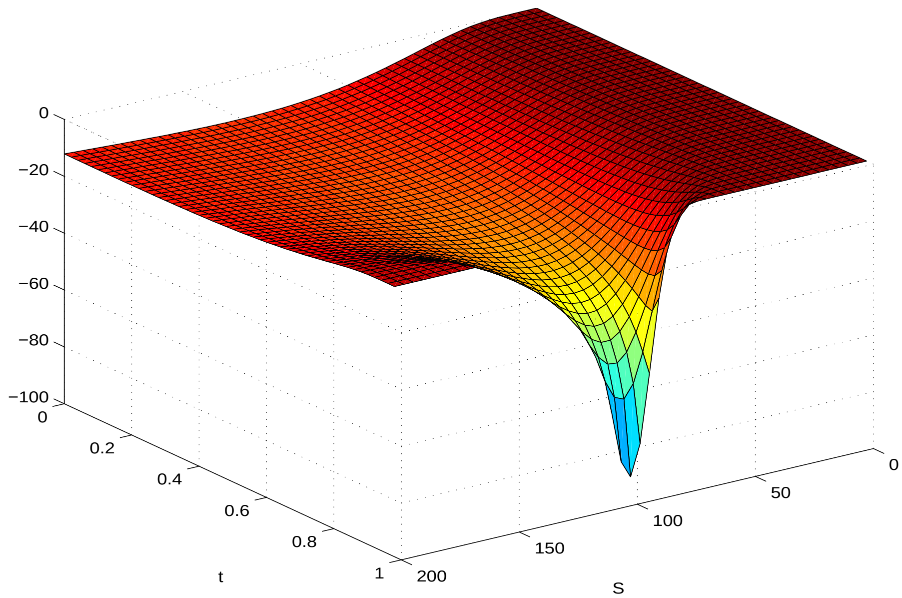

Abbildung 7.8: Theta der Calloption, $K = 100, \sigma = 0.4, r = 0.05$

Sie wird entweder aus Daten geschätzt (historische Methode) oder aus Optionspreisen berechnet, indem bei aktuellen Preisen, die BS-Preisformel, als Funktion von σ, invertiert wird (implizite Methode). Solange die Schätzung der Volatilität vom wirklichen Wert abweicht, muß der mögliche Fehler im Preis abgeschätzt werden. Dies ist mit der Größe Vega möglich.

7.4 BEISPIEL. Der Preis einer Calloption wird mit der BS-Formel berechnet. Die Parameter sind $r = 5\%$, $K = 100$, $T = 1$ Jahr. Der Preis der Aktie beträgt 100. Die Volatilität wird auf $40 \pm 5\%$ geschätzt.

```
> r<-0.05
> K<-100
> S<-100
> sigma<-0.4
> T<-1
> d2<-(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
> d1<-d2+sigma*sqrt(T)
> call<-S*pnorm(d1)-exp(-r*T)*K*pnorm(d2)
> call
[1] 18.02295
> vega<-exp(-r*T)*K*sqrt(T)*dnorm(d2)
```

```
> vega
[1] 37.84198
> call-vega*0.05
[1] 16.13085
> call+vega*0.05
[1] 19.91505
```

Der BS-Preis ist 18.02, das Vega in $\sigma = 0.4$ ist 37.8. Der Preis der Calloption wird in $18.02 \pm 37.8 \times 0.05$, also zwischen 16.13 und 19.91 liegen. □

7.5 BEISPIEL. Der Preis einer Calloption wird mit der BS-Formel berechnet. Die Parameter sind $r = 5\%$, $K = 100$, $\sigma = 0.4$ und $T = 1$ Jahr. Der Preis der Aktie beträgt 100. Damit ist der Preis der Calloption 18.02 und das Delta ist 0.63.

```
> r<-0.05
> K<-100
> S<-100
> sigma<-0.4
> T<-1
> d2<-(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
> d1<-d2+sigma*sqrt(T)
> call<-S*pnorm(d1)-exp(-r*T)*K*pnorm(d2)
> call
[1] 18.02295
> delta<-pnorm(d1)
> delta
[1] 0.6274095
> gamma<-dnorm(d1)/(S*sigma*sqrt(T))
> gamma
[1] 0.009460496
> gamma*10
[1] 0.09460496
> delta-10*gamma
[1] 0.5328045
> delta+10*gamma
[1] 0.7220144
```

Der Stillhalter dupliziert in $t = 0$ die Option, will aber nicht umbedingt dynamisch umschichten. Daher überlegt er sich, wie stark φ^1 schwanken wird. Er geht davon aus, daß sich der Aktienkurs im Intervall 100 ± 10 bewegen wird. Das Gamma ist 0.0095. Damit schätzt der Stillhalter, daß φ^1 im Intervall $0.63 \pm 10 \times 0.0095 = 0.63 \pm 0.0095$ bleiben wird.

```
> T<-1/12
> d1<-(log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
> delta<-pnorm(d1)
> delta
[1] 0.5373737
> gamma<-dnorm(d1)/(S*sigma*sqrt(T))
> gamma
[1] 0.03439770
> gamma*10
[1] 0.3439770
> delta-gamma*10
[1] 0.1933967
> delta+gamma*10
[1] 0.8813507
```

Angenommen, die Restlaufzeit wäre nur ein Monat, $T = 1/12$. Dann wäre das Delta 0.54 und das Gamma 0.034. Nimmt man an, daß der Aktienkurs trotz der geringen Restlaufzeit im Intervall 100 ± 10, dann sollte man befürchten, daß $\varphi^1 \in 0.54 \pm 10 \times 0.034$ liegt. $\square$

7.6 BEISPIEL. Die Volatitliät σ wird entweder aus vergangenen Aktienkursen geschätzt (historische Methode) oder an Hand von Optionspreisen berechnet.
Seien $t_0, t_1, \ldots, t_n$ Zeitpunkte, für die Aktienpreise vorliegen. Wir nehmen an, daß $t_i - t_{i-1} = h$ konstant ist. Die Renditen

$$\log S_{t_1} - \log S_{t_0}, \ldots, \log S_{t_n} - \log S_{t_{n-1}}$$

sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert $(\mu - \sigma^2/2)h$ und Varianz $h\sigma^2$. Man kann σ^2 zum Beispiel durch

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{hn} \Big((\log S_{t_1} - \log S_{t_0})^2 + \cdots + (\log S_{t_n} - \log S_{t_{n-1}})^2 \Big)$$

schätzen.

Falls zu wenige Beobachtungen vorliegen, die Volatitlität vielleicht doch nicht konstant ist, oder man das Wissen der anderen Marktteilnehmer berücksichtigen will, wird man die implizite Methode verwenden. Sei $C_t(S_t, \sigma, r)$ der Preis einer Option. Falls dieser Preis gleich c ist, S_t und r bekannt sind, kann man σ rekonstruieren als Lösung von

$$C_t(S_t, \sigma, r) = c.$$

Der Preis einer Calloption mit $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $T = 1$ und $K = 100$ sei 20. Man berechne die Volatilität. Die Funktion

$$\sigma \mapsto S_0\Phi(d_1(S_0, \sigma)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(S_0, \sigma))$$

ist nichtlinear, man wird die Lösung σ von

$$f(\sigma) = S_0\Phi(d_1(S_0, \sigma)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(S_0, \sigma)) - 20 = 0$$

numerisch berechnen. Wir verwenden das Newtonverfahren: Man beginnt mit einem Startwert σ_0, berechnet iterativ

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)},$$

bis die Genauigkeit ausreicht.

```
> call
function(S,T,sigma,r,K){ d1<-(log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
       d2<-d1-sigma*sqrt(T)
       S*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)}
> vegacall
function(S,T,sigma,r,K){ d2<-(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
       exp(-r*T)*K*sqrt(T)*dnorm(d2)}
> r<-0.05
> K<-100
> S<-100
> T<-1
> sigma<-1:5
> for(i in 2:5)sigma[i]<-sigma[i-1]
   -(call(100,1,sigma[i-1],0.05,100)-20)/vegacall(100,1,sigma[i-1],0.05,100)
> sigma
[1] 1.0000000 0.4214749 0.4523038 0.4523404 0.4523404
```

```
> call(100,1,sigma[5],0.05,100) # Kontrolle
[1] 20
```

□

7.2 Diffusionsprozesse

7.2.1 Approximation des Modells von Cox, Ross, Rubinstein

Das CRR-Modell ist ein sehr einfaches Lehrbuchbeispiel eines Marktes. Wir wollen kurz überlegen, ob es zum Bewerten von Optionen brauchbar sein könnte. Angenommen, eine Option auf einen Aktienkurs $(S_t)_{t\in[0,T]}$ mit Laufzeit T sei zu bewerten. T sei etwa ein Jahr oder 3 Monate. Die Änderung des Aktienkurses wird entweder stetig sein oder sich aus vielen Sprüngen zusammensetzen. Es wird möglicherweise Phasen geben, in denen der Kurs großen Schwankungen unterworfen ist, und solche, in denen kleine Änderungen vorherrschen. Im Rahmen des CRR-Modells könnte das bedeuten, daß die Sprunghöhen von der Zeit abhängen, aber auch, daß die Zeitintervalle zwischen den Kursänderungen verschieden lang sind.

Wir gehen zuerst auf das Problem der Approximation oder Modellierung des Aktienkurses durch einen CRR-Prozeß (oder allgemeiner durch einen zeitdiskreten Prozeß) mit einer sehr großen Anzahl von Sprüngen ein. Sei $N \in \mathbb{N}$, $h = T/N$ und $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$. Die Kurse (S_{t_n}) (oder die diskontierten Kurse $(\tilde{S}_{t_n})$) sollen durch einen Prozeß (X_n) approximiert werden.

Sei

$$X_n = \tilde{S}_{t_n} = S_0 e^{Z_1+\cdots+Z_n}$$

mit unabhängigen Renditen (Z_n). Seien μ_h und σ_h Erwartungswert und Standardabweichung von Z_n und

$$Z_n^* = \frac{Z_n - \mu_h}{\sigma_h}.$$

Wir nehmen an, daß Erwartungswert und Varianz der kumulierten Rendite im Intervall $[0, T]$ für $N \to \infty$ endliche Grenzwerte, μT und $\sigma^2 T$, besitzen. Aus

$$\mathbb{E}[Z_1 + \cdots + Z_N] = N\mu_h \to \mu T$$

und

$$\mathbb{V}[Z_1 + \cdots + Z_N] = N\sigma_h^2 \to \sigma^2 T$$

folgt

$$\mu_h \approx \frac{\mu T}{N} \qquad \text{und} \qquad \sigma_h \approx \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}},$$

$$
\begin{aligned}
Z_1 + \cdots + Z_N &= \mu_h + \sigma_h Z_1^* + \cdots + \mu_h + \sigma_h Z_N^* \\
&= N\mu_h + \sigma_h \left(Z_1^* + \cdots + Z_N^* \right) \\
&\approx \mu T + \sigma \sqrt{T} \frac{Z_1^* + \cdots + Z_N^*}{\sqrt{N}}
\end{aligned}
$$

Nach dem zentralen Grenzverteilungssatz ist

$$
\frac{Z_1^* + \cdots + Z_N^*}{\sqrt{N}}
$$

asymptotisch standardnormalverteilt. Daher konvergiert $Z_1 + \cdots + Z_N$ gegen eine $N(\mu T, \sigma^2 T)$-verteilte Zufallsgröße. Für $n = tN/T$ ist $Z_1 + \cdots + Z_n$ asymptotisch $N(\mu t, \sigma^2 t)$-verteilt. Die kumulierte Rendite besitzt unabhängige Zuwächse, die asymptotisch normalverteilt sind. Für $t_n \to t$ konvergiert die Verteilung von $\tilde{S}_{t_n}$ gegen die Verteilung von

$$
S_0 e^{-t\sigma^2/2 + \sigma W_t},
$$

wobei (W_t) eine Brown'sche Bewegung ist.

Kehren wir wieder zum CRR-Modell zurück. Ist r der kontinuierliche Zinssatz pro Zeiteinheit (Jahr), dann ist e^{rT} der Aufzinsungsfaktor für die Periode $[0, T]$, $e^{rT/N}$ für eine Periode der Länge $h = T/N$. Wir wählen

$$
U_h = e^{\sigma\sqrt{h}}, \quad D_h = e^{-\sigma\sqrt{h}}, \qquad r_h = rh. \tag{7.7}
$$

Für

$$
q_h = \frac{1 - \tilde{D}_h}{\tilde{U}_h - \tilde{D}_h}
$$

gilt

$$
\lim_{h\to 0} q_h = 1/2, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{q_h - 1/2}{\sqrt{h}} = \frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}.
$$

Für (Z_n), die Renditen des diskontierten Aktienkurses, gilt

$$
P(Z_n = \log \tilde{U}_h) = q_h, \qquad P(Z_n = \log \tilde{D}_h) = 1 - q_h.
$$

Man beachte, daß

$$
\begin{aligned}
\log \tilde{U}_h &= \sigma\sqrt{h} - rh, \\
\log \tilde{D}_h &= -\sigma\sqrt{h} - rh.
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
\mu_h &= \mathbb{E}[Z_n] = \left(\sigma\sqrt{h} - rh\right) q_h + \left(-\sigma\sqrt{h} - rh\right)(1-q_h) \\
&= \sigma\sqrt{h}(2q_h - 1) - rh, \\
\lim_{N\to\infty} N\mu_h &= \lim_{N\to\infty} \left(N\sigma\sqrt{h}(2q_h - 1) - Nrh\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} N\sigma h 2\left(\frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}\right) - rT \\
&= \lim_{N\to\infty} T\sigma\left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) - rT \\
&= -\frac{\sigma^2 T}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N\mathbb{V}[Z_n] &= N\left(\log\tilde{U}_h - \log\tilde{D}_h\right)^2 q_h(1-q_h) \\
&= N\left(2\sigma\sqrt{h}\right)^2 q_h(1-q_h) \\
&= Nh\sigma^2 4q_h(1-q_h) \\
&\to T\sigma^2.
\end{aligned}
$$

Optionspreise im CRR-Modell konvergieren gegen BS-Preise.

7.7 PROPOSITION. *(Black-Scholes-Preise)*
Sei $(X_n)_{n=0}^N$ ein CRR-Prozeß, wobei U_N, D_N und r_N durch (7.7) gegeben sind. Dann gilt für $n = [Nt/T]$ und alle stetigen und beschränkten Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(7.8) $$\lim_{N\to\infty} (\mathbb{E}^Q[\tilde{h}(X_N) \mid X_1, \dots, X_n] - F(t, X_n)) = 0,$$

wobei

(7.9) $$F(t,x) = \int e^{-r(T-t)} h(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z})\phi(z)dz.$$

7.2.2 Itokalkül

Wir haben gesehen, daß (und wann) Preise von einfachen Optionen im CRR-Modell gegen Preise im zeitstetigen BS-Modell konvergieren. Aber nur in einfachen Situationen sind diese Grenzwerte von Folgen von CRR-Preisen wirklich auszurechnen. Schon die entsprechende Konvergenz von Duplizierungsstrategien wäre schwieriger zu zeigen.

Im zeitdiskreten CRR-Modell sind zum Beispiel Preise von Optionen, die vom gesamten Pfad $(S_n)_{n=0,\dots,N}$ eines Aktienkurses, nicht nur vom Kurs S_N zum Ausübungszeitpunkt, abhängen, schon bei größerem N nur mehr sehr schwer anzugeben. Die Berechnung von Preisen oder Strategien ist im zeitstetigen BS-Modell oft einfacher.

Um mit dem BS-Modell arbeiten zu können, müssen einige einfache Operationen und Ergebnisse aus dem Itôkalkül vertraut sein. Die Ergebnisse in diesem Abschnitt sind nur unter gewissen Regularitätsbedingungen richtig, auf die wir aber in der Regel nicht eingehen.
Betrachten wir eine Brown'sche Bewegung mit Drift,

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

X_0 ist von der B.B. (W_t) unabhängig. Sei $N \in \mathbb{N}$, $h = T/N$ und $t_i = ih$. Man kann den Prozeß (X_t) auch darstellen durch den Anfangswert X_0, den Zuwächsen aus der systematischen Driftkomponente

$$\mu(t_i - t_{i-1})$$

und den Zuwächsen aus der Diffusionskomponente

$$\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \mu(t_1 - t_0) + \sigma(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \mu(t - t_{n-1}) + \sigma(W_t - W_{t_{n-1}}) \\ &= X_0 + \mu(t_1 - t_0) + \cdots + \mu(t - t_{n-1}) + \sigma(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \sigma(W_t - W_{t_{n-1}}), \end{aligned}$$

wobei $t_{n-1} < t \leq t_n$. Man beachte, daß die systematische Komponente Zuwächse der Größenordnung $t_i - t_{i-1}$, die Diffusionskomponente Zuwächse der Größenordnung $\sqrt{t_i - t_{i-1}}$ (die Standardabweichung von $W_{t_i} - W_{i_{i-1}}$) besitzt.

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$$

ist normalverteilt, $\mu(t_i - t_{i-1})$ und $\sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}$, Erwartungswert und Standardabweichung, sind konstant.
Eine naheliegende Erweiterung besteht darin, Prozesse zu betrachten, die sich als Grenzwerte von Partialsummen darstellen lassen, deren Erwartungswerte und Varianzen stochastisch sind. Falls die Driftkomponente μ und die Diffusionskomponente σ von (X_t) von der Zeit und dem Ort abhängen, spricht man von einem **Diffusionsprozeß** . Dann ist (X_t) für $t_{n-1} < t \leq t_n$

$$\begin{aligned} X_t &\approx X_0 + \mu(t_0, X_{t_0})(t_1 - t_0) + \sigma(t_0, X_{t_0})(W_{t_1} - W_{t_0}) \\ &\quad + \cdots + \mu(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})(t_n - t_{n-1}) + \sigma(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) \\ &= X_0 + \mu(t_0, X_{t_0})(t_1 - t_0) + \cdots + \mu(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})(t_n - t_{n-1}) \\ &\quad + \sigma(t_0, X_{t_1})(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \sigma(t_{n-1}, X_{t_{n-1}})(W_t - W_{t_{n-1}}). \end{aligned}$$

Sind (μ_t) und (σ_t) adaptierte Prozesse, heißt (X_t) **Itôprozeß** . Dann ist

$$\begin{aligned} X_t &\approx X_0 + \mu_{t_0}(t_1 - t_0) + \sigma_{t_0}(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \mu_{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1}) + \sigma_{t_{n-1}}(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) \\ &= X_0 + \mu_{t_0}(t_1 - t_0) + \cdots + \mu_{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1}) + \sigma_{t_0}(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \sigma_{t_{n-1}}(W_t - W_{t_{n-1}}). \end{aligned}$$

Die Grenzwerte von

$$\mu_{t_0}(t_1 - t_0) + \cdots + \mu_{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1})$$

und

$$\sigma_{t_0}(W_{t_1} - W_{t_0}) + \cdots + \sigma_{t_{n-1}}(W_t - W_{t_{n-1}})$$

bezeichnen wir mit

(7.10)
$$\int_0^t \mu_u du$$

und

(7.11)
$$\int_0^t \sigma_u dW_u.$$

(7.11) wird als Itôintegral bezeichnet. Ein Itôprozeß ist ein Prozeß der Form

(7.12)
$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dWu.$$

Ein Diffusionsprozeß ist ein Itôprozeß mit der Darstellung

(7.13)
$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(u, X_u) du + \int_0^t \sigma(u, X_u) dW_u.$$

Man beachte, daß (7.13) den Prozeß (X_t) als Lösung einer Gleichung definiert (der **stochastischen Differentialgleichung**).
Als Kurzschreibweise ist

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

bzw.

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

üblich. Obwohl die Theorie dieser Prozesse ist sehr anspruchsvoll ist, kann man mit wenigen Rechenregeln die für das BS-Modell notwendigen Rechenoperationen durchführen. Wir fassen Eigenschaften und Rechenregeln kurz zusammen.

1. Sind (X_t) und (Y_t) Itô-Prozesse mit $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ und $dY_t = \eta_t dt + \tau_t dW_t$, dann ist $(X_t + Y_t)$ ein Itô-Prozeß. Er besitzt die Darstellung

$$d(X_t + Y_t) = (\mu_t + \eta_t)dt + (\sigma_t + \tau_t)dW_t.$$

2. Ein Prozeß der Form

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt$$

ist deterministisch und Lösung der Differentialgleichung

$$X'(t) = \mu(t, X(t)).$$

3. Die Zufallsvariable $\int_0^t \mu_u du$ erfüllt

$$\mathbb{E}[\int_0^t \mu_u du] = \int_0^t \mathbb{E}[\mu_u]du.$$

4. Die Zufallsvariable $\int_0^t \sigma_u dW_u$ erfüllt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\int_0^t \sigma_u dW_u] &= 0, \\ \mathbb{E}[\left(\int_0^t \sigma_u dW_u\right)^2] &= \int_0^t \mathbb{E}[\sigma_u^2]du.\end{aligned}$$

5. Ein Itô-Prozeß (X_t) ist genau dann ein Martingal, wenn $\mu_t = 0$, d.h. wenn

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u dW_u.$$

6. Die Kettenregel gibt an, wie die Ableitung der Funktion $f \circ g$ aus g und den Ableitungen von f und g berechnet werden kann. Die analoge Aussage ist das Lemma von Itô.

   Sei ein Itô-Prozeß $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ gegeben. $f = f(t, x)$ sei eine Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f besitze eine stetige Ableitung nach t und zwei stetige Ableitungen nach x.

$$Y_t = f(t, X_t), \tag{7.14}$$

   ist ebenfalls ein Itô-Prozeß. Er erfüllt

$$dY_t = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2}\sigma_t^2 dt. \tag{7.15}$$

7. Die Produktregel für Itô-Prozesse: Seien $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ und $dY_t = \eta_t dt + \tau_t dW_t$. Dann ist $(X_t Y_t)$ ein Itô-Prozeß, er erfüllt

$$\begin{aligned}d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \tau_t dt \\ &= X_t(\eta_t dt + \tau_t dW_t) \\ &+ Y_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \\ &+ \sigma_t \tau_t dt \\ &= (X_t \eta_t + Y_t \mu_t + \sigma_t \tau_t)dt + (X_t \tau_t + Y_t \sigma_t)dW_t.\end{aligned}$$

7.8 BEISPIEL. Die Brown'sche Bewegung (W_t) und die Brown'sche Bewegung mit Drift $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$ sind Diffusionsprozesse. (X_t) hat die Darstellung

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

$\square$

7.9 BEISPIEL. Seien (W_t) eine Brown'sche Bewegung und $X_t = W_t^2$. Dann ist (X_t) ein Itô-Prozeß, es ist $X_t = f(W_t)$ mit $f(x) = x^2$. Mit $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$ folgt

$$dX_t = 2W_t dW_t + dt,$$

und damit ist

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t.$$

$\square$

7.10 BEISPIEL. Im BS-Modell ist der Bankkontoprozeß

$$B_t = e^{rt}$$

deterministisch. Aus

$$(e^{rt})' = re^{rt}$$

folgt

$$dB_t = rB_t dt.$$

Wir wollen die stochastische Differentialgleichung des Aktienkurses

$$S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$$

herleiten. Sei

$$f(t,x) = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\}.$$

Dann ist

$$S_t = f(t, W_t).$$

Um das Lemma von Itô anwenden zu können, benötigen wir die entsprechenden Ableitungen der Funktion f. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} &= (\mu - \sigma^2/2)\exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\} \\
&= (\mu - \sigma^2/2) f(t,x), \\
\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} &= \sigma \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\} \\
&= \sigma f(t,x), \\
\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} &= \sigma^2 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\} \\
&= \sigma^2 f(t,x).
\end{aligned}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(t,W_t)}{\partial t} &= (\mu-\sigma^2/2)S_t,\\ \frac{\partial f(t,W_t)}{\partial x} &= \sigma S_t,\\ \frac{\partial^2 f(t,W_t)}{\partial x^2} &= \sigma^2 S_t.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}dS_t &= (\mu-\sigma^2/2)S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt\\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.\end{aligned}$$

□

7.11 BEISPIEL. Wir wollen eine stochastische Differentialgleichung für $(\tilde{S}_t)$ herleiten. Sei

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

$(\bar{W}_t)$ ist eine B.B. unter Q. Es gilt

$$\begin{aligned}d\tilde{S}_t &= d\left(e^{-rt}S_t\right)\\ &= d\left(e^{-rt}\right)S_t + e^{-rt}dS_t\\ &= -re^{-rt}dtS_t + e^{-rt}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right)\\ &= (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t\\ &= \sigma\tilde{S}_t d\bar{W}_t.\end{aligned}$$

□

7.12 BEISPIEL. Sei σ_t eine deterministische Funktion von t, Y_0 konstant und (Y_t) der Itô-Prozess

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_u dW_u.$$

Y_t ist normalverteilt mit Erwartungswert Y_0 und Varianz $\int_0^t \sigma_u^2 du$. □

7.3 Duplizierungsstrategien

Selbstfinanzierende Strategien werden im zeitstetigen Fall analog zum zeitdiskreten definiert. Eine Strategie φ ist ein Paar von adaptierten Prozessen (φ_t^0) und (φ_t^1). Der Wert der Strategie ist der Prozeß $(V_t(\varphi))$ mit

(7.16)
$$V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t.$$

Die Strategie heißt selbstfinanzierend, falls

$$V_t(\varphi) = \varphi_0^0 B_0 + \varphi_0^1 S_0 + \int_0^t \varphi_u^0 dB_u + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u. \tag{7.17}$$

(7.17) lautet in Kurzschreibweise

$$dV_t(\varphi) = \varphi_t^0 dB_t + \varphi_t^1 dS_t.$$

Die Wertänderung von selbstfinanzierenden Strategien ist ausschließlich durch die Änderung des risikolosen und des risikobehafteten Wertpapiers bedingt. Geld wird weder zugeschossen, noch aus dem Portfolio entnommen.
Sei $\tilde{V}_t(\varphi) = V_t(\varphi)/B_t$ der abgezinste Wert des Portfolios. Dann gilt

7.13 PROPOSITION. *Seien (φ_t^0) und (φ_t^1) adaptierte Prozesse. Die Strategie $(\varphi_t^0, \varphi_t^1)$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$d\tilde{V}_t(\varphi) = \varphi_t^1 d\tilde{S}_t. \tag{7.18}$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\varphi) &= d(e^{-rt}V_t(\varphi)) \\ &= V_t(\varphi)(-re^{-rt}dt) + e^{-rt}dV_t(\varphi). \end{aligned}$$

Die Strategie ist also genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\varphi) &= V_t(\varphi)(-re^{-rt}dt) + e^{-rt}(\varphi_t^0 re^{rt}dt + \varphi_t^1 dS_t) \\ &= (\varphi_t^0 e^{rt} + \varphi_t^1 S_t)(-re^{-rt}dt) + e^{-rt}(\varphi_t^0 re^{rt}dt + \varphi_t^1 dS_t) \\ &= \varphi_t^1 S_t(-re^{-rt}dt) + \varphi_t^1 e^{-rt} dS_t \\ &= \varphi_t^1 d(e^{-rt}S_t) \\ &= \varphi_t^1 d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

□

Eine selbstfinanzierende Strategie ist durch $V_t(\varphi)$ und den Anteil φ_t^1, der in die Aktie investiert wird, eindeutig bestimmt. Proposition 7.13 und das Lemma von Itô zeigen, wie φ_t^1 berechnet werden kann, wenn der Wert $V_t(\varphi)$ bestimmt werden kann, etwa als bedingter Erwartungswert

$$V_t(\varphi) = F(t, S_t)$$

mit

$$F(t,x) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}h(S_T) \mid S_t = x].$$

Wir erinnern, daß

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\bar{W}_t,$$

mit $(\bar{W}_t)$ eine B.B. unter Q.

Sei

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = e^{-rt} F(t, e^{rt} \tilde{S}_t)$$

der diskontierte Wert der Option. $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ besitzt nach dem Lemma von Itô die Darstellung

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t} d\tilde{S}_t + \frac{\sigma^2 \tilde{S}_t^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{\sigma^2 \tilde{S}_t^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t^2} \right) dt + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t} d\tilde{S}_t. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Aus Proposition 7.13 folgt

$$\begin{aligned} \varphi_t^1 &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t} \\ &= \frac{\partial e^{-rt} F(t, e^{rt} \tilde{S}_t)}{\partial \tilde{S}_t} \\ &= \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

7.14 SATZ. (Black Scholes-Strategie). *Sei der Preis einer europäischen Option zum Zeitpunkt t eine Funktion $F(t, S_t)$ vom Kurs S_t. Dann ist*

$$\varphi_t^1 = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial S_t}. \tag{7.20}$$

7.15 BEISPIEL. (Binäroption). Wir wollen den Preis und die duplizierende Strategie einer Binäroption berechnen. In diesem Fall ist

$$h = I_{\{S_t \leq K\}}.$$

Um den bedingten Erwartungswert

$$F(t, x) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} I_{\{S_T \leq K\}} \mid S_t = x]$$

zu berechnen, erinnern wir uns, daß

$$S_T = S_t \exp\{(r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)\}.$$

Sei $\theta = T - t$, $Z = (\bar{W}_T - \bar{W}_t)/\sqrt{\theta} \sim N(0,1)$, dann ist

$$S_T = S_t \exp\{(r - \sigma^2/2)\theta + \sigma\sqrt{\theta} Z\}$$

und

$$F(t,x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} I_{\{x \exp\{(r-\sigma^2/2)\theta + \sigma\sqrt{\theta}Z\} \leq K\}}].$$

Es ist

$$x \exp\{(r - \sigma^2/2)\theta + \sigma\sqrt{\theta} Z\} - K \leq 0$$

genau dann, wenn

$$Z > -d_2(x),$$

wobei

$$d_2(x) = \frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

schon im Zusammenhang mit der Berechnung der Put- und der Calloption eingeführt wurde. Es folgt

$$\begin{aligned} F(t,x) &= e^{-r(T-t)} Q(Z \leq -d_2(x)) \\ &= e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2(x))). \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = -e^{-r(T-t)} \phi(d_2(x)) \frac{\partial d_2(x)}{\partial x} = -e^{-r(T-t)} \frac{\phi(d_2(x))}{x\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$\varphi_t^1 = -e^{-r(T-t)} \frac{\phi(d_2(S_t))}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}.$$

□

7.16 BEISPIEL. Preis und Strategie der Binäroption in $t = 0$ sollen berechnet werden. Die Parameter sind $r = 5\%$, $K = 100$, $\sigma = 0.4$ und $T = 1$ Jahr. Der Preis der Aktie beträgt 100. Damit ist der Preis der Binäroption 0.50405 und das $\varphi_0^1 = -0.00946$.

```
> r<-0.05
> T<-1
> S<-100
> sigma<-0.4
```

```
> d2<-(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
> K<-100
> d2<-(log(S/K)+(r-sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
> Preis<-exp(-r*T)*(1-pnorm(d2))
> Preis
[1] 0.50405
> phi1<--exp(-r*T)*dnorm(d2)/(S*sigma*sqrt(T))
> phi1          #phi_0^1
[1] -0.00946
> phi0<-Preis-phi1*S
> phi0          # phi_0^0
[1] 1.450099
```

□

Wir wollen eine Alternative zur Berechnung der Optionspreise als bedingte Erwartungswerte der diskontierten Auszahlungsfunktionen unter dem Martingalmaß erwähnen. Wir erinnern an die Darstellung (7.19). Da $\tilde{V}_t(\varphi)$ ein Martingal ist, muß die Driftkomponente

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{\sigma^2 \tilde{S}_t^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t^2} = 0$$

sein. Aus

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = e^{-rt} F(t, e^{rt} \tilde{S}_t)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} &= -re^{-rt} F(t, \tilde{S}_t e^{rt}) + e^{-rt} \frac{\partial F}{\partial t}(t, e^{rt}\tilde{S}_t) + r\tilde{S}_t \frac{\partial F}{\partial S_t}(t, e^{rt}\tilde{S}_t), \\
\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t} &= \frac{\partial F}{\partial S_t}(t, e^{rt}\tilde{S}_t), \\
\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{S}_t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}(t, e^{rt}\tilde{S}_t)e^{rt}.
\end{aligned}$$

$F(t,x)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung mit Randbedingung

$$rF = \frac{\partial F}{\partial t} + rx \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\sigma^2 x^2}{2} \tag{7.21}$$

$$F(T,x) = h(x). \tag{7.22}$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung steht eine Fülle numerischer Verfahren zur Verfügung.

7.4 Aufgaben

AUFGABE 7.1. Ein BS-Modell mit $S_0 = 100$, $\mu = 0.8$, $r = 0.02$ und $\sigma = 0.8$ sei gegeben. Eine Binäroption zahlt eine GE, falls $S_T > K$. Berechnen Sie den Preis der Option in $t < T$ für $T = 1$ und $K = 100$.

AUFGABE 7.2. Diskutieren Sie die Frage, ob die Preise von Calloptionen und von Putoptionen monoton von der Restlaufzeit $T - t$ abhängen.

AUFGABE 7.3. Der Eigentümer eines Unternehmens verhandelt über die Konditionen eines Kredits. Dieser Kredit soll nicht für Zwecke des Unternehmens verwendet werden, seine Höhe hat keinen Einfluß auf die Verteilung des Unternehmenswertes. Es ist jedoch geplant, den Kredit aus Mitteln des Unternehmens zurückzuzahlen. Der Unternehmer haftet mit seinem Unternehmen für den Kredit. In den Verhandlungen sind zwei Größen, π und K festzulegen. π ist der Betrag, den der Unternehmer zum Zeitpunkt 0 erhält, K der Betrag, den er sich verpflichtet, zum Zeitpunkt N zurückzuzahlen.
Versuchen Sie, K als Funktion von π oder π als Funktion von K zu bestimmen, wenn der Markt arbitragefrei und vollständig ist.
Hinweis: Der Wert des Unternehmens ist ein stochastischer Prozeß $(S_n)_{n=0}^N$. Der Bank erwächst folgendes Kreditrisiko. Zum Zeitpunkt N erhält sie K, falls $S_N \geq K$ und S_N sonst. Sie bekommt also $h = \min\{K, S_N\} = S_N - (S_N - K)_+$. Zeigen Sie, daß der Kreditvertrag äquivalent zu folgendem Termingeschäft ist. Der Unternehmer verkauft seine Firma an die Bank und kauft eine Calloption auf den Rückkauf seiner Firma mit Ausübungspreis K. Beide Geschäfte werden (können) zum Zeitpunkt N ausgeübt werden.

AUFGABE 7.4. Man berechne den BS-Preis einer Putoption mit Restlaufzeit 6 Monate, Ausübungspreis 1250, $\sigma = 30\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr). Der Kurs der Aktie sei 1200 (1300).

AUFGABE 7.5. (Fortsetzung) Wie lautet das duplizierende Portfolio nach 3 Monaten?

AUFGABE 7.6. Man berechne den BS-Preis einer Putoption mit Restlaufzeit 1 Jahr, Ausübungspreis 1250, $\sigma = 15\%$ und $r = 2\%$ (pro Jahr). Der Kurs der Aktie sei 1200 (1300).

AUFGABE 7.7. (Fortsetzung) Wie lautet das duplizierende Portfolio nach 3 und nach 6 Monaten?

AUFGABE 7.8. Man berechne den BS-Preis einer Calloption mit Restlaufzeit 6 Monate, Ausübungspreis 950, $\sigma = 25\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr). Der Kurs der Aktie sei 900 (1000).

AUFGABE 7.9. (Fortsetzung) Wie lautet das duplizierende Portfolio nach 3 Monaten?

AUFGABE 7.10. Man berechne den BS-Preis einer Calloption mit Restlaufzeit 6 Monate, Ausübungspreis 950, $\sigma = 40\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr). Der Kurs der Aktie sei 900 (1000).

AUFGABE 7.11. (Fortsetzung) Berechnen wie lautet das duplizierende Portfolio nach 3 Monaten?

AUFGABE 7.12. Berechnen Sie den BS-Preis einer Binäroption, die 1 GE zahlt, falls $S_T > 1000$. Es sei $\sigma = 40\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr). Die Restlaufzeit betrage 1 Jahr und S_0 sei 1100 (1000, 900).

AUFGABE 7.13. Berechnen Sie das duplizierende Portfolio für eine Binäroption, die 1 GE zahlt, falls $S_T > 1000$. Es sei ein BS-Modell mit $\sigma = 40\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr) gegeben. Die Restlaufzeit betrage 1 Jahr und S_0 sei 1100 (1000, 900).

AUFGABE 7.14. Sei eine Option mit Laufzeit 18 Monate durch die Auszahlungsfunktion

$$h(S_T) = \begin{cases} 500 & \text{falls } S_T > 1500 \\ S_T - 1000 & \text{falls } 1500 \geq S_T > 1000 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie lautet der BS-Preis falls $\sigma = 40\%$ und $r = 4\%$ (pro Jahr) und $S_0 = 1000$ ist. Wie lautet das duplizierende Portfolio nach 6 Monaten und nach einem Jahr?

AUFGABE 7.15. Der Preis einer Calloption soll berechnet werden, die Volatilität ist aber nicht bekannt, sie muß geschätzt werden. Der Schätzwert ist 25%. Für diesen Wert ergibt sich ein BS-Preis von 57.9 und ein Vega von 16.1. Der Stillhalter verkauft die Option um 60. Wie hoch kann die Volatilität sein, wenn der Stillhalter zumindest den wirklichen Preis der Option verlangt hat?

AUFGABE 7.16. Der Preis einer Putoption soll berechnet werden, die Volatilität muß aber geschätzt werden. Sie ist $\hat{\sigma} = 0.25 \pm 0.05$. Für $\hat{\sigma} = 0.25$ ergibt sich ein BS-Preis von 9.0 und ein Vega von 57.2. In welchem Bereich schwankt der Preis der Option? Wie genau müßte σ geschätzt werden, damit sich der Preis von 9 um höchstens 1 GE unterscheidet?

AUFGABE 7.17. Der BS-Preis einer Calloption soll berechnet werden, es steht aber nur eine Schätzung der Volatilität zur Verfügung. Der Stillhalter setzt diesen Schätzwert so hoch an, daß er sicher ist, daß die wahre Volatilität diesen Wert sicher nicht übertrifft, und berechnet anschließend den BS-Preis. Nach Verkauf der Calloption dupliziert er die Calloption mit der Handelsstrategie, die dieser erhöhten Volatilität entspricht.
Zeigen Sie, daß der Händler zum Ausübungszeitpunkt mindestens den Betrag generiert hat, den er benötigt, um etwaige Zahlungen an den Käufer der Option bestreiten zu können.

AUFGABE 7.18. Ein Angestellter einer Bank soll eine Calloption verkaufen. Um den Preis zu bestimmen, berechnet er den BS-Preis. Nach Abschluß der Transaktion erfährt er, daß er sich beim Zinssatz geirrt hat, der Zinssatz wurde inzwischen gesenkt. Diskutieren Sie, ob er sich zu Gunsten der Bank oder des Kunden geirrt hat. Wie ist die Lösung bei einer Putoption?

AUFGABE 7.19. Leiten Sie Delta, Gamma, Vega, Rho und Theta für den BS-Preis einer Binäroption her.

AUFGABE 7.20. Schätzen Sie den Wert der folgenden Barriereoption mittels Simulation. Der Käufer der Option erhält S_T zum Preis $K = 200$, falls für alle $t \leq T$, $S_t \leq 250$. Dabei sei $T = 1$. Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

AUFGABE 7.21. Schätzen Sie den Wert der folgenden Option mittels Simulation. Der Stillhalter verpflichtet sich, dem Käufer der Option zum Zeitpunkt $T = 1$, $\max\{S_t \mid t \leq T\}$ auszuzahlen. Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

AUFGABE 7.22. Schätzen Sie den Wert der folgenden Option mittels Simulation. Der Stillhalter verpflichtet sich, dem Käufer der Option zum Zeitpunkt $T = 1$ die Aktie, die dann einen Wert S_T besitzt, zum Durchschnittspreis

$$\bar{S}_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

zu überlassen.

Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

AUFGABE 7.23. Schätzen Sie den Wert der folgenden Option mittels Simulation. Der Stillhalter räumt dem Käufer das Recht ein, zum Zeitpunkt $T = 1$ die Aktie, die dann einen Wert S_T besitzt, zum halben Durchschnittspreis

$$\bar{S}_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

zu verkaufen.

Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

AUFGABE 7.24. Schätzen Sie den Wert der folgenden Option mittels Simulation. Der Stillhalter räumt dem Käufer der Option das Recht ein, zum Zeitpunkt $T = 1$ die Aktie, die dann einen Wert S_T besitzt, zum halben Maximalpreis $\max\{S_t \mid t \leq T\}$ zu verkaufen.

Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

AUFGABE 7.25. Schätzen Sie den Wert der folgenden Option mittels Simulation. Der Stillhalter räumt dem Käufer der Option das Recht ein, zum Zeitpunkt $T = 1$ die Aktie, die dann einen Wert S_T besitzt, zum halben Maximalpreis $\max\{S_t \mid t \leq T\}$ zu kaufen.
Unterstellen Sie ein BS-Modell mit $\sigma^2 = 0.3$, $r = 0.025$ und $S_0 = 200$. Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Preis an.

Kapitel 8

Optimale Investitionspläne

8.1 Investitionsplanung

Ein Anleger plant einen Betrag ν in ein Wertpapiere S und den Bankkontoprozeß zu investieren und mit Hilfe einer selbstfinanzierende Handelsstrategie φ zum Zeitpunkt T ein Vermögen $V_T(\varphi)$ zu generieren. Dieses Vermögen ist stochastisch, da es vom zufälligen Verlauf der Kurse der Wertpapiere abhängt. Dem Vermögen $V_T(\varphi)$ entspricht ein Nutzen $u(V_T(\varphi))$. Der Anleger möchte diejenige Strategie verfolgen, deren erwarteter Nutzen

$$\mathbb{E}^P[u(V_T(\varphi))] \tag{8.1}$$

unter allen Strategien φ mit

$$V_0(\varphi) = \nu \tag{8.2}$$

maximal ist.

In einem vollständigen und arbitragefreien Markt kann die optimale Strategie φ mit den uns zur Verfügung stehenden Methoden gefunden werden.

Wir setzen voraus, daß

1. die Nutzenfunktion u strikt monoton, strikt konkav und differenzierbar ist. v sei die inverse Funktion von u'.

2. Der Bankkontoprozeß sei deterministisch,

   $$B_t = e^{rt},$$

   mit konstantem nominellem Zinssatz $r > 0$.

3. Der aus dem Wertpapier (S_t) und dem Bankkontoprozeß (B_t) bestehende Markt sei arbitragefrei und vollständig.

Wir erinnern, daß nur in einem arbitragefreien Markt eine selbstfinanzierende Strategie die (8.1) maximiert, existieren kann. Denn angenommen, φ sei eine selbstfinanzierende Strategie und ψ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_0(\psi) = 0$ und $V_T(\psi) > 0$. Dann ist $\mathbb{E}^P[u(V_T(\varphi + \psi))] > \mathbb{E}^P[u(V_T(\varphi))]$.

Angenommen, wir können statt der Strategie, die (8.1) maximiert, zuerst einmal nur den Wert $h = V_T(\varphi)$ angeben. Dann sind wir aber auch in der Lage, φ selbst anzugeben. φ ist die selbstfinanzierende Strategie, die h dupliziert.

8.1 SATZ. *Sei $\nu \in \mathbb{R}$ und φ die selbstfinanzierende Strategie, die* (8.1) *unter* (8.2) *maximiert. Es gibt $\alpha > 0$, sodaß*

(8.3)
$$V_T(\varphi) = v\left(\frac{\alpha}{B_T}\frac{dQ}{dP}\right).$$

α erfüllt

(8.4)
$$\mathbb{E}^Q[\tilde{V}_T(\varphi)] = \nu.$$

BEGRÜNDUNG.: Sei h die Funktion, die

$$\mathbb{E}^P[u(h)]$$

maximiert unter allen Funktionen, die

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{h}] = \nu$$

erfüllen. Wir zeigen, daß h durch (8.3) gegeben ist.

Sei g eine Funktion, die $\mathbb{E}^Q[\tilde{g}] = 0$ erfüllt und $\epsilon \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q[\tilde{h} + \epsilon\tilde{g}] &= \mathbb{E}^Q[\tilde{h}] + \epsilon\mathbb{E}^Q[\tilde{g}] \\ &= \nu + \epsilon \times 0 \\ &= \nu. \end{aligned}$$

Daher muß

$$\mathbb{E}^P[u(h)] \geq \mathbb{E}^P[u(h + \epsilon g)]$$

gelten. Die Funktion $\epsilon \mapsto \mathbb{E}^P[u(h+\epsilon g)]$ besitzt ein Maximum in $\epsilon = 0$, die Ableitung ist

$$\mathbb{E}^P[u'(h)g] = 0.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{E}^Q[\frac{dP}{dQ}u'(h)B_T], \\
\tilde{g} &= \frac{dP}{dQ}u'(h)B_T - \alpha.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{g}] = 0$$

und

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}^P[u'(h)g] \\
&= \mathbb{E}^Q[\frac{dP}{dQ}u'(h)B_T\tilde{g}] \\
&= \mathbb{E}^Q[(\tilde{g}+\alpha)\tilde{g}] \\
&= \mathbb{E}^Q[\tilde{g}^2] + \alpha\mathbb{E}^Q[\tilde{g}] \\
&= \mathbb{E}^Q[\tilde{g}^2].
\end{aligned}$$

Aus $\mathbb{E}^Q[\tilde{g}^2] = 0$ folgt $\tilde{g} = 0$ und damit

$$0 = \tilde{g} = \frac{dP}{dQ}u'(h)B_T - \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dQ}u'(h)B_T &= \alpha \\
u'(h) &= \frac{\alpha}{B_T}\frac{dQ}{dP} \\
h &= v\left(\frac{\alpha}{B_T}\frac{dQ}{dP}\right).
\end{aligned}$$

□

8.2 BEISPIEL. Ist $Q = P$, dann ist $dQ/dP = 1$ und

$$V_T(\varphi) = v(\alpha/B_T)$$

nichtstochastisch. Da

$$\nu = \mathbb{E}^Q[V_T(\varphi)/B_T] = V_T(\varphi)/B_T,$$

ist

$$V_T(\varphi) = \nu B_T.$$

Es ist in diesem Fall optimal, das Kapital ν zur Gänze in den Bankkontoprozeß (B_t) zu investieren.

□

8.3 BEISPIEL. Sei $u(x) = 1 - e^{-x}$. Es ist

$$\begin{aligned}
u'(x) &= e^{-x} \\
v(x) &= -\log(x) \\
V_T(\varphi) &= -\log(\frac{\alpha}{B_T}\frac{dQ}{dP}) \\
&= -\log(\alpha) + \log(B_T) - \log(\frac{dQ}{dP}).
\end{aligned}$$

Mit $B_T\nu = \mathbb{E}^Q[V_T(\varphi)]$ folgt

$$\begin{aligned}
B_T\nu &= -\log(\alpha) + \log(B_T) - \mathbb{E}^Q[\log(\frac{dQ}{dP})] \\
V_T(\varphi) &= \nu B_T - \log(\frac{dQ}{dP}) + \mathbb{E}^Q[\log(\frac{dQ}{dP})].
\end{aligned}$$

□

8.4 BEISPIEL. Sei $u(x) = \log(x)$ (für $x > 0$ und $u(x) = -\infty$ für $x \leq 0$). Dann ist

$$\begin{aligned}
u'(x) &= 1/x \\
v(x) &= 1/x \\
V_T(\varphi) &= \frac{B_T}{\alpha}\frac{dP}{dQ} \\
\tilde{V}_T(\varphi) &= \frac{1}{\alpha}\frac{dP}{dQ} \\
\nu &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}^Q[\frac{dP}{dQ}] = \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$V_T(\varphi) = \nu B_T \frac{dP}{dQ}.$$

Sei ein BS-Modell

$$S_t = S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}, \qquad B_t = e^{rt}$$

gegeben.

Wir wollen den Wertprozeß $(V_t(\varphi))$ berechnen. Wir erinnern, daß

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\theta^2 T/2 - \theta W_T} = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{-(\mu-r)/\sigma^2} e^{-T\kappa}$$

mit

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\mu - r}{\sigma} \\
\kappa &= \frac{(\mu - r)(\sigma^2/2 - r)}{2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} V_T(\varphi) &= \nu B_T \frac{dP}{dQ} \\ &= \nu \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{(\mu-r)/\sigma^2} e^{T(\kappa+r)}. \end{aligned}$$

Unter dem Maß Q ist $(\bar{W}_t) = (W_t + \theta t)$ eine Brown'sche Bewegung. Dann ist

$$\begin{aligned} V_T(\varphi) &= \nu e^{rT} e^{\theta^2 T/2 + \theta W_T} \\ \tilde{V}_t(\varphi) &= \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_T(\varphi) \mid S_t] \\ &= \mathbb{E}^Q[\nu e^{\theta^2 T/2 + \theta W_T} \mid S_t] \\ &= \mathbb{E}^Q[\nu e^{-\theta^2 T/2 + \theta \bar{W}_T} \mid S_t] \\ &= \nu e^{-\theta^2 t/2 + \theta \bar{W}_t} \\ &= \nu e^{\theta^2 t/2 + \theta W_t}, \\ V_t(\varphi) &= \nu \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{(\mu-r)/\sigma^2} e^{t(\kappa+r)}. \end{aligned}$$

Ein Investor will 1000 Euro investieren. Sei $\mu = 0.1, r = 0.03, \sigma^2 = 0.2,\ S_0 = 1$ und $T = 1$.

```
> r<-0.03
> mu<-0.1
> s2<-0.2
> T<-1
> S0<-1
> nu<-1000
> kappa<-(mu-r)*(s2/2-r)/(2*s2)
> kappa
[1] 0.01225
> (mu-r)/s2
[1] 0.35
> kappa+r
[1] 0.04225
> nu*(mu-r)/s2
[1] 350
```

Der Investor wird

$$1000\, S_t^{0.35}\, e^{0.04225t}$$

duplizieren. Dazu investiert er zum Zeitpunkt t

$$\varphi_t^1 = \nu \frac{\mu - r}{S_0 \sigma^2} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^{(\mu - r)/\sigma^2 - 1} e^{(\kappa + r)t}$$

Euro in die Aktie. In $t = 0$ ist das

$$\varphi_0^1 = \nu \frac{\mu - r}{S_0 \sigma^2} = 350.$$

Der Wert des Portfolios, das in die Aktie investiert wurde, ist

$$\begin{aligned}
\varphi_t^1 S_t &= \nu \frac{\mu - r}{S_0 \sigma^2} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^{(\mu - r)/\sigma^2 - 1} e^{(\kappa + r)t} S_t \\
&= \nu \frac{\mu - r}{\sigma^2} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^{(\mu - r)/\sigma^2} e^{(\kappa + r)t} \\
&= \frac{\mu - r}{\sigma^2} V_t(\varphi).
\end{aligned}$$

35% der Investition besteht aus Aktien, 65% liegt auf dem Bankkonto. □

8.5 BEISPIEL. Sei $0 < a < 1$ und $u(x) = x^a/a$ (für $x \geq 0$ und $u(x) = -\infty$ für $x < 0$). Dann ist

$$\begin{aligned}
u'(x) &= x^{a-1} \\
v(x) &= x^{1/(a-1)}.
\end{aligned}$$

Sei $b = -1/(a-1)$. Dann ist

$$V_T(\varphi) = \left(\frac{B_T}{\alpha} \frac{dP}{dQ} \right)^b.$$

$\nu = \mathbb{E}^Q[\tilde{V}_T(\varphi)]$ ergibt

$$V_T(\varphi) = \nu B_T \left(\frac{dP}{dQ} \right)^b / \mathbb{E}^Q[\left(\frac{dP}{dQ} \right)^b].$$

Im BS-Modell ist

$$\frac{dP}{dQ} = \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^{(\mu - r)/\sigma^2} e^{T\kappa}$$

und

$$V_T(\varphi) = \nu e^{rT} \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^{b(\mu - r)/\sigma^2} / \mathbb{E}^Q[(S_T/S_0)^{b(\mu - r)/\sigma^2}].$$

Falls

$$\frac{b(\mu - r)}{\sigma^2} = 1$$

ist

$$V_T(\varphi) = \nu \frac{S_T}{S_0}.$$

Der Betrag ν wird zur Gänze in das Wertpapier investiert. □

8.2 Konsum-und Investitionsplanung

Typischerweise zielt der Investor bei der Veranlagung seines Vermögens nicht ausschließlich auf den Nutzen dieser Veranlagung zum Zeitpunkt T ab. Er will auch zu Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ einen Teil des Vermögens konsumieren. Entsprechend wird er eine Investitionsstrategie verfolgen, die den Nutzen über die gesamte Periode maximiert.

Ein **Konsumprozeß** ist ein adaptierter Prozeß (C_t) mit $C_t \geq 0$. C_t ist der zum Zeitpunkt t konsumierte Teil des Vermögens. Wir betrachten ausschließlich Konsumprozesse, die nur an endlich vielen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ von 0 verschieden sind.

Ein **Investitions-und Konsumplan** besteht aus einem Anfangsvermögen ν, einem Konsumprozeß (C_t) mit Konsumationszeitpunkten $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ und einer Strategie φ.

Das Vermögen zum Zeitpunkt t ist $V_t(\varphi) = \varphi_t^0 B_t + \varphi_t^1 S_t$. Der Konsum (C_t) kann durch ν finanziert werden, wenn es eine Strategie φ gibt, sodaß

1. $V_0(\varphi) = \nu$,
2. (φ_t) ist selbstfinanzierend in $t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, \ldots, n$,
3. $V_t(\varphi) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$,
4. $$V_t(\varphi) = \lim_{s \to t-} V_s(\varphi) - C_t$$
   für $t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

Wenn der Konsum C_t (zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$) festgelegt ist, benötigt man zur Finanzierung ein Kapital der Höhe

$$\mathbb{E}^Q[\sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{t_i}].$$

Abschließend soll untersucht werden, wie der Konsum (C_t) optimal zu wählen ist. Sei $\nu > 0$ ein Betrag, der investiert werden kann. Der Anleger wählt einen Investitions- und Konsumplan, der den Nutzen, den er aus dem Konsum (C_t) zieht, berücksichtigt. Nutzen, der in der Gegenwart erzielt werden kann, wird meist dem gleichen, aber erst in der Zukunft zu genießenden, vorgezogen. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Diskontierungsfakoren und u eine auf $\mathbb{R}_+$ strikt monoton wachsende und strikt konkave Nutzenfunktion mit $u(x) = -\infty$ für $x < 0$.

Der Anleger wählt für gegebene Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ den Konsumprozeß (C_t), der

$$\mathbb{E}^P[\sum_{i=1}^{n} a_i u(C_{t_i})] \tag{8.5}$$

unter allen Konsumprozessen, die mit ν finanzierbar sind, maximiert.

Wie man leicht sieht, ist dann $C_T = V_T$. Es ist das folgende Optimierungsproblem zu lösen. Man maximiere (8.5) unter allen Konsumprozessen (C_t), die

$$\mathbb{E}^Q[\sum_{i=1}^n \tilde{C}_{t_i}] = \nu \tag{8.6}$$

erfüllen. Ein Konsumprozeß (und der dazugehörige Investitions- und Konsumplan), der (8.5) unter (8.6) maximiert, heißt **optimaler** Konsumprozeß (Investitions- und Konsumplan).

8.6 SATZ. *Seien v die zu u' inverse Funktion, $\nu > 0$ und*

$$\pi_t = \mathbb{E}^P\left[\frac{dQ}{dP} \mid Y_1, \ldots, Y_t\right] / B_t.$$

Ein optimaler Konsumprozeß $(C_t)_{t \in \{t_1, \ldots, t_n\}}$, der mit ν finanzierbar ist, besitzt die Darstellung

$$C_{t_i} = v\left(\frac{\alpha}{a_i}\pi_{t_i}\right). \tag{8.7}$$

$\alpha > 0$ wird so gewählt, daß (8.6) erfüllt ist.

8.7 BEISPIEL. Ist $P = Q$, dann ist $dQ/dP = 1$ und damit ist $\pi_t = 1/B_t$, $C_{t_i} = v(\alpha/(a_i B_{t_i}))$. Ist weiters $a_n = 1/B_{t_i}$, dann ist C_{t_i} konstant. □

8.8 BEISPIEL. Sei $u(x) = \log(x)$ für $x > 0$. $u'(x) = 1/x$ und $v(x) = 1/x$ ergibt

$$C_{t_i} = \frac{a_i}{\alpha \pi_{t_i}}.$$

Aus

$$\begin{aligned}
\nu &= \mathbb{E}^Q[\sum_{i=1}^n \tilde{C}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}^Q[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\alpha \pi_{t_i} B_{t_i}}] \\
&= \mathbb{E}^P[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\alpha \pi_{t_i} B_{t_i}} \pi_{t_i} B_{t_i}] \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n a_i
\end{aligned}$$

folgt

$$\alpha = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

und

$$C_{t_i} = \nu \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \frac{1}{\pi_{t_i}}.$$

□

8.9 BEISPIEL. (Fortsetzung). Sei ein BS-Modell gegeben. Wir verwenden die Notation aus Beispiel 8.4. Es ist

$$\pi_t = e^{-rt} e^{-\theta^2 t/2 + \theta W_t} = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{(\mu-r)/\sigma^2} e^{\kappa t}$$

und

$$C_{t_i} = \nu \frac{a_i e^{(r+\kappa)t_i}}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{(\mu-r)/\sigma^2}.$$

□

8.3 Aufgaben

AUFGABE 8.1. Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-x}$ den Wert $V_t(\varphi)$ der Strategie φ, die aus dem Anfangskapital ν den maximalen erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt 1 generiert. Setzen ein BS-Modell mit $r = 0.03, \mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.4$ und $S_0 = 100$ voraus. Wie lautet das duplizierende Portfolio?

AUFGABE 8.2. Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(x) = \log(x)$ den Wert $V_t(\varphi)$ der Strategie φ, die aus dem Anfangskapital ν den maximalen erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt 1 generiert. Setzen ein BS-Modell mit $r = 0.03, \mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.4$ und $S_0 = 100$ voraus. Wie lautet das duplizierende Portfolio?

AUFGABE 8.3. Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(x) = x^a/a$ den Wert $V_t(\varphi)$ der Strategie φ, die aus dem Anfangskapital ν den maximalen erwarteten Nutzen zum Zeitpunkt 1 generiert. Setzen ein BS-Modell mit $r = 0.03, \mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.4$, $S_0 = 100$ und $a = 1/2$ voraus. Wie lautet das duplizierende Portfolio?
Wie lautet die Lösung für $a = 9/16$?

AUFGABE 8.4. Man überlege, ob eine Strategie, die eine Put- oder eine Calloption dupliziert, optimal sein kann, d.h., ob bei gegebenem Anfangskapital ν, gegebener strikt monotoner und strikt konkaver Nutzenfunktion u, eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die in $t = T$ den erwarteten Nutzen maximiert, den Wert $V_T(\varphi) = (K - S_T)_+$ bzw. $V_T(\varphi) = (S_T - K)_+$ haben kann.

AUFGABE 8.5. Sei ein BS-Modell gegeben. φ sei die selbstfinanzierende Handelsstrategie, die für das Anfangskapital ν den erwarteten Nutzen in $t = T$ maximiert. Man zeige, daß für $r > \mu$, $V_T(\varphi)$ eine fallende, für $r < \mu$ eine wachsende Funktion von S_T ist.

AUFGABE 8.6. Sei ein arbitragefreies, vollständiges, finanzmathematisches Modell gegeben. Man zeige, daß ein Konsumprozeß (C_t) genau dann durch das Anfangskapital ν finanzierbar ist, wenn

$$\nu \geq \mathbb{E}^Q[\sum_{i=1}^n \tilde{C}_{t_i}].$$

AUFGABE 8.7. Sei ein BS-Modell mit $r = 0.03, \mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.4$, $S_0 = 100$ gegeben. Ein Konsument möchte zu den Zeitpunkten $t = 1/12, 2/12 \ldots, T = 1$,

$$C_t = 0.1 S_t,$$

falls $S_t > S_0$ konsumieren. Falls $S_t \leq S_0$ verzichtet er auf den Konsum.
Wie hoch muß sein Anfangskapital sein? Wie lautet die Strategie, diesen Konsumprozeß zu generieren?

AUFGABE 8.8. Sei ein BS-Modell mit $r = 0.03, \mu = 0.1$, $\sigma^2 = 0.4$, $S_0 = 100$ gegeben. Ein Konsument möchte 1000 GE ein Jahr lang investieren. Er plant, am Ende jedes Monats einen Teil des Vermögens zu konsumieren. Es sei $u(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ (und gleich $-\infty$ sonst) und $a_t = e^{-rt}$. Wie lautet C_t und das duplizierende Portfolio?