Dynamische Systeme und Zeitreihenanalyse

Differenzengleichungen erster Ordnung
Kapitel 1

Statistik und Mathematik – WU Wien

Michael Hauser

Lernziele

- Differenzenbildung, Differenzengleichung
- Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lösen
- Dynamische Stabilität von Differenzengleichungen erkennen
- Dynamischen Multiplikator interpretieren

Differenzengleichung 1-ter Ordnung

Eine **lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten 1-ter Ordnung** in den reellen Zahlen lautet

$$y_{t+1} + a\, y_t = c$$

a und $c \in \mathbb{R}$, mit dem fix gewählten **Anfangswert**

$$y_0 \in \mathbb{R}$$

Wir schreiben kurz **LDG** für lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten.

Lösung einer LDG:
Jede Funktion y_t in t, $y_t = f(t)$, die diese Differenzengleichung zusammen mit der Anfangswertbedingung erfüllt, ist eine Lösung.

Differenz, Differenzengleichung

Differenzenbildung:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Die **Differenz** ist die Veränderung in y zwischen 2 benachbarten Zeitpunkten.

Beispiel:

- Die folgenden Anschreibungen sind äquivalent:

$$\Delta y_t = 2, \qquad y_t - y_{t-1} = 2,$$

$$y_{t+1} - y_t = 2, \qquad y_{t+1} = y_t + 2$$

LDG $y_{t+1} - y_t = 2$: linear, inhomogen und von 1.Ordnung.

Weiteres Beispiel

Beispiel:

- Die folgenden Anschreibungen sind äquivalent:

$$\Delta y_t = -0.1\, y_{t-1}, \qquad y_t - y_{t-1} = -0.1\, y_{t-1},$$

$$y_t - 0.9\, y_{t-1} = 0, \qquad y_{t+1} - 0.9\, y_t = 0,$$

$$y_{t+1} = 0.9\, y_t$$

LDG $y_{t+1} - 0.9\, y_t = 0$: linear, homogen und von 1.Ordnung

Lösung: Iterative Methode

Iterative Methode: Beispiele

Beispiele: 2 verschiedene Arten von Lösungen

- $y_{t+1} - y_t = 2,\ y_0 = 15$:
  $y_1 = y_0 + 2$
  $y_2 = y_1 + 2 = (y_0 + 2) + 2 = y_0 + 2 \cdot (2)$
  $y_3 = y_2 + 2 = (y_0 + 2 \cdot 2) + 2 = y_0 + 3 \cdot (2)$
  $\ldots$
  $y_t = y_0 + t \cdot (2) = 15 + 2\,t$ Steigt linear mit t.
- $y_{t+1} - 0.9\,y_t = 0,\ y_0 = 3$:
  $y_1 = 0.9\,y_0$
  $y_2 = 0.9\,y_1 = 0.9\,(0.9\,y_0) = 0.9^2\,y_0$
  $\ldots$
  $y_t = (0.9)^t\,y_0 = (0.9)^t\,3$ Konvergiert geometrisch gegen Null.

Iterative Methode: Allgemein

- Die iterative Methode wird nur bei LDGen niedriger Ordnung angewendet.
- Sie hilft die Dynamik besser zu verstehen.

Allgemein gilt für $y_{t+1} - b\,y_t = c$:

$$y_t = b^t\,y_0 + c \cdot \sum_{i=0}^{t-1} b^i$$

$b^t\,y_0$ wird unten zur komplementären Lösung,
$\lim_{t\to\infty} c \cdot \sum_{i=0}^{t-1} b^i < \infty$ zur partikulären Lösung.

Beispiel: $m\,y_{t+1} - n\,y_t = 0$

$m\,y_{t+1} - n\,y_t = 0$ ist äquivalent zu $y_{t+1} - (\frac{n}{m})\,y_t = 0$.
Die Lösung ist laut obigem Beispiel:

$$y_t = (\frac{n}{m})^t\,y_0$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y_t = A\,b^t$$

wobei

- A vom Anfangswert abhängt, und
- b vom Parameter vor y_t.

Lösung: Allgemein

Allgemeine Lösung für $y_{t+1} + a\, y_t = c$

Die Lösung besteht aus 2 Komponenten:

- **partikuläre Lösung**: y_p
  Das ist jede Lösung der inhomogenen LDG,
  zB das intertemporale Gleichgewicht von y, $\bar{y}$.
- **komplementäre Lösung**: y_c
  Das ist die allgemeine Lösung der reduzierten, homogenen LDG
  $$y_{t+1} + a\, y_t = 0$$
  die Abweichung des Zeitpfades vom "Gleichgewicht".

Die **allgemeine Lösung** lautet

$$y = y_p + y_c$$

Komplementäre Lösung: y_c

Wir gehen von der homogenen LDG

$$y_{t+1} + a\, y_t = 0$$

aus und verwenden eine allgemeine Form der Lösung. Wir haben sie oben hergeleitet.

Der **Ansatz** lautet:

$$y_t = A\, b^t$$

Dies setzen wir in die LDG ein und erhalten

$$\begin{aligned} A\, b^{t+1} + a\, A\, b^t &= 0 \;\; | : A\, b^t, \quad A, b \neq 0 \\ b + a &= 0 \\ b &= -a \end{aligned}$$

Komplementäre Lösung: y_c (Fs)

Das gibt als komplementäre Lösung:

$$y_c = A\, b^t = A\,(-a)^t$$

Partikuläre Lösung: y_p für $a \neq -1$

Wir suchen eine beliebige Lösung von

$$y_{t+1} + a\, y_t = c$$

Wir versuchen den **Ansatz**

$$y_t = k = const$$

Dh: $y_t = y_{t+1} = \ldots = k = const.$
Einsetzen liefert:

$$k + a\,k = c \quad \longrightarrow \quad k = \frac{c}{1+a}, \quad a \neq -1$$

Das ist die Lösung für den **Fall:** $a \neq -1$.

Partikuläre Lösung: y_p für $a = -1$

Fall: $a = -1$

- $y_t = y_{t+1} = \ldots = k$ ist nicht definiert. Eine andere Lösung muss gefunden werden.
- **Ansatz**:

$$y_p = k\,t$$

Einsetzen liefert
$y_{t+1} + a\,y_t = c \quad \longrightarrow \quad k\,(t+1) + a\,k\,t = c$
Somit $k = \frac{c}{1+(a+1)\,t} = c$

$$y_p = c\,t$$

Es liegt ein sich ’bewegendes’ Gleichgewicht vor.

$y_{t+1} + a y_t = c$: Die Lösung $y = y_c + y_p$

Fall $a \neq -1$:

$$y_t = A\,(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

Mit Anfangswert y_0: $y_0 = A\,(-a)^0 + c/(1+a)$

$$A = y_0 - \frac{c}{1+a}$$

Fall $a = -1$: $\quad y_t = A\,(-a)^t + c\,t$

$$y_t = A + c\,t$$

Mit Anfangswert y_0: $y_0 = A\,(-a)^0 + c \cdot 0$

$$A = y_0$$

$y_{t+1} + a y_t = c$: Die Lösung $y = y_c + y_p$ (Fs)

Probe:
Wir setzen die Lösungen in die LDG $y_{t+1} + a\,y_t = c$ mit y_0 als Anfangswert ein.

Beispiel: $y_0 = 7/4, \quad y_{t+1} - 5\,y_t = 1$

Wir wissen $a = -5$ $(\neq -1)$. Daher $y_c = A\,b^t$ und $y_p = k$.

y_c: $y_c = A\,b^t$. Einsetzen in die homogene LDG ergibt

$$\begin{aligned} A\,b^{t+1} - 5\,A\,b^t &= 0 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

y_p: $y_p = k$. Einsetzen in die inhomogene LDG ergibt

$$\begin{aligned} k - 5\,k &= 1 \\ k &= -1/4 \end{aligned}$$

y_t: $y = y_c + y_p$. Beides zusammengefasst ergibt

$$y_t = A\,5^t - 1/4$$

Beispiel (Fs)

y_0: y_t für $t = 0$ gibt

$$y_0 = A\,5^0 - 1/4 = 7/4$$

$$A = 2$$

Die Lösung für y_t ist daher

$$y_t = 2 \cdot 5^t - 1/4$$

Alternativ kann man direkt in die durch Iteration abgeleiteten Formeln einsetzen.

Dynamische Stabilität

Dynamische Stabilität: Kriterium

Wir klassifizieren die verschiedenen Lösungstypen nach deren dynamischen Eigenschaften. Sie werden vom Verhalten der komplementären Lsg y_c als Abweichung vom intertemporalen Gleichgewicht bestimmt.

Das **Kriterium** ist der Wert von b $(= -a)$. Ist

- $|b| < 1$, so ist $y_c = A\,b^t$ stabil und konvergiert geometrisch gegen y_p.
  ZB: $y_c = A\,(0.5)^t$ oder $y_c = A\,(-0.2)^t$.
- $|b| > 1$, so ist $y_c = A\,b^t$ instabil und konvergiert nicht gegen y_p. Der Pfad ist explosiv.
  ZB: $y_c = A\,(2)^t$ oder $y_c = A\,(-5)^t$.

Alternierende und monotone Pfade

Das Vorzeichen von b bestimmt, ob der Pfad von y_c stets das selbe oder ein alternierendes Vorzeichen aufweist. Ist

- $b > 0$, so besitzt er stets dasselbe Vorzeichen. Das Vorzeichen wird von A bestimmt.
  ZB: $y_c = A\,(0.5)^t$.
- $b < 0$, so zeigt er ein alternierendes Verhalten.
  ZB: $y_c = A\,(-0.5)^t$ Der Betrag von y_c, $|y_c|$, verläuft monoton.

Dynamische Stabilität: A

Der Wert von A skaliert den Pfad von y_c.

- Für $|A| > 1$ wird er aufgeblasen.
  ZB: $y_c = 100\,(0.5)^t$.
- Für $|A| < 1$ wird er zusammengezogen.
  ZB: $y_c = 0.1\,(0.5)^t$.

Für $b > 0$ bestimmt das Vorzeichen von A die Lage des Pfades von y_c gegenüber y_p.

- Für $A > 0$ liegt er “oberhalb” von y_p.
  ZB: $y = 2\,(0.5)^t + 7$.
- Für $A < 0$ liegt “unterhalb” von y_p.
  ZB: $y = (-2)\,(0.5)^t + 7$.

Dynamische Stabilität: $b = +1$

Die Lösungen für $b = +1$ $(a = -1)$ und $b = -1$ $(a = +1)$ unterscheiden sich wesentlich von den andern.

Fall $b = +1$:

$$y_t = A + c\,t, \quad A = y_0$$

- $y_t = A\,(1)^t + y_p$: Es liegt kein explosives Verhalten vor.
- $y_t = A + y_p \neq y_p$ außer $A = 0$. Es liegt keine Konvergenz von y_c gegen y_p vor.
  Im Spezialfall $A = 0$, der homogenen LDG, ist $y_c = 0$ und man kann nicht von einer Konvergenz im engeren Sinn sprechen.
- Der Pfad hängt auch langfristig vom Anfangswert ($A = y_0$) ab.

Dynamische Stabilität: $b = -1$

Fall $b = -1$:

$$y_t = y_c + y_p = A\,(-1)^t + c/2, \quad A = y_0 - c/2$$

- y_c konvergiert nicht gegen y_p (außer $A = 0$).
- Der Pfad hängt auch langfristig vom Anfangswert ab.

Dynamischer Multiplikator

Verallgemeinerung des Modells

Lassen wir zeitabhängige Konstante zu, dann gilt für $y_{t+1} - b\,y_t = c_{t+1}$:

$$y_t = b^t\,y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} b^i\,c_{t-i}$$

Der **dynamische Multiplikator** misst den Einfluß eines vergangenen c-Wertes auf y_t bzw des aktuellen c_t auf ein zukünftiges y_{t+j}:

$$\frac{\partial y_t}{\partial c_{t-i}} = b^i \qquad \text{bzw} \qquad \frac{\partial y_{t+j}}{\partial c_t} = b^j$$

(Herleitung durch Iteration)

$$
\begin{array}{lclclcl}
y_0 \\
y_1 - b\,y_0 = c_1 & \longrightarrow & y_1 = c_1 + b\,y_0 \\
y_2 - b\,y_1 = c_2 & \longrightarrow & y_2 = c_2 + b\,y_1 & \longrightarrow & y_2 = c_2 + b\,c_1 + b^2\,y_0 \\
y_3 - b\,y_2 = c_3 & \longrightarrow & y_3 = c_3 + b\,y_2 & \longrightarrow & \\
 & & & & y_3 = c_3 + b\,c_2 + b^2\,c_1 + b^3\,y_0 \\
\vdots \\
y_t = \sum_{i=0}^{t-1} b^i\,c_{t-i} + b^t\,y_0
\end{array}
$$

Multiplikator und Stabilität

Der dynamische Multiplikator hängt eng mit der dynamischen Stabilität der LDG zusammen.

Ist $|b| < 1$, verlieren vergangene Werte mit der dazwischenliegenden Zeitspanne an Einfluss auf y_t. Alte Werte werden vergessen. Die LDG ist stabil.

Ist $b = 1$, bleibt der Einfluss jedes vergangenen Wertes auf y_t erhalten. Es wird nichts vergessen.

Dynamischer Multiplikator: Beispiel

Beispiel: (Impulse response)

Angenommen die Verkäufe s_t hängen von den Verkäufen der Vorperiode s_{t-1} und den aktuellen Werbeausgaben a_t ab:

$$s_t = \alpha\,s_{t-1} + a_t$$

Der dynamische Multiplikator für Werbeausgaben 4 Perioden zuvor ist

$$\frac{\partial s_t}{\partial a_{t-4}} = \alpha^4$$

Der Einfluß der heutigen Werbeausgeben auf die zukünftigen Verkäufe in $t+3$ ist

$$\frac{\partial s_{t+3}}{\partial a_t} = \alpha^3$$