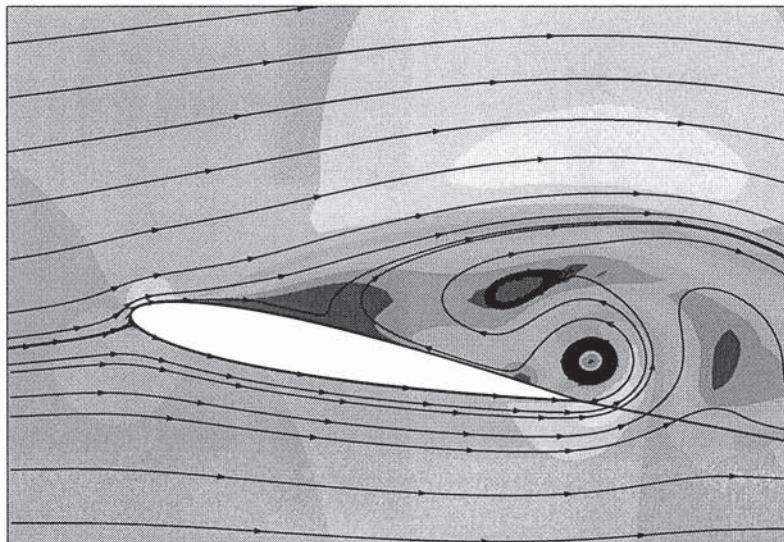
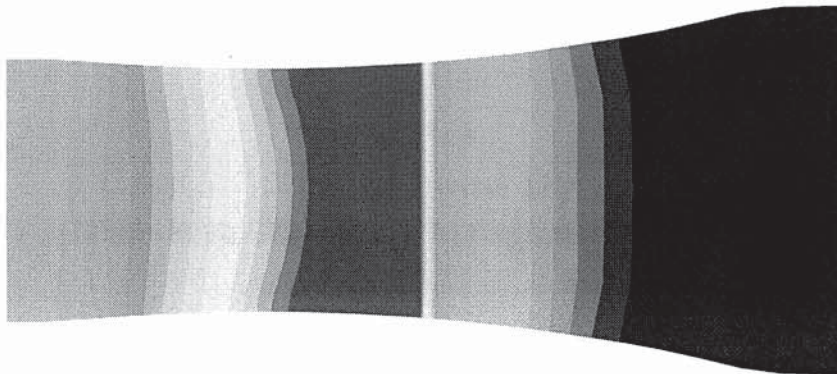


Numerische Verfahren in der Energietechnik

Vorlesung: 307.021, Übung: 307.022

Kapitel: Computational Fluid Dynamics (Numerische Strömungsmechanik)



ao.Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Sanz

Institut für Thermische Turbomaschinen und Maschinendynamik, TU Graz
Inffeldgasse 25, A-8010 Graz, <http://www.ttm.tugraz.at>
Tel.: 0316/873-7229, Fax: 0316/873-7234, eMail: wolfgang.sanz@tugraz.at

Informatik in der Energie- und Umwelttechnik

Teil 5: CFD

1. Was sind die Navier-Stokes-Gleichungen?
2. Formuliere in Worten die Kontinuitätsgleichung!
3. Was benötigt man zusätzlich, um das System der Erhaltungsgleichungen zu schließen?
4. Was berechnet man mit dem Gesetz von Sutherland?
5. Was versteht man unter konservativer Form einer Differentialgleichung?
6. Was beschreiben elliptische Differentialgleichungen, was hyperbolische?
7. Unterschied in der Störungsausbreitung von Unterschall- und Überschallströmung?
8. Welche Schwierigkeit ergibt sich beim Lösen von stationären transsonischen Strömungen? Was ist der Ausweg?
9. Wie funktioniert ein zeititeratives Verfahren?
10. Was ist ein strukturiertes Netz?
11. Unterschied zwischen expliziten und impliziten Verfahren?
12. Was ist die exakte Lösung der eindimensionalen Wellengleichung?
13. Diskretisiere die eindimensionale Wellengleichung? Welche Diskretisierung „funktioniert“?
14. Was ist die CFL- bzw. Courant-Zahl?
15. Was versteht man unter Upwind-Verfahren?
16. Wie kann man ein zentrales explizites Verfahren stabilisieren?
17. Was ist „artificial dissipation“?
18. Eigenschaften der Runge-Kutta-Verfahren?
19. Wie hoch ist die Stabilitätsschranke (CFL-Zahl) bei einem 4-Schritt-Runge-Kutta-Verfahren?
20. Ist ein implizites zentrales Verfahren stabil?
21. Wofür steht das Kürzel „RHS“?
22. Welche Ordnung hat ein zentrales Verfahren i.A.? Welche Ordnung hat der künstliche Dissipationsterm?
23. Was versteht man unter dem „Beam-Warming-Verfahren“?
24. Was versteht man unter dem „Jameson-Verfahren“?
25. Was versteht man unter „flux vector splitting“?
26. Was ist das „Riemann-Problem“?
27. Was versteht man unter Riemann-Löser bzw. Godunov-Verfahren?
28. Was ist das Roe-Verfahren?
29. Wovon hängt die Anzahl der vorgegebenden Randbedingungen ab?
30. Wie viele Randbedingungen gibt man bei Unterschall-Zuströmung vor, wie viele bei Überschall-Zuströmung?
31. Wie viele Randbedingungen gibt man bei Unterschall-Abströmung vor, wie viele bei Überschall-Abströmung?
32. Welche Randbedingungen geben wir bei der Lavaldüse vor?
33. Wie lauten die Randbedingungen für eine feste Wand?
34. Was versteht man unter Local Time Stepping?
35. Wie funktioniert ein Multigrid-Verfahren?
36. Unterschied in den Rechenetzen für reibungsfreie und viskose Strömung?
37. Was ist y^+ und wofür ist es ein wichtiges Maß?
38. Was ist Turbulenz?
39. Welche Größe ist ein Maß für Turbulenz?
40. Was versteht man unter DNS?
41. Alternative zu DNS? Was benötigt man aber dafür zusätzlich?
42. Was bedeutet RANS?
43. Ansatz von Boussinesq?
44. Was ist k , die turbulente kinetische Energie?
45. Wie viele zusätzliche Differentialgleichungen benötigt das k - ϵ Modell?
46. Wie finde ich die Eintrittsrandbedingungen für das k - ϵ Modell?
47. Was bedeutet Reynolds Stress Closure?
48. Was bedeutet LES und wie funktioniert es?

Inhaltsangabe

1. Einleitung	1
2. Grundgleichungen der Strömungsmechanik	4
2.1. Die Navier-Stokes-Gleichungen	4
2.2. Die Grundgleichungen in konservativer Form	6
3. Zeititerative Verfahren für die Berechnung stationärer Strömungen - Grundlagen	7
3.1. Allgemeines	7
3.2. Ablauf eines expliziten zeititerativen Algorithmus	8
3.2.1. Diskretisierung des Raumes	8
3.2.2. Vorbelegung des Strömungsfeldes	9
3.2.3. Zeitliche Iteration	9
4. Betrachtung verschiedener zeitlicher und räumlicher Diskretisierungen	10
4.1. Explizites v. implizites Verfahren	10
4.2. Stabilitätsbetrachtung anhand der eindimensionalen Wellengleichung	10
4.3. Explizites Euler-Verfahren	11
4.4. Runge-Kutta-Verfahren	14
4.5. Implizites Euler-Verfahren	15
4.6. Newton-Algorithmus für nichtlineare Systeme	17
5. Zentrale Verfahren	18
5.1. Künstliche Dissipation	18
5.2. Das mehrdimensionale Beam&Warming-Verfahren	20
5.3. Jameson's Mehrstufen-Verfahren	20
6. Upwind-Verfahren	21
6.1. "Flux Vector Splitting"-Verfahren	21
6.2. Riemann-Löser (Godunov-Verfahren)	22
7. Randbedingungen	24
7.1. Randbedingungen für thermische Turbomaschinen	25
8. Techniken zur Konvergenzbeschleunigung	27
8.1. Local Time Stepping	27
8.2. Mehrgitter-Verfahren	27
9. Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen	29
9.1. Diskretisierung der viskosen Terme	29
9.2. Rechennetze für reibungsbehaftete Strömungen	29
9.3. Randbedingungen für reibungsbehaftete Strömungen	29
10. Turbulenzmodellierung	30
10.1. Allgemeine Eigenschaften	30
10.2. Turbulenzmodelle	31
10.3. Wirbelviskositätsmodelle	32
10.4. Reynolds Stress Closure	34
10.5. Large Eddy Simulation	34
11. Ablauf eines CFD-Codes am Beispiel des Runge-Kutta-Verfahrens	35
12. Druckkorrektur-Verfahren	36
Literatur	37

1 Einleitung

Sehr viele Phänomene in der Technik, wie Strömungs- und Wärmeleitungsvorgänge, werden durch (Systeme von) Differentialgleichungen beschrieben, die in der Regel nicht analytisch gelöst werden können. Durch das Aufkommen der Computer und die starke Leistungssteigerung der Rechnerleistungen in den letzten 10 – 20 Jahren ist es möglich geworden, diese Probleme numerisch zu lösen.

CFD (Computational Fluid Dynamics) befaßt sich nun mit der mit Hilfe von Computern durchgeführten numerischen Lösung der Grundgleichungen der Strömungsmechanik.

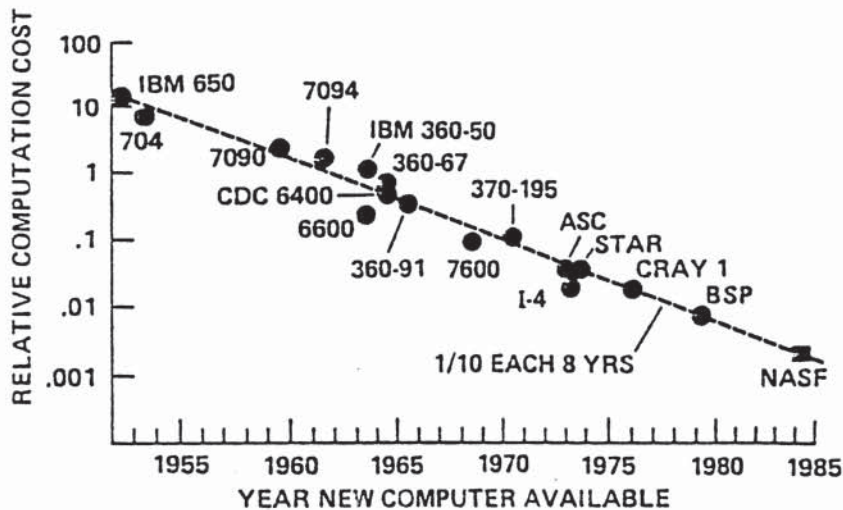


Fig. 1.1. Relative cost of computation for a given algorithm and flow (after Chapman, 1979; reprinted with permission of AIAA)

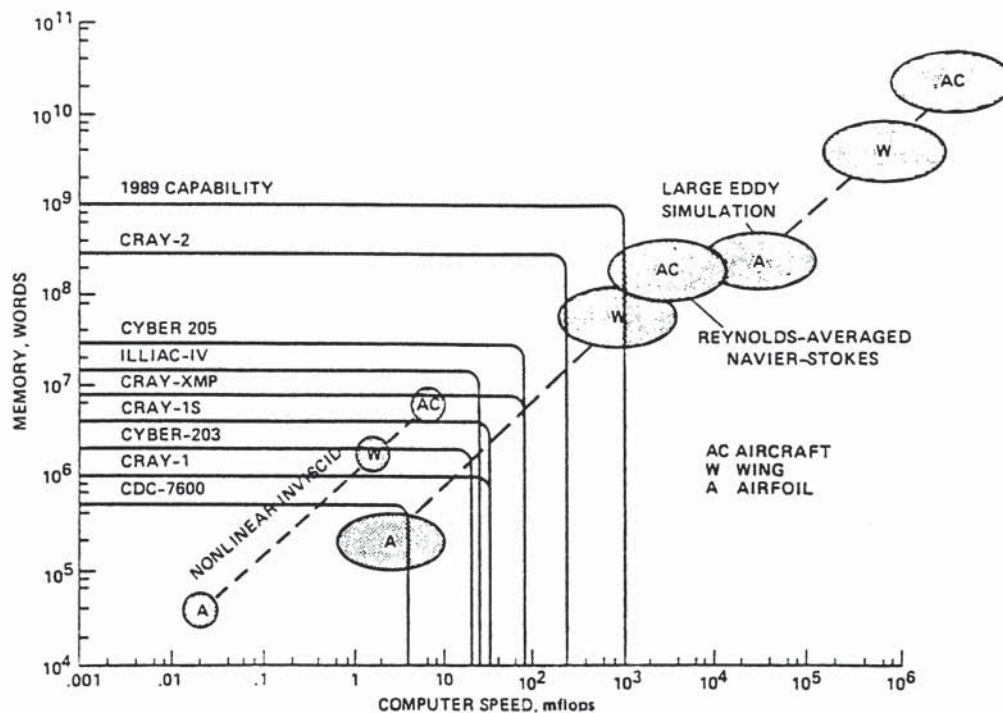


Fig. 1.3. Computer speed and memory requirements for CFD (after Bailey, 1986; reprinted with permission of Japan Society of Computational Fluid Dynamics)

CFD ist heute weit verbreitet, die Anwendungsgebiete umfassen

- Meteorologie
- Medizintechnik (Blutströmungen)
- Automobiltechnik
- Raumfahrt
- Luftfahrt
- Turbomaschinen
- Wärmetechnik
- Biologie
- etc, ...

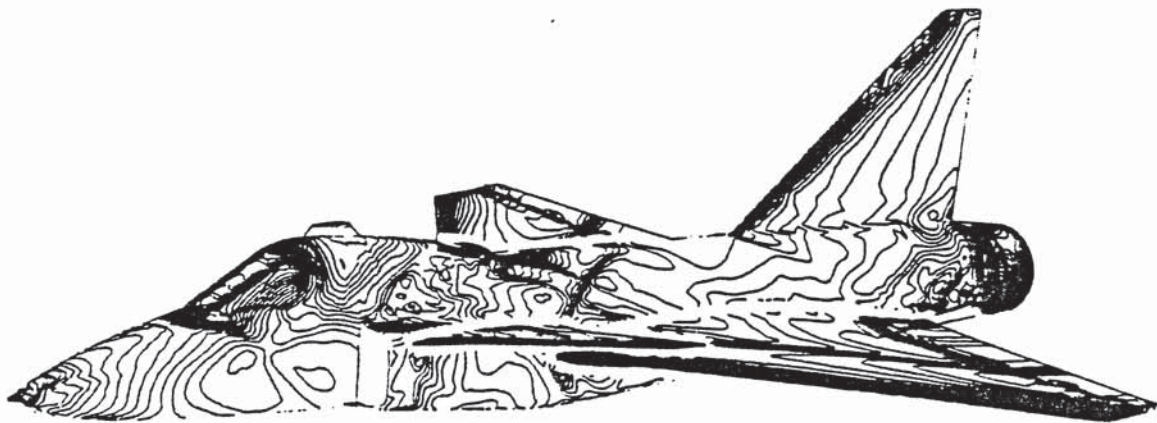


Fig. 1.4. Surface pressure distribution on a typical military aircraft. Surface pressure contours, $\Delta C_p = 0.02$ (after Arlinger, 1986; reprinted with permission of Japan Society of Computational Fluid Dynamics)

Es gibt derzeit rund 20 größere CFD-Softwarepakete, die weltweit vertrieben werden. Obwohl sie sehr allgemein gehalten sind, haben sich die Hersteller meist auf spezielle Anwendungen spezialisiert (z.B. FIRE und StarCD auf Verbrennungsmotoren). Der Umsatz, der weltweit mit CFD-Software gemacht wird, soll im Jahre 2000 ca. 120 Mio. US-\$ betragen.

2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

2.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Stellt man an einem beliebigen infinitesimalen Volumenelement die Bilanzen für Masse, Impuls und Energie auf, so erhält man die Kontinuitätsgleichung, die Impulsgleichung und die Energiegleichung in differentieller Form (Anderson et al., 1984). In den folgenden Gleichungen entspricht ρ der Dichte, \mathbf{c} der Absolutgeschwindigkeit, p dem statischen Druck, T der Temperatur und e der totalen inneren Energie je Volumseinheit. Die Größe e zur Darstellung der Energiegleichung wird in der Strömungsrechnung gegenüber der sonst üblichen Darstellungen mit der spezifischen Enthalpie h oder der Temperatur T bevorzugt, da damit eine konservative Form der Energiegleichung möglich ist (Erklärung siehe unten).

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{c}) = 0 \quad (2.1)$$

Der erste Term gibt die zeitliche Dichteänderung des betrachteten Volumenelementes an, der zweite Term die Dichteänderung infolge des Massenstromes über die Volumsgrenzen.

Impulsgleichung:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{c} \mathbf{c}) + \nabla p = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.2)$$

Auf der linken Seite werden analog zur Kontinuitätsgleichung die zeitliche Impulsänderung und die Änderung infolge der Impulsströme über die Volumsgrenzen berücksichtigt. Der erste Term auf der rechten Seite bezeichnet die Volumskräfte, deren wichtigste die Schwerkraft ist. Bei den thermischen Turbomaschinen kann sie jedoch infolge der geringen Dichte im allgemeinen vernachlässigt werden. Für Newtonsche Fluide sind die viskosen Normal- und Schubspannungen des Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ durch den Stokes'schen Reibungsansatz definiert, die Impulsgleichung wird dann als Navier-Stokes-Gleichung bezeichnet.

Energiegleichung:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{c}(e + p)] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{c} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) \quad (2.3)$$

Die linke Seite berücksichtigt die zeitliche Energieänderung, die Energieströme über die Volumsgrenzen und die Wirkung der Oberflächenkräfte. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Wirkung von inneren Wärmequellen, der zweite Term den Einfluß von Volumskräften auf die Energiebilanz. Beide Terme können in Strömungen durch thermische Turbomaschinen vernachlässigt werden. Der dritte Term beschreibt den Energieverlust durch Wärmeleitung und ist durch das Fourier'sche Gesetz, Gleichung (2.4), definiert. Der letzte

Term, als Dissipationsfunktion bezeichnet, beschreibt den Energieaufwand für die Verformung eines Fluidteilchens infolge der Reibung.

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.4)$$

Dieses partielle Differentialgleichungssystem besteht aus 3 Differentialgleichungen für die 5 Unbekannten ρ , \mathbf{c} , T , e und p . Damit das Gleichungssystem geschlossen ist, bedarf es daher noch zwei zusätzlicher Gleichungen. Diese können aus der thermodynamischen Zustandsgleichung des jeweiligen Strömungsfluids, welche die Beziehungen zwischen den thermodynamischen Größen beschreibt, gewonnen werden. Mit der Annahme eines idealen Gases mit konstanten spezifischen Wärmen (vollkommenes Gas), charakterisiert durch die Gaskonstante R und den Isentropenexponenten κ , erhält man z. B. folgende zwei analytische Zustandsgleichungen:

$$e = \frac{p}{\kappa - 1} + \rho \frac{\mathbf{c}^2}{2} \quad T = \frac{(\kappa - 1)}{R} \left(\frac{e}{\rho} - \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) \quad (2.5-1,2)$$

In den thermischen Turbomaschinen kommen meist Gase zum Einsatz, die durch die Annahme eines idealen Gases sehr gut beschrieben werden können. Dadurch ergeben sich Vereinfachungen im numerischen Lösungsalgorithmus. Bei realen Gasen muß die Zustandsgleichung jedoch numerisch angegeben und gelöst werden.

Unter der Annahme eines Newton'schen Fluids (was für praktisch alle Gase und die meisten Flüssigkeiten stimmt), sind die Schubspannungen τ linear abhängig von den Scherspannungen (Verformungen) im Fluid.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad \delta_{ij} = 1 \text{ für } i = j, \text{ sonst } 0$$

μ ist die dynamische Viskosität und wird meist mit Hilfe des Gesetzes von Sutherland bestimmt:

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \quad \text{mit } C_1 = 1.458 \cdot 10^6 \text{ kg}/(\text{ms}\sqrt{\text{°K}}) \text{ und } C_2 = 110.4 \text{°K}$$

Wenn die dynamische Viskosität bekannt ist, kann die Wärmeleitfähigkeit k des Fluids mit Hilfe der Prandl-Zahl bestimmt werden, die für die meisten Gase annähernd konstant ist. Für Luft beträgt sie bei Normbedingungen $Pr=0.72$.

$$k = \frac{c_p}{Pr} \mu$$

Dieses Gleichungssystem zur Beschreibung der Strömung in Gasen wird als die Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet (im Gegensatz zur Impulsgleichung, die auch als Navier-Stokes-Gleichung bezeichnet wird).

Führt man bei den Erhaltungsgleichungen eine Reynolds- oder Favre-Mittelung durch, so wird die Berechnung turbulenter Effekte möglich. Der Einfluß der Turbulenz wird meist

durch die Hinzufügung eines turbulenten Reibungskoeffizienten μ_{turb} zum viskosen Reibungskoeffizienten berücksichtigt (Ansatz von Boussinesq). Mit Hilfe geeigneter Turbulenzmodelle kann dieser turbulente Reibungskoeffizient ermittelt werden. Diese Turbulenzmodelle reichen von einfachen analytischen Ansätzen bis zu Mehr-Gleichungsmodellen (Marvin, 1983), die die zusätzliche Lösung mehrerer Differentialgleichungen erfordern, um die turbulenten Schwankungsgrößen zu beschreiben.

Vernachlässigt man die Reibungs- und Turbulenzeffekte, so fallen bei den Erhaltungsgleichungen die Terme der rechten Seite weg, und man erhält man **die Euler-Gleichungen, die die reibungsfreie Strömung beschreiben.**

2.2 Die Grundgleichungen in konservativer Form

Bevor man einen Finite-Differenzen-Algorithmus zur Lösung der Erhaltungsgleichungen heranzieht, ist es oft sinnvoll, die Erhaltungsgleichungen in kompakter Vektor-Schreibweise anzusetzen. Die Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen Koordinaten bei Vernachlässigung der Volumskräfte und externer Wärmequellen zeigt Gleichung (2.6) in Vektorschreibweise (z.B. aus Anderson et. al., 1984):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

wobei \mathbf{U} , \mathbf{E} , \mathbf{F} und \mathbf{G} fünfdimensionale Vektoren sind, die durch Gleichung (2.7-1) bis (2.7-4) gegeben sind:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (e + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (e + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (e + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}$$

Die erste Zeile dieser Vektorengleichung entspricht der Kontinuitätsgleichung, die zweite, dritte und vierte Zeile der Impulsgleichung und die fünfte Zeile der Energiegleichung.

Glg. (2.6) besagt, daß die zeitliche Änderung des Zustandes im Bilanzelement (für kartesische Koordinaten ein Würfel) gleich ist der Differenz der Flüsse über die Bilanzgrenzen (=Würfelseiten). Z.B. ist die Änderung der Dichte gleich der Differenz der Massenströme. Falls gleich viel Masse das Bilanzelement verläßt wie hineinkommt, so ist die zeitliche Änderung der Dichte null, die Strömung ist stationär.

3 Zeititerative Verfahren für die Berechnung stationärer Strömungen - Grundlagen

3.1 Allgemeines

Für viele praktische Anwendungsfälle genügt es, die stationäre Strömung zu kennen. Diese wird durch die stationären Strömungsgleichungen beschrieben, die man durch Weglassen der zeitlichen Ableitungsglieder aus den Erhaltungsgleichungen (Kapitel 2) erhält. Wenn man sich aber für sehr schnelle Strömungen (um Mach =1 und höher) interessiert, so hat man das Problem, daß die stationären Erhaltungsgleichungen bei $M=1$ ihren Charakter ändern.

Um dies zu erklären, betrachten wir als erstes die beschreibende Differentialgleichung für stationäre, kompressible Potentialströmungen:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen des Koeffizienten des ersten Gliedes ist die Differentialgleichung entweder vom elliptischen oder hyperbolischen Typus:

1. **Elliptische Differentialgleichungen (positives Vorzeichen), Gleichgewichtsprobleme:**
Die Lösung wird nur innerhalb einer abgeschlossenen Domäne gesucht, wobei die Lösung nur von den **Randbedingungen** abhängt.
Beispiele sind: stationäre Temperaturverteilungen und inkompressible, reibungsfreie Strömungen.

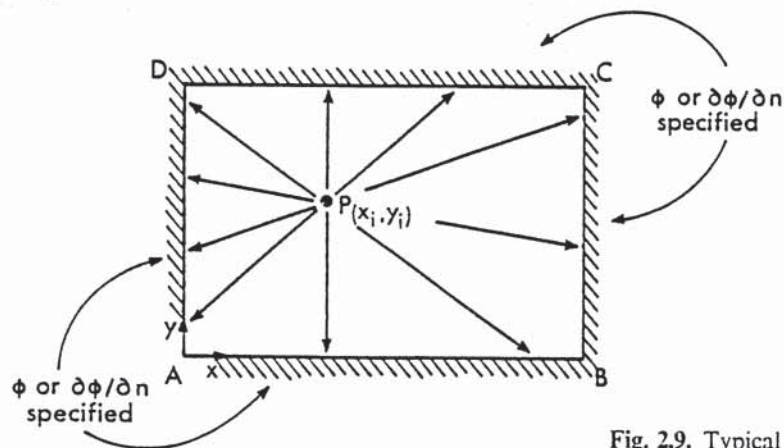


Fig. 2.9. Typical domain for an elliptic PDE

2. **Hyperbolische Differentialgleichungen (negatives Vorzeichen), Ausbreitungsprobleme:**
sind transiente Probleme. Die Lösung der PDE wird in einer offenen Domäne gesucht und wird durch **Randbedingungen als auch durch Anfangsbedingungen** bestimmt. Die Lösung erfolgt im Gegensatz zu den Gleichgewichtsproblemen durch Fortschreiten von den Anfangswerten unter Einhaltung der Randbedingungen.
Beispiele sind instationäre Temperaturverteilungen, instationäre Strömungen und stationäre Überschallströmungen (Charakteristikenverfahren).

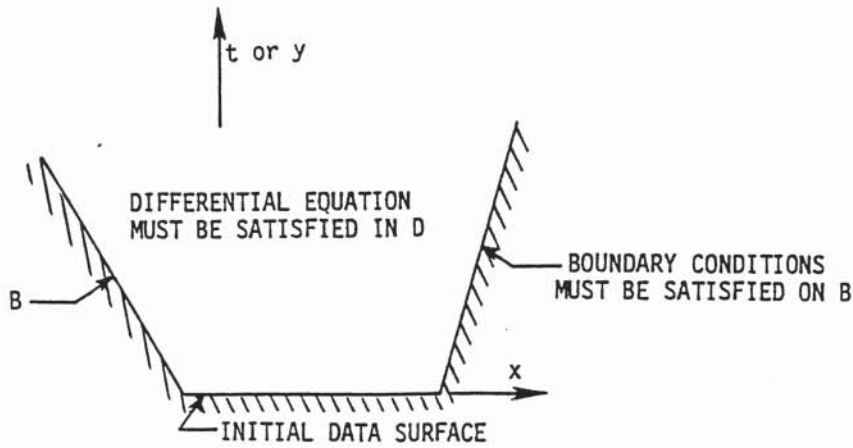


Figure 2-4 Domain for a marching problem.

Bei transsonischen Strömungen treten im Strömungsfeld Geschwindigkeiten im Unter- und Überschallbereich auf (siehe das Beispiel für die transsonische Strömung um einen Tragflügel). Dies führt zu Schwierigkeiten bei der Lösung der stationären Erhaltungsgleichungen, da theoretisch verschiedene Lösungsverfahren für die einzelnen Bereiche verwendet werden müssten.

Einen Ausweg bieten die sogenannten **zeititerativen Verfahren**:

Die instationären Erhaltungsgleichungen, die sowohl für den Unterschall- als auch für den Überschallbereich von hyperbolischem Typ sind, werden solange zeitlich iteriert, bis die zeitliche Änderung zu Null wird und damit die stationäre Lösung gefunden ist.

Die zeititerativen Verfahren haben ihren Anwendungsbereich für Strömungen ab einer Machzahl von ca. $M=0.3$, darunter werden meist Druckkorrekturverfahren verwendet.

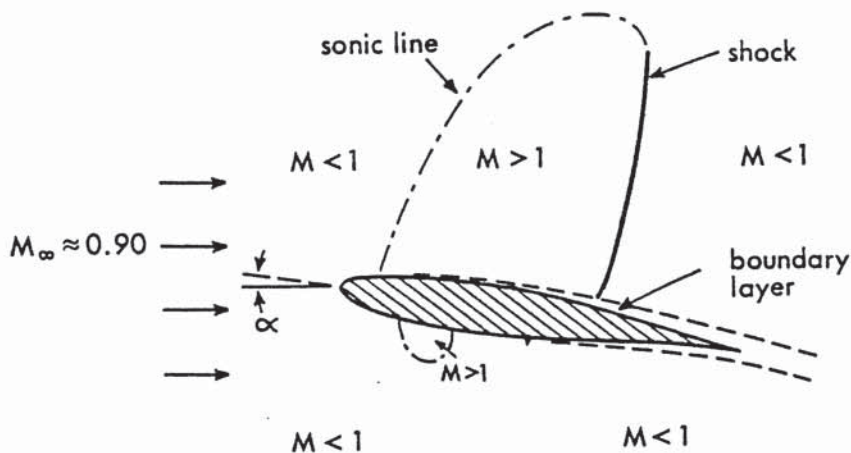


Fig. 11.15. Mach number distribution about a wing

3.2 Ablauf eines expliziten zeititerativen Algorithmus

3.2.1 Diskretisierung des Raumes

Ersatz des kontinuierlichen Raumes durch eine Menge von diskreten Punkten, die durch ein "Netz" bzw. "Gitter" geordnet werden.

Strukturierte Netze

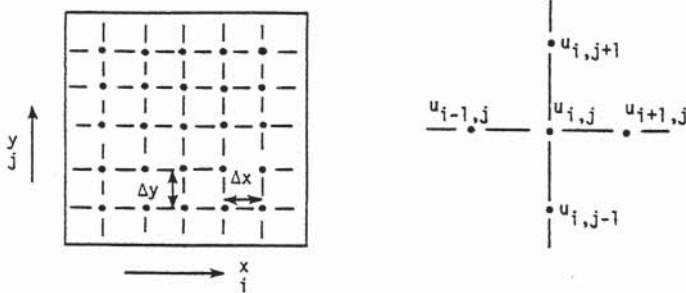


Figure 3-1 A typical finite-difference grid.

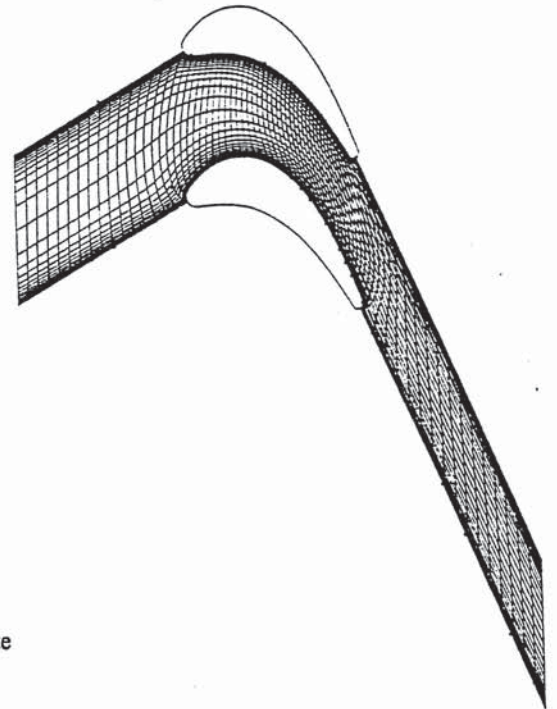
orthogonales, äquidistantes Netz

Benennung der Punkte (i,j)

$$u_{i+1,j} = u(x_0 + \Delta x, y_0) \quad u_{i-1,j} = u(x_0 - \Delta x, y_0)$$

$$u_{i,j+1} = u(x_0, y_0 + \Delta y) \quad u_{i,j-1} = u(x_0, y_0 - \Delta y)$$

Often in the treatment of marching problems, the variation of the marching coordinate is indicated by a superscript, such as u_i^{n+1} , rather than a subscript.



konturangepaßtes Netz

3.2.2 Vorbelegung des Strömungsfeldes

An jedem Netzpunkt werden die Strömungsgrößen zum Zeitpunkt 0 (Iterationsbeginn) festgelegt: $U_{i,j}^n$, wobei i,j die Ortsindizes sind und n der zeitliche Index (0 zu Beginn). Diese Strömungsgrößen stellen im allgemeinen keine gültige Lösung (mögliche Strömung) dar.

3.2.3 Zeitliche Iteration

Beschreibende Differentialgleichung:
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

Zeitliche Diskretisierung:
$$\Delta U_{i,j}^n = U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n = -\Delta t \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \right)_{i,j}^n$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n$$

Ausgehend von den bekannten Strömungsgrößen zum Zeitpunkt n im jeden Punkt werden die "Flußbilanzen" für jedes Bilanzelement im Rechengebiet aufgestellt (=Diskretisierung des rechten Terms der oberen Gleichung). Diese Bilanzen (= Differenz zwischen ein- und austretenden Flüssen) bestimmen die zeitliche Änderung der Strömungsgrößen in jedem Punkt, sodaß die neuen Werte zum Zeitpunkt (n+1) bestimmt werden können. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis die zeitliche Änderung in allen Punkten gegen Null geht, dann ist die stationäre Lösung erreicht.

Dieser iterative Vorgang wird für jeden Netzpunkt unabhängig von den Nachbarpunkten durchgeführt, man nennt das Verfahren deswegen **explizit**. Falls die Bilanzen zum Zeitpunkt (n+1) bestimmt werden (aus den noch unbekanntem Strömungsgrößen), so erhält man einen **impliziten** Algorithmus. Die Bestimmung der neuen Zustandswerte erfolgt für alle Netzpunkte gemeinsam, ein großes Gleichungssystem muß gelöst werden. Implizite Verfahren sind daher numerisch aufwendiger, aber dafür stabiler (siehe nächstes Kapitel).

4 Betrachtung verschiedener zeitlicher und räumlicher Diskretisierungen

4.1 Explizites vs. implizites Verfahren

Ein Unterscheidungsmerkmal bei den zeitabhängigen Verfahren ist die explizite oder implizite Lösung der Erhaltungsgleichungen. **Explizite Verfahren** berechnen den Strömungszustand zum neuen Zeitpunkt (n+1) aus den Werten zum Zeitpunkt n. Dies wird für jeden Netzknoten einzeln durchgeführt. Diese Verfahren sind einfacher anwendbar, die Implementierung von Randbedingungen ist leichter. Sie unterliegen jedoch sehr niedrigen Stabilitätsgrenzen, sodaß vor allem bei dichten Netzen (wie bei reibungsbehafteten Strömungen entlang fester Konturen) die Rechenzeiten sehr lang werden.

Implizite Verfahren hingegen berechnen die neuen Strömungszustände simultan in allen Netzknoten und sind daher theoretisch unbegrenzt stabil (siehe Stabilitätsanalyse unten, sie ergibt keine Beschränkung des erlaubten Zeitschritts). Der höhere numerische Aufwand bei der Lösung wird durch die raschere Konvergenz leicht aufgehoben. Obwohl implizite Verfahren schwerer vektorisierbar sind, können sie im Gegensatz zu den expliziten meist vollständig vektorisiert werden. Derzeit sind je nach Anwendung sowohl implizite als auch explizite Verfahren in Verwendung.

4.2 Stabilitätsbetrachtung anhand der eindimensionalen Wellengleichung

Bei der Anwendung verschiedener zeitlicher und räumlicher Diskretisierungen zur numerischen Lösung der Erhaltungsgleichungen ist zu prüfen, ob die entstehenden Algorithmen stabil sind. Es ist nicht selbstverständlich, daß jeder zeititerative Algorithmus wirklich zu einer stationären Lösung konvergiert. Ein wichtiger Parameter ist dabei die Größe des Zeitschritts, mit dem man von Zeitpunkt zu Zeitpunkt sich weiterbewegt. Es ist oft aus eigener Erfahrung bekannt, daß man mit zu großen Rechenschritten Konvergenzprobleme hat. Stabilitätsanalysen können eine Aussage geben, ob ein numerisches Verfahren stabil ist und unter welchen Bedingungen. Die bei CFD-Algorithmen angewandte Fourier- (von Neumann-) Analyse untersucht, ob sich einzelne Fehler verstärken oder vom Algorithmus abgedämpft werden (=Stabilität).

Für die grundsätzliche Betrachtung verschiedener numerischer Algorithmen für CFD wird gerne die eindimensionale Wellengleichung herangezogen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0$$

wobei u eine Störgröße ist, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit c (Schallgeschwindigkeit) ausbreitet.

Im Vergleich dazu unterscheidet sich z.B. die eindimensionale Kontinuitätsgleichung nur durch die variable Ausbreitungsgeschwindigkeit u.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Die exakte Lösung der Wellengleichung für folgende Anfangswertverteilung

$$u(x,0) = F(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

Finite-Differenzen-Verfahren

Developing a Taylor-series expansion for $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ about (x_0, y_0) gives:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right|_0 \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{\xi} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad x_0 \leq \xi \leq (x_0 + \Delta x) \quad (3-2)$$

where the last term can be identified as the remainder. Thus, we can form the “forward” difference by rearranging Eq. (3-2)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0 \frac{\Delta x}{2!} - \dots \quad (3-3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

and obtain the “backward” difference representation,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3-6)$$

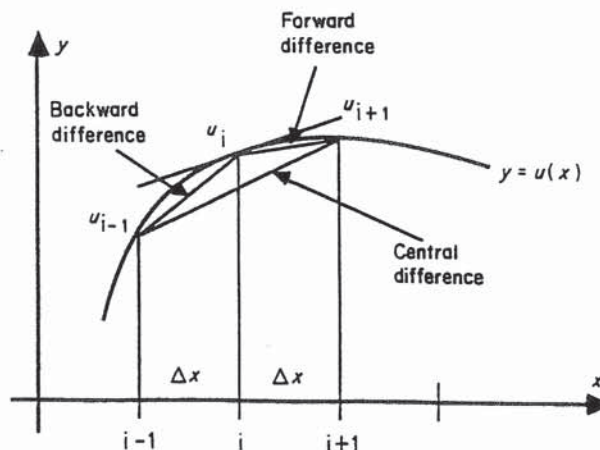
We can subtract Eq. (3-5) from Eq. (3-2), rearrange, and obtain the “central” difference

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3-7)$$

We can also add Eq. (3-2) and Eq. (3-5) and rearrange to obtain an approximation to the second derivative

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3-8)$$

It should be emphasized that these are only a few examples of the possible ways in which first and second derivatives can be approximated.



lautet:

$$u(x,t) = F(x - ct)$$

d.h., daß sich die Anfangsverteilung (Störung) mit der Geschwindigkeit c fortbewegt.

4.3 Explizites Euler-Verfahren

4.3.1 Zentrale Differenzenbildung:

Die Diskretisierung der lokalen Ableitungsterme soll durch explizite zentrale Differenzenbildung erfolgen:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Die Anwendung der von Neumann-Analyse ergibt einen Verstärkungsfaktor G für die Störungen, der stets größer als 1 ist. Diese Diskretisierung ist daher instabil und unbrauchbar:

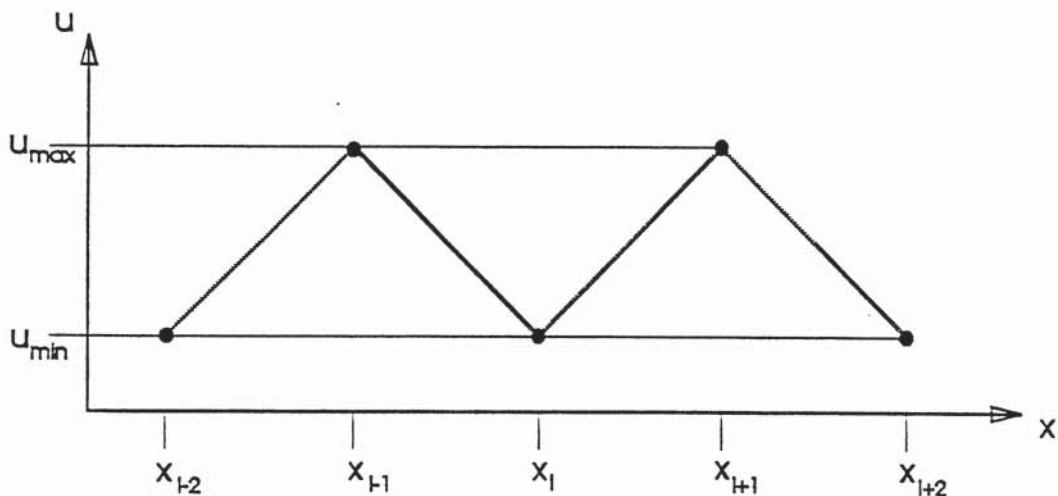
$$G = |e^{\alpha \Delta t}| = \sqrt{1 + 4r^2 \sin^2 \beta} \geq 1$$

Die Erklärung dafür kann man anschaulich zeigen:

Wenn man zum Zeitpunkt n eine Verteilung der Unbekannten u entsprechend der folgenden Abbildung annimmt, erhält man das physikalisch unsinnige Ergebnis

$$u_i^{n+1} = u_i^n \quad (4.1)$$

für alle Knoten i . Das bedeutet, daß eine Verteilung der Zustandsgröße u , bei der jeder zweite Knoten denselben Wert aufweist, die diskretisierte Wellengleichung erfüllt. Die Verteilung selbst ist aber physikalisch unrealistisch.



Ausbreitung der Störung bei zentraler Diskretisierung

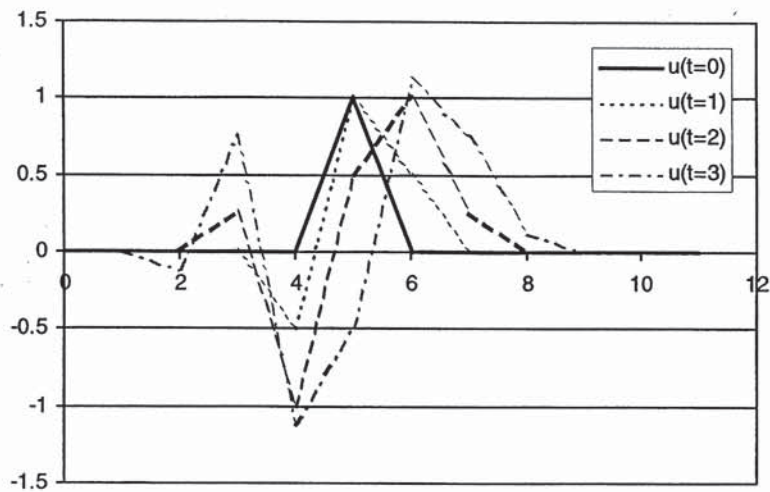


Abb.: Ausbreitung einer einzelnen Störung bei zentraler Diskretisierung, $c=1$, $CFL=1$

4.3.2 Einseitige Differenzenbildung:

Anstelle einer zentralen Diskretisierung wird nun eine einseitige Differenzenbildung gewählt.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Die von Neumann-Analyse ergibt eine für explizite Schemen typische bedingte Stabilität in Abhängigkeit von der Größe des Zeitschritts.:

Vergrößerungsfunktion:

$$G = (1 - v + v \cos \beta) - i(v \sin \beta)$$

$$\text{mit } v = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (\text{Courant number})$$

führt zu folgender Stabilitätsbedingung: $0 \leq \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (3-110)

Again a conditional stability requirement must be placed on the time step and the spatial mesh spacing. This is called the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition and was discussed at length relative to the concepts of convergence and stability in an historically important paper by Courant et al. (1928). Some authorities consider this paper to be the starting point for the development of modern numerical methods for partial differential equations.

Man sieht, daß die stabile Art der einseitigen lokalen Diskretisierung vom Vorzeichen der Wellengeschwindigkeit c abhängt. Für positive c liefert nur die oben gezeigte Rückwärtsdiskretisierung ein stabiles Schema, bei negativem c die Vorwärtsdiskretisierung. Dies erklärt sich dadurch, daß bei Rückwärtsdiskretisierung der zweite Knoten in der lokalen Diskretisierung stromaufwärts orientiert ist, sodaß die Richtung des numerischen Informationstransportes der Richtung des physikalischen Transportes entspricht. Verfahren, die auf die Richtung des Informationstransports Rücksicht nehmen, nennt man **Upwind-Verfahren**.

Für die Wellengleichung erhält man folgendes Ergebnis

$$u_i^{n+1} = u(t^n, x_i - c\Delta t)$$

Die Störungen werden also in Übereinstimmung mit der Physik in positive Richtung um den Betrag $c\Delta t$ verschoben, wie folgende Abbildung zeigt.

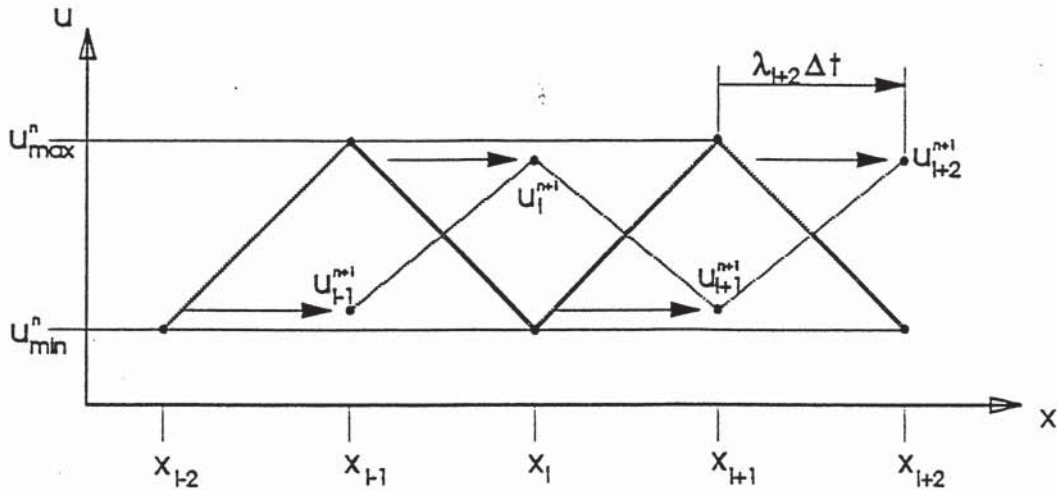


Abb.: Ausbreitung der Störung bei einseitiger Diskretisierung

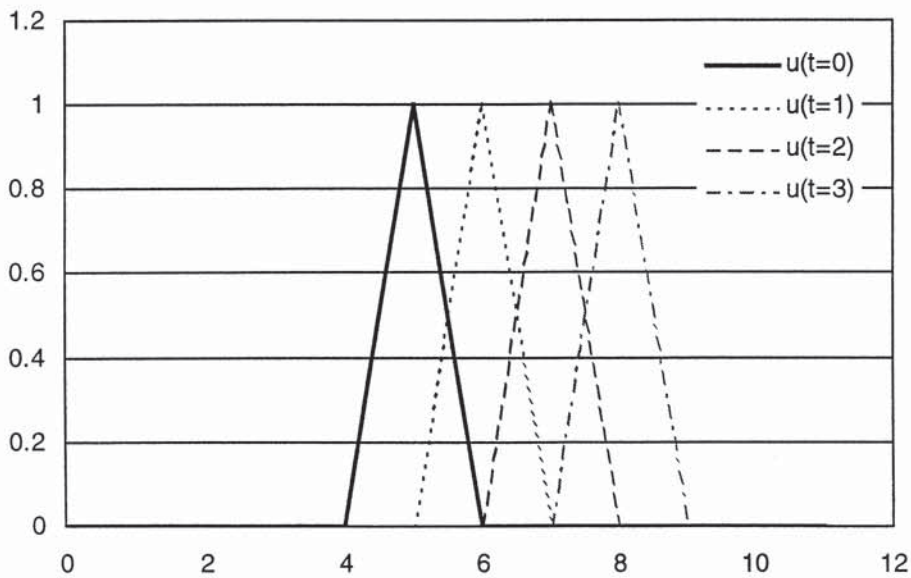


Abb.: Ausbreitung einer einzelnen Störung bei Upwind-Diskretisierung, $c=1$, $CFL=1$

Der Unterschied zwischen der einseitigen und der zentralen Diskretisierung liegt in einem Diffusionsterm zweiter Ordnung, der das Verfahren stabilisiert:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

Es besteht also Äquivalenz zwischen einseitiger Diskretisierung und zentraler Diskretisierung, ergänzt um einen aus Stabilitätsgründen erforderlichen Diffusionsterm zweiter Ordnung. Um sich die Berücksichtigung der Ausbreitungsrichtung bei der Diskretisierung zu ersparen, werden häufig zentrale Verfahren verwendet, erweitert um einen zusätzlichen additiven Diffusionsterm ("artificial dissipation").

Störungsausbreitung bei CFL = 0.5:

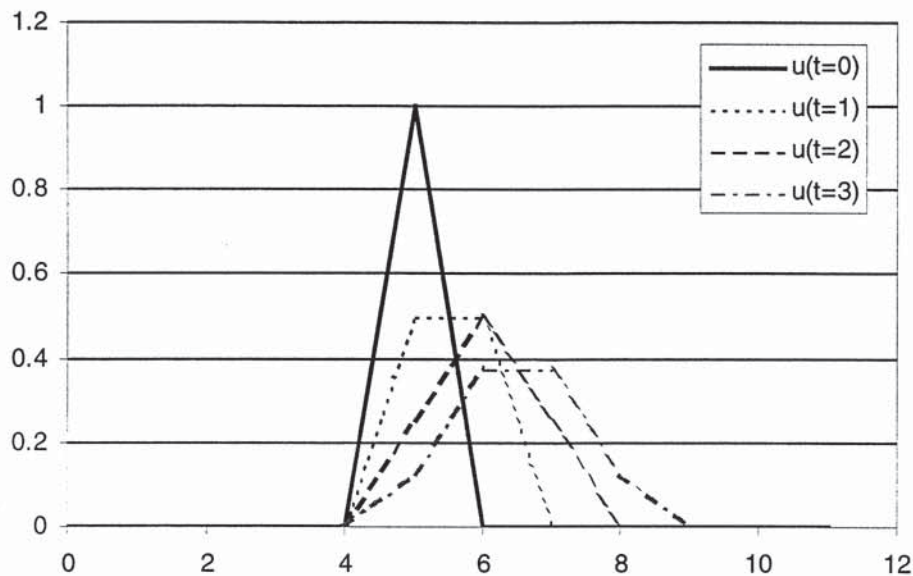


Abb.: Ausbreitung einer einzelnen Störung bei Upwind-Diskretisierung, $c=1$, CFL=0.5

4.4 Runge-Kutta-Verfahren

Eine wichtige Familie von Zeitintegrationstechniken sind die Runge-Kutta-Methoden. Sie sind **zeitlich von höherer Ordnung, nichtlinear und explizit**.

Das Runge-Kutta Verfahren läßt sich vereinfacht wie folgt erklären: Ausgehend von den Zuständen zu einem bekannten Zeitpunkt (n) werden eine oder mehrere Annahmen über den weiteren zeitlichen Verlauf der Zustandsgröße ermittelt. Mit Hilfe dieser Annahmen berechnet man die Zustandsgröße zum neuen Zeitpunkt (n+1).

Theoretisch gibt es eine unendliche mögliche Anzahl von Runge-Kutta-Verfahren k.-ter Ordnung. Die einzige Bedingung ist, daß die Summe der Koeffizienten im letzten Schritt gleich 1 ist.

Das am häufigsten verwendete Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung lautet:

$$\begin{aligned}
u_j^{(1)} &= u_j^n - \alpha_1 \Delta t c(u_x)_j^n & \alpha_1 &= 1/4 \\
u_j^{(2)} &= u_j^n - \alpha_2 \Delta t c(u_x)_j^{(1)} & \alpha_2 &= 1/3 \\
u_j^{(3)} &= u_j^n - \alpha_3 \Delta t c(u_x)_j^{(2)} & \alpha_3 &= 1/2 \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \Delta t c[(u_x)_j^{(3)}]
\end{aligned}$$

Die Stabilitätsbedingung lautet für die Wellengleichung

$$\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

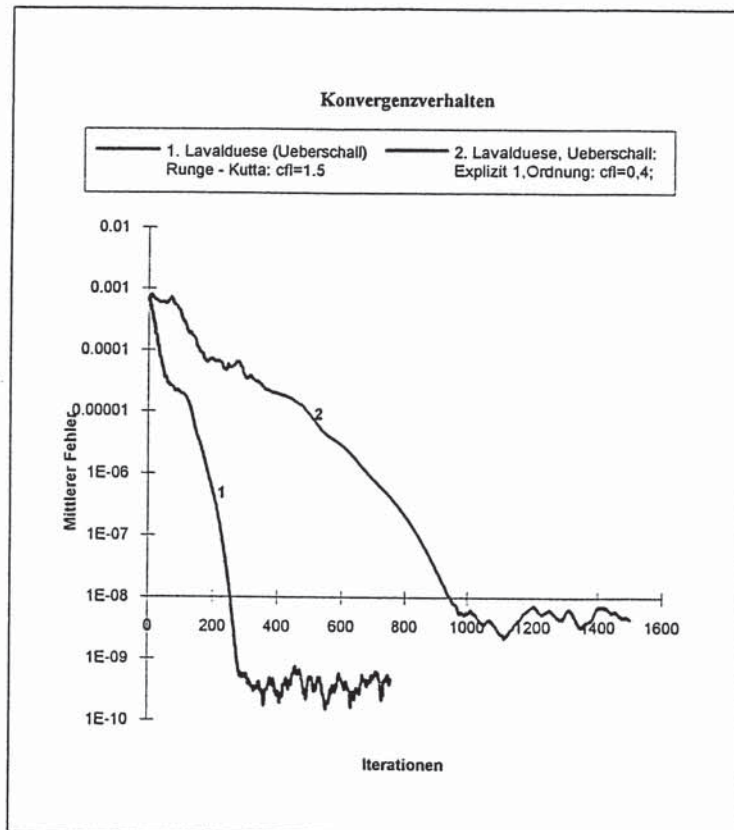


Abb 5.2: Konvergenzverhalten: Explizites Verfahren, Runge - Kutta

4.5 Implizites Euler-Verfahren

The algorithms discussed previously have all been explicit. The following implicit scheme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2 \Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (4-29)$$

is first-order accurate with truncation error of $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$ and, according to a Fourier stability analysis, is unconditionally stable for all time steps. However, a system of algebraic equations must be solved at each new time level. To illustrate this, let us rewrite Eq. (4-29) so that the unknowns at time level $(n + 1)$ appear on the left-hand side of the equation and the known quantity u_j^n appears on the right-hand side. This gives

$$\frac{\nu}{2} u_{j+1}^{n+1} + (1)u_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (4-30)$$

or

$$au_{j+1}^{n+1} + du_j^{n+1} + bu_{j-1}^{n+1} = C \quad (4-31)$$

where $a = \nu/2$, $d = 1$, $b = -\nu/2$, and $C = u_j^n$. Consider the computational mesh shown in Fig. 4-5, which contains $M + 2$ grid points in the x direction and known initial conditions at $n = 0$. Along the left boundary, u_0^{n+1} has a fixed value of u_0 . Along the right boundary, u_{M+1}^{n+1} can be computed as part of the solution using characteristic theory. For example, if $\nu = 1$, then $u_{M+1}^{n+1} = u_M^n$. Applying Eq. (4-31) to the grid shown in Fig. 4-5, we find that the following system of M linear algebraic equations must be solved at each $(n + 1)$ time level:

$$\begin{array}{c}
 [A] \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 d_1 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 b_2 & d_2 & a_2 & & & & & \cdot \\
 0 & b_3 & d_3 & a_3 & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & 0 \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_M & d_M
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 [u] \\
 \left[\begin{array}{c}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 u_{M-1}^{n+1} \\
 u_M^{n+1}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 [C] \\
 \left[\begin{array}{c}
 C_1 \\
 C_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 C_{M-1} \\
 C_M
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (4-32)
 \end{array}$$

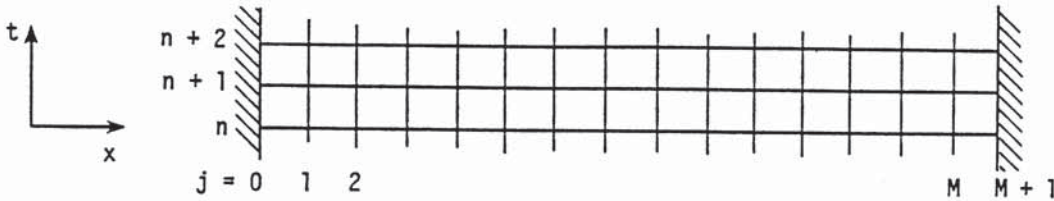


Figure 4-5 Computational mesh.

In Eq. (4-32), C_1 and C_M are given by

$$\begin{aligned}
 C_1 &= u_1^n - bu_0^{n+1} \\
 C_M &= u_M^n - au_{M+1}^{n+1}
 \end{aligned} \quad (4-33)$$

where u_0^{n+1} and u_{M+1}^{n+1} are the known boundary conditions.

Matrix $[A]$ in Eq. (4-32) is a tridiagonal matrix. A technique for rapidly solving a tridiagonal system of linear algebraic equations is due to Thomas (1949) and is called the Thomas algorithm.

In general, implicit schemes require more computation time per time step, but of course permit a larger time step since they are usually unconditionally stable. However, the solution may become meaningless if too large a time step is taken.

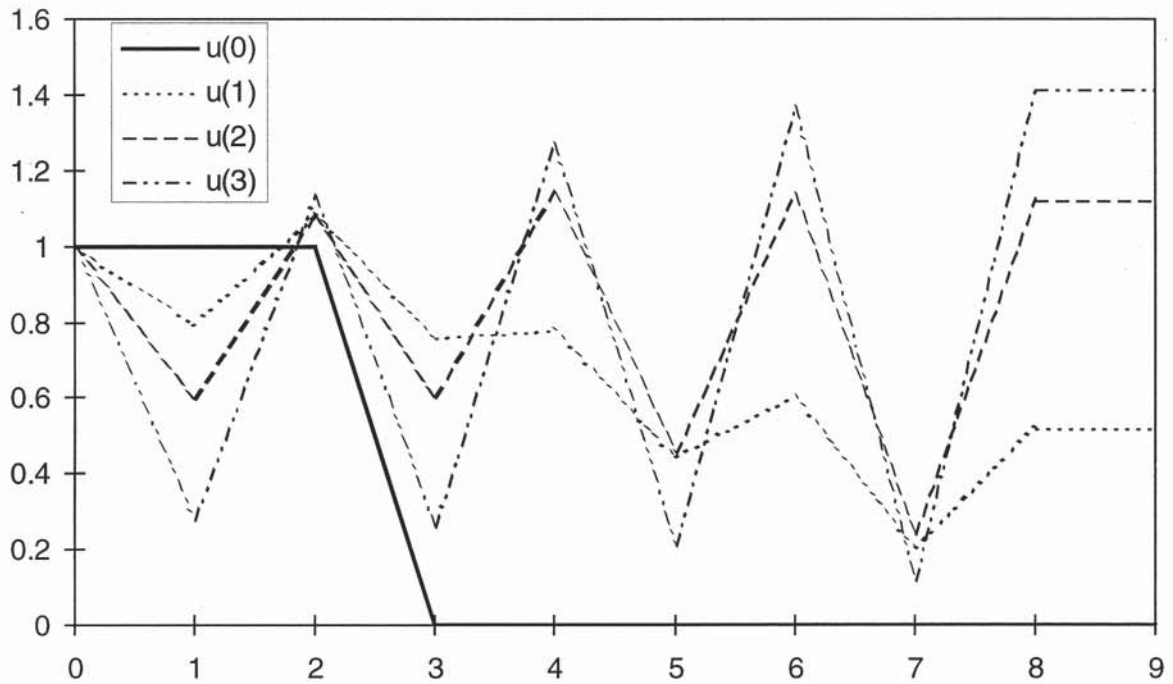


Abb.: Ausbreitung einer Störung bei impliziter zentraler Diskretisierung, $c=1$, CFL=5

4.6 Newton-Algorithmus für nichtlineare Systeme

Bei nichtlinearen Problemen, wie es die Strömungsgleichungen sind, kann man eine Newton-Linearisierung durchführen, um sich iterativ der Lösung der transzendenten Gleichung zu nähern. Man kann damit die zeitliche Genauigkeit des Verfahrens innerhalb derselben zeitlichen Ordnung erhöhen. Das sich ergebende Verfahren ist implizit.

5 Zentrale Verfahren

Zentrale Verfahren haben die gemeinsame Eigenschaft, daß die Diskretisierungen der Flußgradienten zentral und von zweiter Ordnung sind. Zusätzlich benötigen explizite (aber bei praktischer Anwendung auch implizite) zentrale Verfahren künstliche Dissipationsterme, um das Verfahren numerisch stabil zu halten.

Angewandt auf ein gleichförmiges zweidimensionales kartesisches Netz erhält man für die instationären Erhaltungsgleichungen

$$\frac{dU_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\frac{E_{i+1,j} - E_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{\Delta y} \right] + D_{ex} = \text{RHS}$$

wobei die rechte Seite der Gleichung, die der Bilanz der Flüsse über die Bilanzgrenzen entspricht, als Right-Hand-Side- (RHS-) Term bezeichnet wird.

Vor allem zwei der zentralen Verfahren werden heute vielfach angewandt:

- explizite Runge-Kutta-Verfahren
- implizite Beam-Warming-Verfahren

5.1 Künstliche Dissipation

Diese additiven Terme sollen die physikalische Viskosität im Diskreten simulieren, d.h. sie sollen in glatten Gebieten die notwendige Hintergrunddämpfung für die Stabilität des Verfahrens liefern und gleich oder kleiner dem Abbruchfehler sein und in der Nähe von Diskontinuitäten Oszillationen in der Lösung verhindern. Daraus läßt sich prinzipiell ableiten, daß die additiven Viskositätsterme von geradzahligter Ordnung in der Ableitung und in glatten Gebieten von mindestens 2. Ordnung in der Genauigkeit sein müssen.

Die sachgemäße Konstruktion ergibt sich aus dem Vergleich mit den Upwind-Verfahren, die eine räumlich einseitige Diskretisierung verwenden. Eine einseitige Diskretisierung 1. Ordnung führt auf ein zentrales Verfahren mit einem Viskositätsterm, der einer zentral diskretisierten 2. Ableitung entspricht (siehe Kap. 4):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{c}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

Wenn man die Genauigkeit des Verfahrens durch einseitige Diskretisierung 2. Ordnung erhöht, entspricht dies einem zentralen Verfahren mit einem Viskositätsterm, der eine 4. Ableitung approximiert:

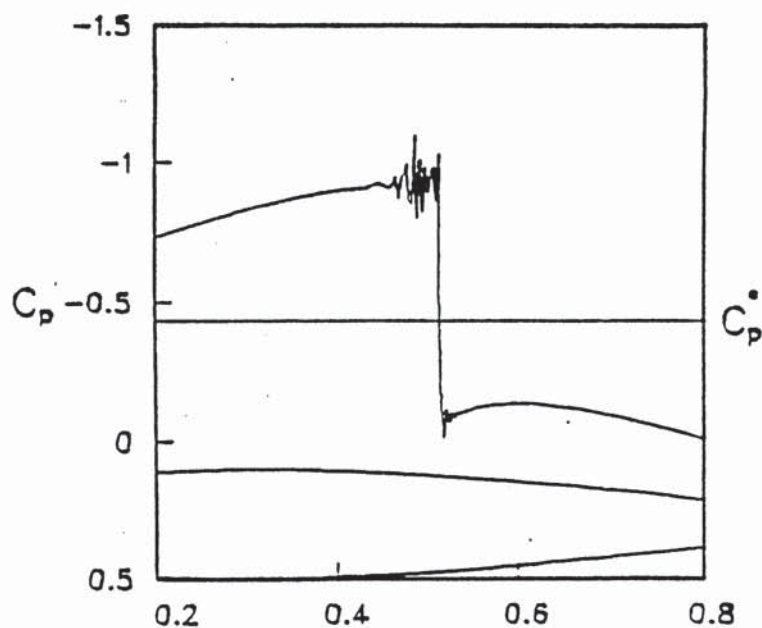
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x} = -c \frac{-u_{i+2}^n + 4u_{i+1}^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{4\Delta x} + \frac{c}{2} \frac{-u_{i-2}^n + 4u_{i+1}^n - 6u_i^n + 4u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{2\Delta x}$$

Aufgrund dieser Überlegung wird grundsätzlich ein Term 4. Ordnung zur Stabilisierung hinzugefügt. Weiters wird die Zeitschrittgröße hinzugefügt, damit die stationäre Lösung

unabhängig von der Zeitschrittgröße wird. Daraus folgt folgender erster Ansatz für einen künstlichen Dissipationsterm, wobei ϵ_E ein konstanter Vorfaktor ist:

$$D_{ex} = -\epsilon_E \Delta t / J \cdot (U_{i+2} - 4U_{i+1} + 6U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2})$$

Erst mit Hilfe eines solchen Dissipationsterms konnten konvergente Ergebnisse, vor allem für transsonische Strömungen, erzielt werden. Die transsonische Strömung um ein NACA0012-Profil zeigt folgende Abbildung. Deutlich sind die Schwingungen vor und nach dem Stoß sowie entlang des Profils erkennbar. Durch Vergrößerung des Dissipationsparameters können die Schwingungen verringert, aber nicht vollständig beseitigt werden, ohne daß dadurch die Stoßauflösung zerstört wird.

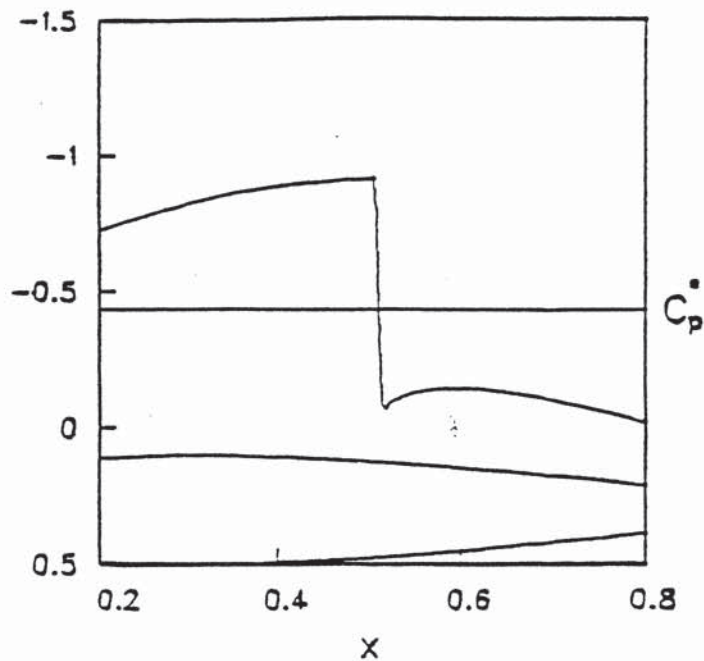


Druckkoeffizient über der Sehnenlänge bei konstanter Dissipation (Pulliam, 1986b)

Deshalb wurden zahlreiche Modifikationen des Dissipationsterms in Anlehnung an Upwind-Verfahren eingeführt, um auch Verdichtungsstöße scharf modellieren zu können:

$$D_{ex} = \nabla_x \left(\sigma_{i+1,j} J_{i+1,j}^{-1} + \sigma_{i,j} J_{i,j}^{-1} \right) \left(\epsilon_{i,j}^{(2)} \Delta_x U_{i,j} - \epsilon_{i,j}^{(4)} \Delta_x \nabla_x \Delta_x U_{i,j} \right)$$

σ ist ein Maß für die lokalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen (entspricht dem Wert c in der Wellengleichung). Die Parameter $\epsilon^{(2)}$ und $\epsilon^{(4)}$ werden so gewählt, daß im Bereich von Stößen Terme zweiter Ordnung, im übrigen Bereich Terme vierter Ordnung angewandt werden. Das Wegschalten der Dissipation 4. Ordnung geschieht mit Hilfe eines Drucksensors, der Gebiete großer Druckgradienten anzeigt.



Druckkoeffizient über der Sehnenlänge bei nichtlinearer Dissipation zweiter und vierter Ordnung (Pulliam, 1986b)

5.2 Das mehrdimensionale Beam&Warming-Verfahren

Das Verfahren von Beam und Warming hat sich durch den angewandten ADI-Algorithmus durchgesetzt, der die Lösung mehrdimensionaler Probleme durch mehrere eindimensionale Schritte erlaubt. Dadurch sind die sich ergebenden Matrizen von tridiagonaler Struktur, für die es sehr effiziente Lösungsverfahren gibt (Thomas-Algorithmus).

$$\left[\mathbf{I} + \theta \Delta t \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}^n}{\partial \xi} + \mathbf{D}_{\text{im}_\xi} \right] \Delta \hat{\mathbf{U}}^* = \mathbf{RHS}^n + \mathbf{D}_{\text{ex}}$$

$$\left[\mathbf{I} + \theta \Delta t \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}^n}{\partial \eta} + \mathbf{D}_{\text{im}_\eta} \right] \Delta \hat{\mathbf{U}}^n = \Delta \hat{\mathbf{U}}^*$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{n+1} = \hat{\mathbf{U}}^n + \Delta \hat{\mathbf{U}}^n$$

5.3 Jameson's Mehrstufen-Verfahren

Das Verfahren von Jameson ist ein Vier-Schritt-Runge-Kutta-Algorithmus (siehe Kap. 4.4). Es stellt eine Kombination von effizienten Dissipationstermen, Techniken zur Konvergenzbeschleunigung und Mehrgitter-Verfahren dar, die zu einem äußerst schnellen und genauen Code führt. Das Verfahren wird vielfach angewandt und ist auch in Kombination mit einer Upwind-Diskretisierung der Gradienten der Flußvektoren im für die Übung verwendeten CFD-Paket Fluent implementiert.

6 Upwind-Verfahren

Die Familie der Upwind-Verfahren berücksichtigt die physikalischen Eigenschaften der Strömungsgleichungen in der diskreten Formulierung. Die Upwind-Verfahren umfassen unter anderem das "Flux Vector Splitting" und die heute weit angewandten Riemann-Verfahren.

6.1 "Flux Vector Splitting"-Verfahren

Eine stabile einseitige Diskretisierung der eindimensionalen Wellengleichung lautet in Abhängigkeit von der Wellengeschwindigkeit a :

$$\begin{array}{cc} \underline{c > 0} & \underline{c < 0} \\ u_i^{n+1} = u_i^n - c\tau(u_i^n - u_{i-1}^n) & u_i^{n+1} = u_i^n - c\tau(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad \text{mit } \tau = \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{array}$$

Die Erhaltungsgleichungen haben im allgemeinen Ausbreitungsgeschwindigkeiten unterschiedlichen Vorzeichens. Um dies zu berücksichtigen, kann man die beiden obigen Schemen kombinieren. Mit

$$c^+ = \max(c, 0) = \frac{1}{2}(c + |c|)$$

$$c^- = \min(c, 0) = \frac{1}{2}(c - |c|)$$

erhält man folgende allgemeine Form eines Upwind-Verfahrens erster Ordnung:

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\tau \left[c^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) \right] + \tau \left[c^- (u_{i+1}^n - u_i^n) \right]$$

Beachtenswert ist, daß c^+ immer positiv (oder Null) ist, und c^- immer negativ (oder Null).

Das Stabilitätslimit ist jetzt

$$CFL = \tau|c| \leq 1$$

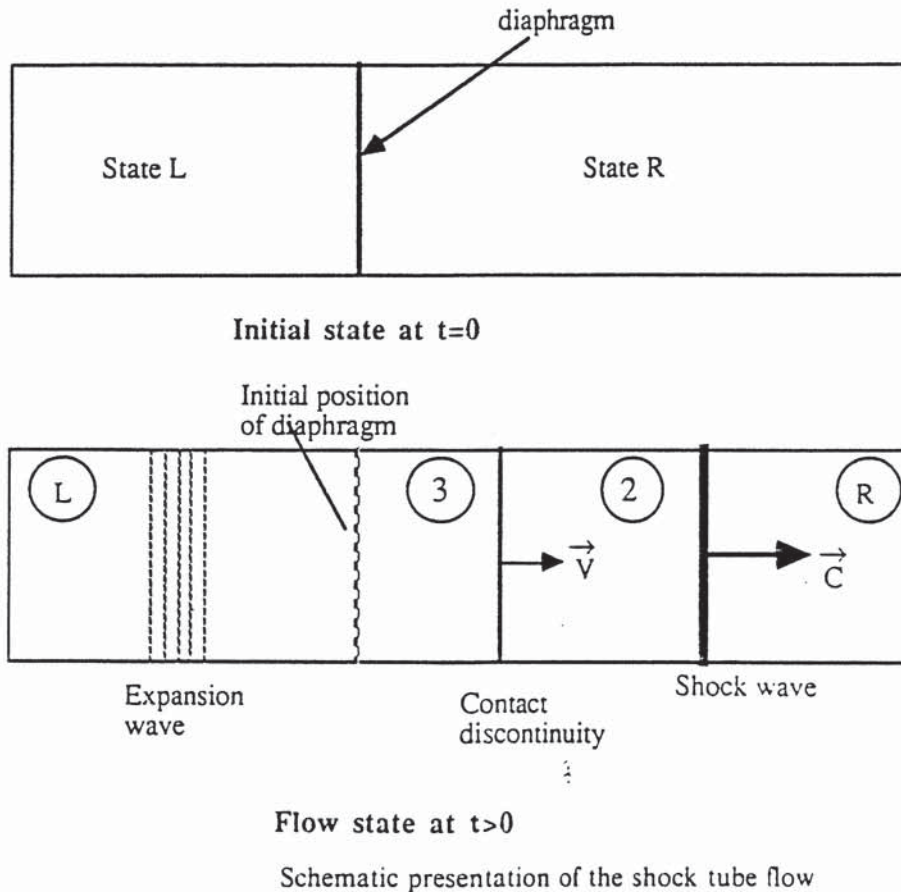
Diese Methode kann auch auf die Navier-Stokes-Gleichungen angewandt werden, indem man bei der Flußbilanzierung die Diskretisierung entsprechend der jeweiligen Ausbreitungsrichtung von Störungen durchführt. Man nennt dieses Verfahren dann "Flux Vector Splitting".

6.2 Riemann-Löser (Godunov-Verfahren)

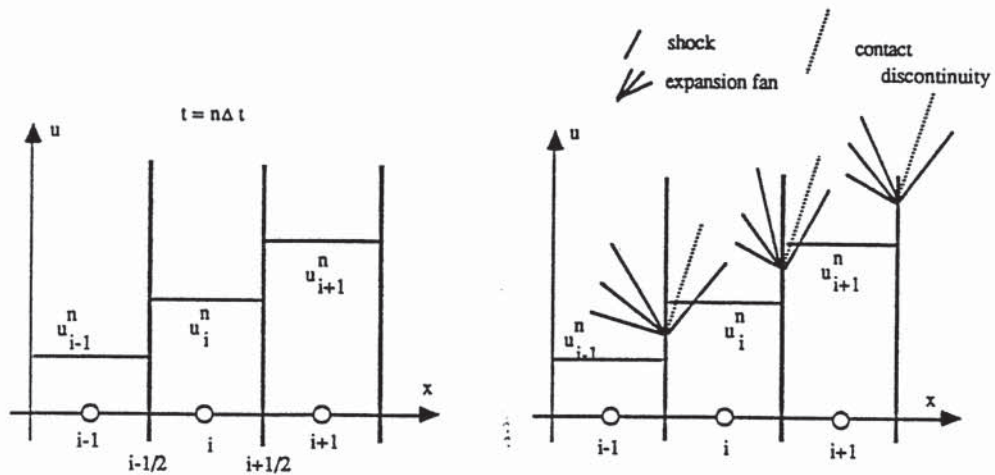
Man kann in der Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften der Strömungsgleichungen in der diskreten Formulierung noch einen Schritt weitergehen. Die grundsätzlichsste Idee dazu stammt von **Godunov** (1959).

Beim Verfahren von Godunov wird die Lösung zu einem bestimmten Zeitschritt als stückweise konstant über eine Netzzelle angesehen. Die Strömung zum nächsten Zeitschritt ergibt sich als das Ergebnis der Wechselwirkungen zwischen den Wellen, die von den Grenzen zwischen den einzelnen Zellen ausgehen. Die Lösung dieses Problems entspricht exakt der des Stoßwellenrohrs (Riemann-Problem).

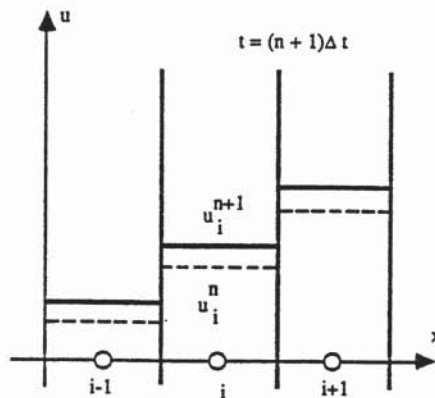
Das Stoßwellenrohr beschreibt die Ausbreitung von Störungen, wenn zum Zeitpunkt 0 eine Membrane, die zwei ungleiche ruhende Fluide trennt, weggesprengt wird. Die exakte Lösung des Stoßwellenrohrs setzt sich im allgemeinen aus einer Stoßwelle, einer Kontaktunstetigkeit und einem Expansionsfächer zusammen (siehe Abb.).



Nach Berechnung der Wellenausbreitung erhält man den neuen stückweise konstanten Strömungszustand zum Zeitpunkt $(n+1)$ aus der Mittelung über jede Zelle. Dieses Verfahren erzeugt einen konservativen expliziten Algorithmus von Genauigkeit erster Ordnung. Godunovs Algorithmus war überhaupt das erste erfolgreiche konservative Upwind-Verfahren.



(a) Step 1 : piecewise constant distribution at $t = n \Delta t$ (b) Step 2 : exact resolution of Riemann problem at interfaces



(c) Step 3 : averaging of perturbed state after time interval Δt

The three basic steps of Godunov's method

Die exakte Lösung des Riemann-Problems benötigt die Lösung einer nichtlinearen algebraischen Gleichung, die sehr aufwendig sein kann. Da durch die Mittelung viele Details der exakten Riemann-Lösung verloren gehen, hat man versucht, approximative Riemann-Löser zu entwickeln, die numerisch effektiver sind. Die wichtigsten zwei approximativen Riemann-Löser sind die Verfahren von **Osher** und **Roe**. Das zweite wurde auch im CFD-Paket Fluent angewandt.

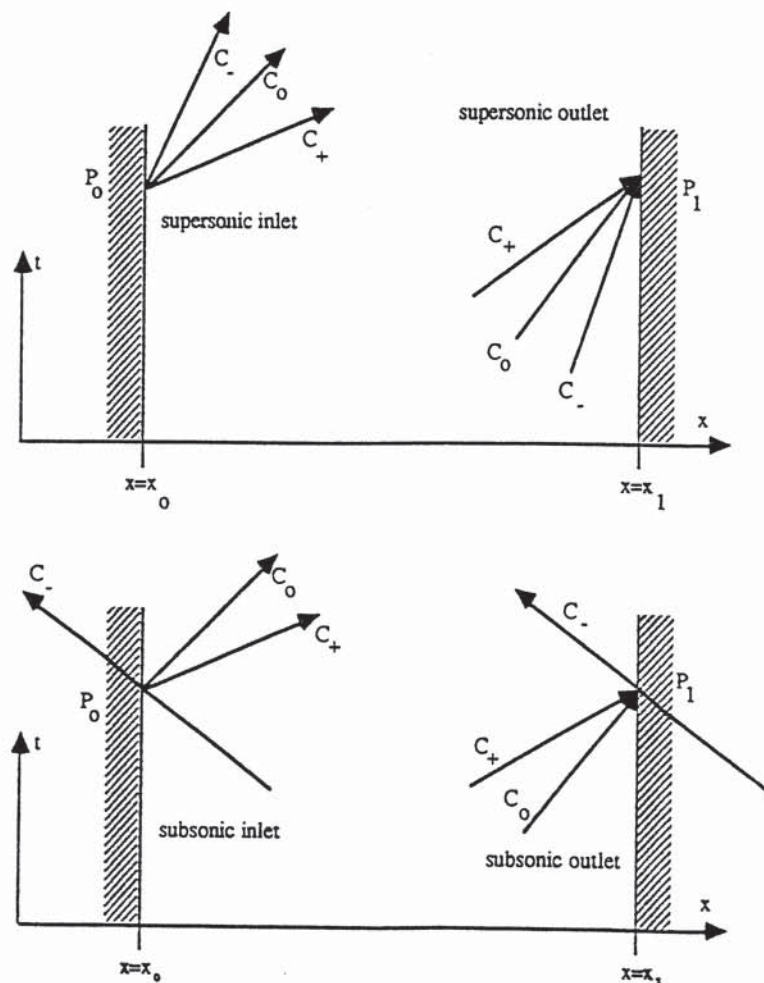
Um die Genauigkeit des Verfahrens zu verbessern, geht man heute meist von einer linearen Zustandsverteilung im Inneren des einzelnen Elements aus. Häufig startet man die numerische Berechnung mit dem Verfahren erster Ordnung, das stabiler ist, und wechselt nach Annäherung an die gewünschte Lösung auf ein Verfahren höherer Ordnung.

7 Randbedingungen

Aufgrund der eindimensionalen Charakteristikentheorie läßt sich die Anzahl der Randbedingungen für das eindimensionale Problem bestimmen. Für diese Überlegungen betrachtet man z.B. eine Eintrittsebene $x=x_0$, eine Austrittsebene $x=x_1$ und die Punkte P_1 und P_2 auf diesen Rändern mit gegebenen Strömungszuständen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Zahl der Randbedingungen hängt davon ab, wie die Information, die mit den Charakteristiken transportiert wird, mit den Rändern in Wechselwirkung tritt.

Im Überschall bewegen sich alle Charakteristiken von links nach rechts, d.h., daß sich am Eintrittsrand alle Charakteristiken von außen in das Rechengebiet hineinbewegen bzw. am Austrittsrand das Rechengebiet verlassen. Charakteristiken, die sich vom Rechengebiet nach außen bewegen, transportieren Informationen aus dem Strömungsfeld an den Rand und erlauben damit die Berechnung von Randwerten. Charakteristiken, die von außen kommen, müssen durch Randbedingungen ersetzt werden. Damit ergibt sich die Anzahl der notwendigen Randbedingungen am Eintritt mit drei, am Austritt mit Null entsprechend der folgenden Tabelle.

Im Unterschall bewegen sich nur zwei Charakteristiken von links nach rechts, die dritte wandert in umgekehrter Richtung. Die Anzahl der vorzugebenden Randbedingungen ergibt sich damit zu zwei am Eintritt und zu einer am Austritt.



Boundary conditions for one-dimensional inviscid flows

Table 16.1. Physical boundary conditions for one-dimensional inviscid flows

	Subsonic	Supersonic
Inlet	<i>Two conditions</i> w_1 and w_2 given	<i>Three conditions</i> w_1, w_2, w_3 given
Outlet	<i>One condition</i> w_3 given	<i>Zero conditions</i>

Bei mehrdimensionalen Anwendungen erhöht sich die Anzahl der von links kommenden Charakteristiken um eine (2D-Fall) bzw. zwei (3D-Fall). Z.B. ist die Anzahl der vorgegebenden Randbedingungen für dreidimensionale Unterschallströmung im Eintritt vier, im Austritt eine.

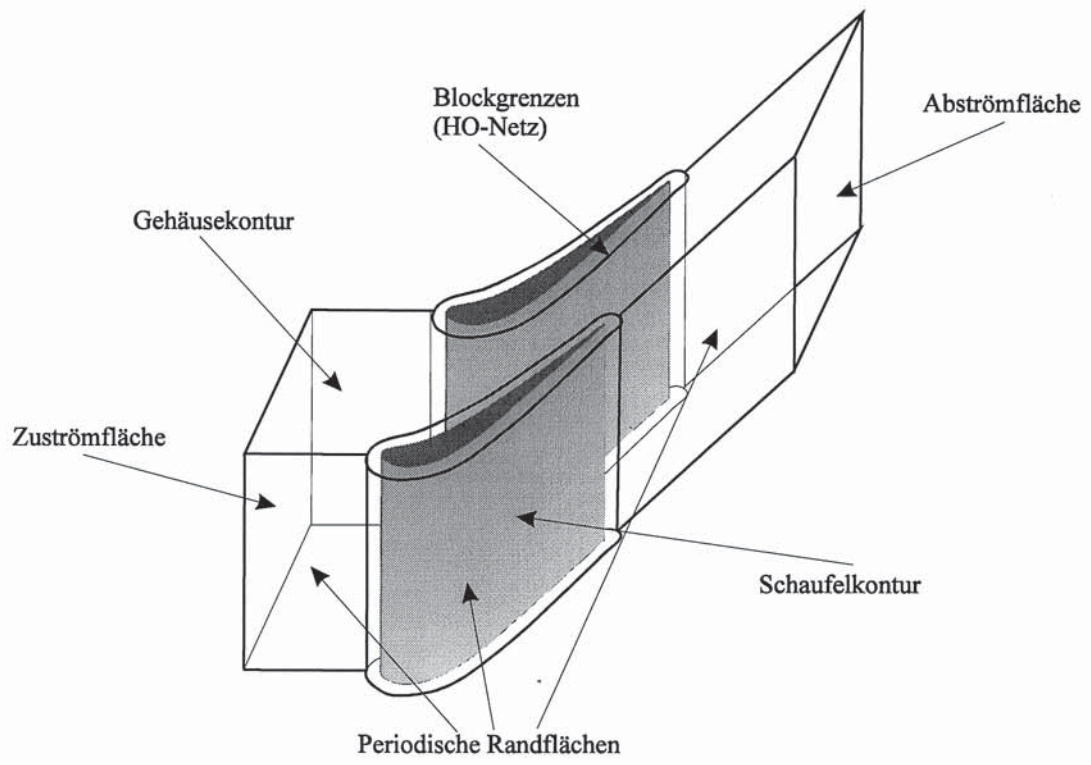
7.1 Randbedingungen für thermische Turbomaschinen

Bei der Berechnung der Strömung durch Schaufelkanäle thermischer Turbomaschinen treten vier Arten von Randbedingungen auf, die folgende Abbildung zeigt:

- Einströmbedingungen beschreiben die Zuströmung in den Schaufelkanal. Sie kann sub- oder supersonisch sein. Im subsonischen Fall werden im allgemeinen Totaldruck, Totaltemperatur sowie zwei Strömungswinkel vorgegeben. Im Überschall werden alle Zustandsgrößen vorgegeben.
- Abströmbedingungen für die Beschreibung der Strömung aus dem Schaufelkanal (sub- oder supersonisch). Im subsonischen Fall wird allgemein der statische Druck, im Überschall werden keine Randbedingungen vorgegeben.
- Konturbedingungen entlang Schaufeln, Rotor oder Gehäuse. In der reibungsfreien Strömung ist es die Tangentialbedingung, die verlangt, daß die Strömung der Kontur folgt, im viskosen Fall die Haftbedingung (Geschwindigkeit = 0).
- Periodizitätsbedingungen im Bereich vor und nach der Schaufel. Sie beruht auf der Annahme, daß sich die Strömung im Abstand einer Teilung wiederholt. Diese gilt aber nicht, wenn man z.B. das instationäre Verhalten in einer Laufschaufelreihe infolge der Nachlaufdele der Leitschaufeln untersuchen möchte (Kau, 1990).

Die Randwerte, die durch das innere Strömungsfeld bestimmt werden, werden durch eine der vorgenannten Extrapolation gewonnen. Dabei wird angenommen, daß das Netz am Rand dicht genug ist, um Extrapolation zu erlauben. Lineare Extrapolation erweist sich dabei als genauso gut wie Extrapolationen höherer Ordnung.

Im allgemeinen werden für jeden Zeitschritt zuerst die Werte an den Rändern aufgrund der Randbedingungen und der extrapolierten Werte berechnet. Danach erfolgt die Lösung im inneren Strömungsfeld. Diese Vorgangsweise wird als **explizite Implementierung** bezeichnet. Die Stabilität und Konvergenz des Rechenprogrammes sinkt dadurch, die Randbedingungen lassen sich aber leicht in das Programm einfügen und machen es dadurch sehr flexibel.



8. Techniken zur Konvergenzbeschleunigung

8.1. Local Time Stepping

Die CFL-Bedingung gibt einen maximalen Zeitschritt an, bei dem das zeititerative Verfahren noch konvergiert. Während die maximal erlaubte CFL-Zahl bei expliziten Verfahren bei 1 liegt, kann sie bei impliziten Verfahren in Abhängigkeit vom Strömungsproblem bis zu 100 und mehr betragen.

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}}$$

Aufgrund dieser Beziehung bestimmt die kleinste Netzzelle den erlaubten Zeitschritt und damit die Konvergenzgeschwindigkeit für das gesamte Rechengebiet.

Wenn zeitliche Genauigkeit nicht verlangt ist, wie es bei der Bestimmung einer stationären Strömung der Fall ist, kann man ein einfaches Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung verwenden, indem man einen lokalen Zeitschritt verwendet. Dieser variiert von Zelle zu Zelle in Abhängigkeit von Zellgröße und lokalen Strömungsgrößen. Man erlaubt damit der Lösung, zum stationären Zustand mit verschiedener Geschwindigkeit in jedem Punkt zeitlich voranzuschreiten. Anstelle einer gemeinsamen Zeitschrittgröße tritt damit eine gemeinsame CFL-Zahl. Diese Methode führt zu deutlichen Verbesserungen in der Konvergenzrate, obwohl die Gesamtkonvergenz noch immer von den sich am langsamsten entwickelnden Zonen abhängt.

8.2. Mehrgitter-Verfahren (Multigrid method)

Die Tatsache, daß der maximal mögliche Zeitschritt von der Zellgröße abhängt, kann als Motivation für das *geometrische Mehrgitterverfahren* gesehen werden.

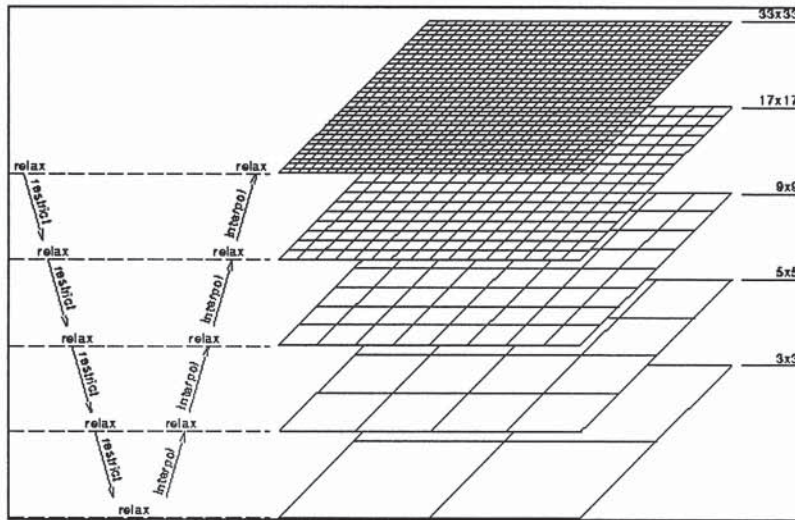
Der Lösungsalgorithmus wird hier auf unterschiedlich feinen Rechnernetzen (*Levels*) durchlaufen, wobei die Lösung auf den gröberen Netzen aufgrund des dadurch bedingten größeren Zeitschritts wesentlich schneller in zeitlicher Richtung voranschreitet.

Die Lösungen für die gröberen Netze werden durch Interpolation bis auf das feinste Netz übertragen und bewirken dadurch eine enorme Konvergenzsteigerung für dieses feinste Netz (an dessen Lösung man eigentlich interessiert ist).

Je nach Strategie können eine Vielzahl von Mehrgitter-Zyklen konstruiert werden. Eine einfache und vielfach angewendete Form ist der sog. *V-Zyklus*, welcher im folgenden gezeigt ist.

Festzuhalten ist, daß der *effektive Zeitschritt dieses Verfahrens* etwa wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\Delta t^{\text{V-Cycle}} = \Delta t_h + \Delta t_{h+1} + \dots + \Delta t_{h+N_{\text{MG}}} \cong \Delta t_h (1 + 2^1 + \dots + 2^{N_{\text{MG}}}) = \Delta t_h (2^{N_{\text{MG}}+1} - 1)$$



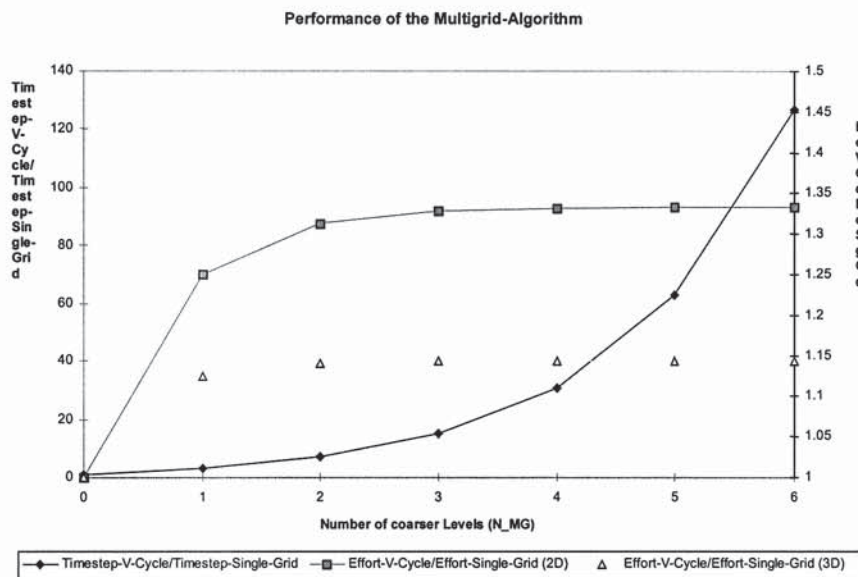
Schematische Darstellung eines V-Zyklus (Mehrgitterverfahren)

(Quelle: <http://www.cerfacs.fr/~douglas/mgnet/tutorials/xwb/mg.html>)

Weiters kann der *Rechenaufwand je V-Zyklus* unter der vereinfachenden Annahme, daß der Rechenaufwand (CPU) proportional zur Anzahl der Zellen ist, mit den Beziehungen für 3D-Berechnungen wie folgt angegeben werden.

$$CPU^{V-Cycle} \cong CPU_h \left(1 + \left(\frac{1}{8}\right)^1 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{8}\right)^{N_{MG}} \right) = CPU_h \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{N_{MG}+1}}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)} \rightarrow CPU^{V-Cycle} \leq CPU_h \cdot \frac{8}{7}$$

Die letzten beiden Beziehungen können graphisch veranschaulicht werden und untermauern das Potential dieser Methodik, denn beispielsweise bereits bei $N_{MG}=3$ erreicht man den 15-fachen Zeitschritt bei nur wenig größerem Rechenaufwand.



Zeitschritt und CPU-Zeit je V-Zyklus bezogen auf die Werte mit einem Rechenetz

Zusammenfassend kann konstatiert werden, daß die Mehrgittertechnik umso wirkungsvoller arbeitet, je feiner das Rechenetz ist.

9. Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen

Durch Hinzufügen der viskosen Flüsse zu den Eulergleichungen erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen.

9.1. Diskretisierung der viskosen Terme

Die Diskretisierung der viskosen Flüsse erfolgt immer durch zentrale Differenzenbildung und erfordert an den Bilanzgrenzen die Bestimmung verschiedener räumlicher Differentiale der Geschwindigkeitskomponenten und der statischen Temperatur. Zu diesem Zweck werden um ein Halbkrement $\Delta\xi/2$ verschobene Hilfszellen entsprechend der folgenden Abbildung verwendet.

9.2. Rechennetze für reibungsbehaftete Strömungen

Einer der wesentlichsten Unterschiede zur Berechnung von reibungsfreien Strömungen liegt in der Gestaltung des Rechennetzes. Um die viskosen Scherschichten in der Grenzschicht genügend genau aufzulösen, müssen genügend Netzpunkte innerhalb der Grenzschicht liegen, vor allem in Richtung normal zur Wand. Ein gängiges Maß für den Abstand der ersten Netzzeile von der Wand liegt bei $y^+=1$ (siehe folgende Definition). In Strömungsrichtung entspricht die Netzdichte der von reibungsfreien Problemen. Bei Strömungen hoher Reynoldszahl führt das zu sehr "gestreckten" Zellen.

$$y^+ = y \frac{\sqrt{\tau_{\text{wall}} / \rho}}{\mu}$$

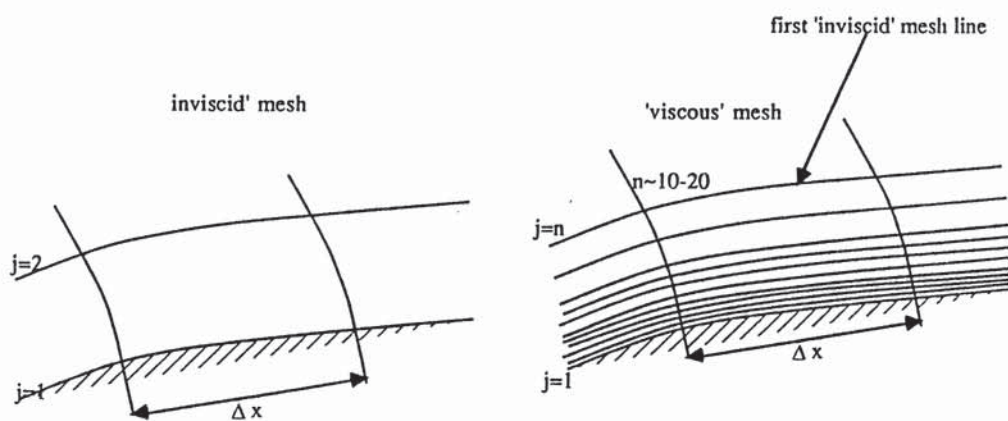


Figure 23.1.1 Typical differences between an 'inviscid' and a 'viscous' mesh in solid wall regions

9.3. Randbedingungen für reibungsbehaftete Strömungen

Unterschiede in den Randbedingungen zwischen Euler- und Navier-Stokes-Strömungen bestehen nur bei den festen Wänden. Bei reibungsbehafteter Strömung ist die relative Geschwindigkeit zwischen dem Fluid und der Wand gleich Null.

10. Turbulenzmodellierung

10.1. Allgemeine Betrachtungen

Die Eigenschaften einer allgemeinen Strömung werden durch die Reynoldszahl, die ein Maß für das Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskräften ist, charakterisiert:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

In technischen Anwendungen kann der Wert der Reynoldszahl zwischen 10^{-2} (bei Ölfilmströmungen) und 10^7 liegen (Strömung um ein Flugzeug). Mit einem Anstieg der Reynoldszahl kann sich die Natur der Strömung so stark ändern, daß gänzlich verschiedene Ansätze zu ihrer Berechnung notwendig sind. Das erste wichtige Merkmal ist, daß die Bereiche, in denen die hohen Geschwindigkeitsänderungen vor sich gehen, kleiner werden, sodaß detailliertere und daher aufwendigere Berechnungen notwendig werden. So gilt z.B., daß der Temperaturanstieg in einem Bereich um eine Turbinenschaufel stattfindet, der in der Größenordnung von $L \text{Re}^{-1/2}$ ist (Hunt, 1995). Das zweite wichtige Merkmal ist, daß die Strömung mit zunehmender Reynoldszahl instabil wird, und bei weiterem Anstieg der Reynoldszahl ein chaotischer, nichtperiodischer Strömungszustand eintritt, der nur durch statistische Kennzahlen beschrieben werden kann. Man spricht dann von turbulenter Strömung. Die kritische Reynoldszahl, bei der dieser Umschlag stattfindet, liegt bei Kanalströmungen in der Größenordnung von 10^3 , sodaß in thermischen Turbomaschinen (Re-Zahlen von $10^5 - 10^7$) immer vollturbulente Strömung auftritt.

Turbulente Strömung besteht also aus Wirbeln, die nur wenig zueinander korreliert sind, und die in Größe und Frequenz sehr stark schwanken (Verhältnis zwischen größten und kleinsten Wirbeln bis zu $10^3 - 10^4$). Dies führt zu stark dreidimensionalen Schwankungen der Strömungsgrößen. Da die turbulenten Schwankungen wesentlich größer sind als die molekularen Bewegungen, kommt es zu deutlichen Anstiegen im Wärmeübergang, in der Wandreibung, bei Mischvorgängen, usw.

Es wird allgemein angenommen, daß die Navier-Stokes-Gleichungen die turbulente Strömung in einem Kontinuum vollständig beschreiben. Um alle relevanten Strömungsphänomene einer turbulenten Strömung mit Hilfe einer "direct numerical solution" (DNS) zu erfassen, ist es einerseits notwendig, daß das Rechenetz die Auflösung aller charakteristischen Längenmaßstäbe gewährleistet, und andererseits, daß die Zeitschrittgröße so gering ist, daß eine zeitliche Auflösung turbulenter Vorgänge möglich ist. Lücke (1997) schätzt mit Hilfe dieser Beziehung die Rechenzeit eines schnellen Vektorrechners bei einer Reynoldszahl von 1000 mit 3.1 Stunden ab, bei $\text{Re} = 10^4$ liegt sie bereits bei 555 Stunden und bei $\text{Re} = 10^5$ bei 11.3 Jahren.

Die direkte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (DNS) ist derzeit nur für relativ geringe Reynoldszahlen möglich. Diese Ergebnisse können aber als Datenbasis für die Erprobung von Turbulenzmodellen verwendet werden. In absehbarer Zeit ist aber trotz der immensen Fortschritte in der Leistungsfähigkeit der Computer die technische Anwendung der DNS noch nicht möglich, sie wird aber das Fernziel der Turbulenzforschung sein.

Einen Ausweg bietet der Umstand, daß man sich in im allgemeinen nicht für die Momentanwerte der Zustandsgrößen einer Strömung interessiert, sondern für die zeitlichen

Mittelwerte, da diese die wichtigen Fragestellungen, wie Druckverluste, Massenstrom oder Wärmeübergang beschreiben. Deshalb führt man entsprechend einem Vorschlag von Reynolds eine zeitliche Mittelung der Erhaltungsgleichungen durch und bestimmt die dadurch auftretenden zusätzlichen Terme mit Hilfe von Turbulenzmodellen ("Schließungsproblem der Turbulenzmodellierung"). Im folgenden soll auf die zeitliche Reynolds'sche Mittelung der Erhaltungsgleichungen und auf die Turbulenzmodellierung genauer eingegangen werden.

10.2. Turbulenzmodelle

Turbulenzmodelle dienen zur Schließung der durch zeitliche Mittelung entstandenen Erhaltungsgleichungen. Wie gezeigt wird, haben jedoch alle verwendeten Turbulenzmodelle ihre Grenzen, ein allgemein gültiges Modell wurde noch nicht gefunden. Philosophisch könnte man auch argumentieren, daß man in den Navier-Stokes-Gleichungen eine exakte Beschreibung der turbulenten Strömung gefunden hat, und daß die Hoffnung, mit Hilfe von Turbulenzmodellen ein Alternativgleichungssystem zu finden, das dieselbe Genauigkeit und allgemeine Gültigkeit aufweist, zu optimistisch ist. Wenn man diesen Standpunkt akzeptiert, reduziert sich die Suche auf ein Modell, das ausreichende Genauigkeit für einen begrenzten Bereich bietet. In diesem Zusammenhang ist die Hypothese von Morkovin (1964) von Bedeutung. Sie besagt, daß die Auswirkungen von Dichteschwankungen auf die Turbulenzstruktur für Machzahlen bis 5 in Grenzschichtströmungen und in Nachlaufdüsen nur gering sind. Dies hat zur Folge, daß Turbulenzmodelle, die auf empirische Daten von inkompressiblen Experimenten beruhen, in diesem Bereich noch gültig sind. Die Turbulenzmodelle lassen sich nach der Art der Modellannahme in drei Gruppen einteilen, in die Wirbelviskositätsmodelle, in die Reynolds'schen Schubspannungsmodelle und in die Gruppe der "Large Eddy Simulation (LES)" (siehe folgende Abbildung).

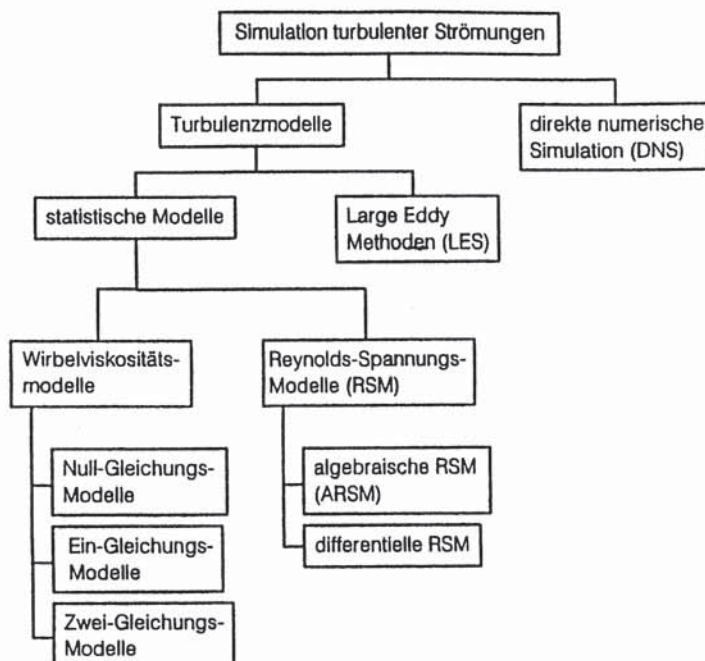


Abb.: Einteilung der Turbulenzmodelle (aus Lücke, 1997)

10.3. Wirbelviskositätsmodelle

Die meisten derzeit verwendeten Modelle fallen in die erste Gruppe der Wirbelviskositätsmodelle. Diese Modelle gehen auf einen Ansatz von Boussinesq (1877) zurück, der aufgrund von Analogieüberlegungen zu den viskosen Molekülbewegungen die scheinbaren turbulenten Spannungen mit den tatsächlichen Scherspannungen mit Hilfe einer scheinbaren oder turbulenten Viskosität in Beziehung bringt:

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k$$

Der letzte Term ist notwendig, um Konsistenz für den Fall $i=j$ zu erhalten, wo der turbulente Spannungstensor gleich dem zweifachen der turbulenten kinetischen Energie $\bar{\rho} k$ ist, mit

$$k = \frac{\overline{u_i'' u_i''}}{2} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\bar{\rho}}$$

10.3.1. Algebraische Modelle

Die sogenannten Null-Gleichungs- oder algebraischen Modelle berechnen die Wirbelviskosität aus den zeitlichen Mittelwerten der lokalen Strömungsgrößen und sind daher am einfachsten anwendbar. Eines der ersten Modelle dieser Art geht auf Prandtl (1925) zurück, der die turbulente Zähigkeit aus dem örtlichen Geschwindigkeitsgradienten und einer turbulenten Mischungsweglänge berechnet, die aber empirisch festzulegen ist.

$$v_T = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \Rightarrow \quad \mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Sehr gerne wird das Modell von Baldwin und Lomax (1978) aufgrund seiner Einfachheit verwendet. Dieses Modell liefert recht gute Ergebnisse für dünne anliegende Grenzschichtströmungen entlang fester Berandungen bei nahezu orthogonalen Rechennetzen (Tragflügelströmungen). Schwierigkeiten treten jedoch auf, wenn diese Modelle für turbulente Strömungen mit starken Sekundäreffekten verwendet werden, wie bei starken Krümmungen oder Ablösungen, oder für die Modellierung des Nachlaufs. Ein Grund dafür ist, daß die algebraischen Modelle auf der Annahme eines Gleichgewichts zwischen Turbulenzproduktion und -dissipation beruhen. Zudem sind diese Modelle nicht in der Lage, Freistromturbulenz zu berücksichtigen.

10.3.2. Eingleichungsmodelle

Verbesserungen in der Turbulenzmodellierung werden durch die Berücksichtigung von Transportvorgängen mittels der sogenannten Eingleichungsmodelle, die die Lösung einer zusätzlichen Differentialgleichung verlangen, erzielt. Ursprünglich wurden Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie gelöst. Da für die Wirbelviskosität nach Prandtl gilt:

$$\mu_t \sim l_m \sqrt{k}$$

muß noch eine zusätzliche algebraische Gleichung für den turbulenten Längenmaßstab gelöst werden. Neuere Verfahren verwenden andere Transportgrößen und sind damit zum Teil sehr erfolgreich.

Ein interessantes Modell, dem in letzter Zeit große Aufmerksamkeit zukam und das auch von Fluent angeboten wird, wurde von Spalart und Allmaras 1992 vorgestellt.

10.3.3. Zwei- und Mehrgleichungsmodelle

Obwohl die Eingleichungsmodelle im allgemeinen eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie lösen, benötigen sie für die Bestimmung der Wirbelviskosität eine Zusatzinformation, die meist die lokalen Strömungszustände berücksichtigt. Auf der Suche nach verbesserten Turbulenzmodellen hat man schon früh versucht, eine zweite Transportgleichung zu lösen. Launder und Spalding gaben 1972 eine Übersicht über verschiedene numerisch untersuchte Größen, von denen sich eigentlich nur zwei Varianten durchgesetzt haben, das **k-ε- und das k-ω- bzw. k-ω²-Modell**. Diese beiden Modelle haben unter anderem gegenüber Eingleichungsmodellen auch den Vorteil, daß sie die Berücksichtigung des Freistromturbulenzniveaus am Eintritt ins Rechengelände erlauben.

k-ε-Modell

Das k-ε-Modell ist derzeit das am häufigsten verwendete Zweigleichungsmodell. Es löst eine zweite Differentialgleichung für die Dissipation ε der kinetischen Energie. Es gilt, daß

$$\varepsilon \sim k^{3/2} l_m^{-1} \Rightarrow \varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / l_m$$

sodaß die Wirbelviskosität mit Hilfe der Prandtl-Kolmogorov-Beziehung bestimmt werden kann:

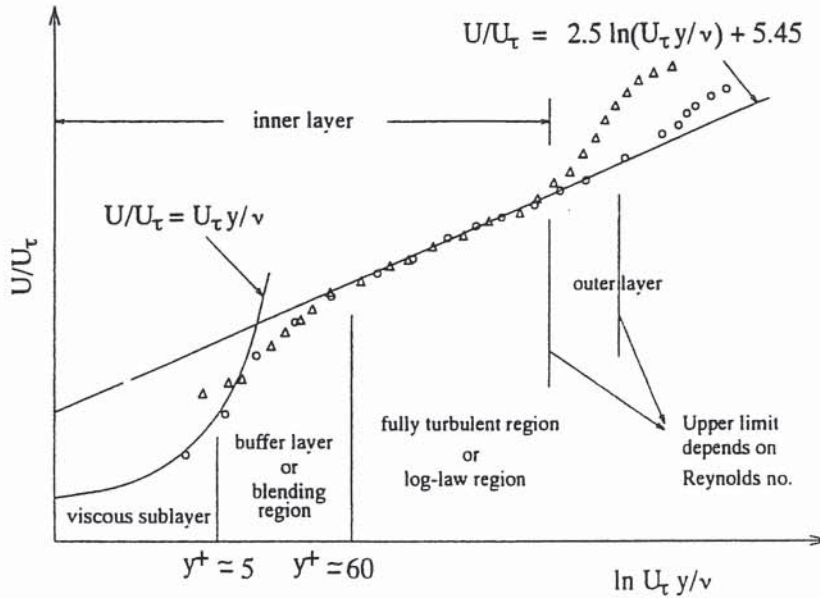
$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Bei diesem 2-Gleichungs-Turbulenzmodell werden zwei Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k, sowie für deren Dissipation ε gelöst. Prinzipiell können aus den Navier-Stokes Gleichungen unter der Voraussetzung 'freier Turbulenz' (kein dämpfender Einfluß fester Wände) zwei Transportgleichungen für diese beiden Variablen abgeleitet werden. Dabei entstehen allerdings Terme, die neue Unbekannte beinhalten und entsprechend modelliert werden müssen.

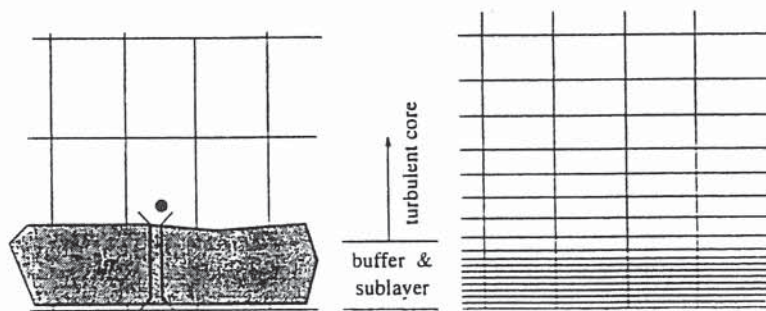
Ingesamt sind die Zweigleichungsmodelle derzeit sehr beliebt, da sie sehr viele physikalische Grundlagen integrieren, und dennoch in vertretbarer Zeit lösbar sind. Sie versagen jedoch meist, wenn komplexe Strömungsstrukturen mit Krümmungs- und Dralleffekten vorhanden sind. Grund dafür ist meist die den Modellen zugrunde liegende Annahme der Isotropie der Turbulenz. In jüngster Zeit wurden deshalb anisotrope Erweiterungen für die Zweigleichungsmodelle vorgestellt, die meist das Lösen einer zusätzlichen partiellen Differentialgleichung für eine weitere turbulente Größe verlangen. Eine andere Alternative ist der Übergang auf die "Reynolds Stress Models".

10.3.4. Verwendung von Wandgesetzen

There are two approaches to modeling the near-wall region. In one approach, the viscosity-affected, inner region (viscous sublayer and buffer layer) is not resolved. Instead, semi-empirical formulas called “wall functions” are used to bridge the viscosity-affected region between the wall and the fully-turbulent region. The use of wall functions obviates the need to modify the turbulence models to account for the presence of the wall.



In another approach, the turbulence models are modified to enable the viscosity-affected region to be resolved with a mesh all the way to the wall, including the viscous sublayer. For purposes of discussion, this will be termed the “near-wall modeling” approach. These two approaches are depicted schematically in Figure 9.7.2.



Wall Function Approach

- The viscosity-affected region is not resolved, instead is bridged by the wall functions.
- High-Re turbulence models can be used.

Near-Wall Model Approach

- The near-wall region is resolved all the way down to the wall.
- The turbulence models ought to be valid throughout the near-wall region.

10.4. "Reynolds Stress Closure"

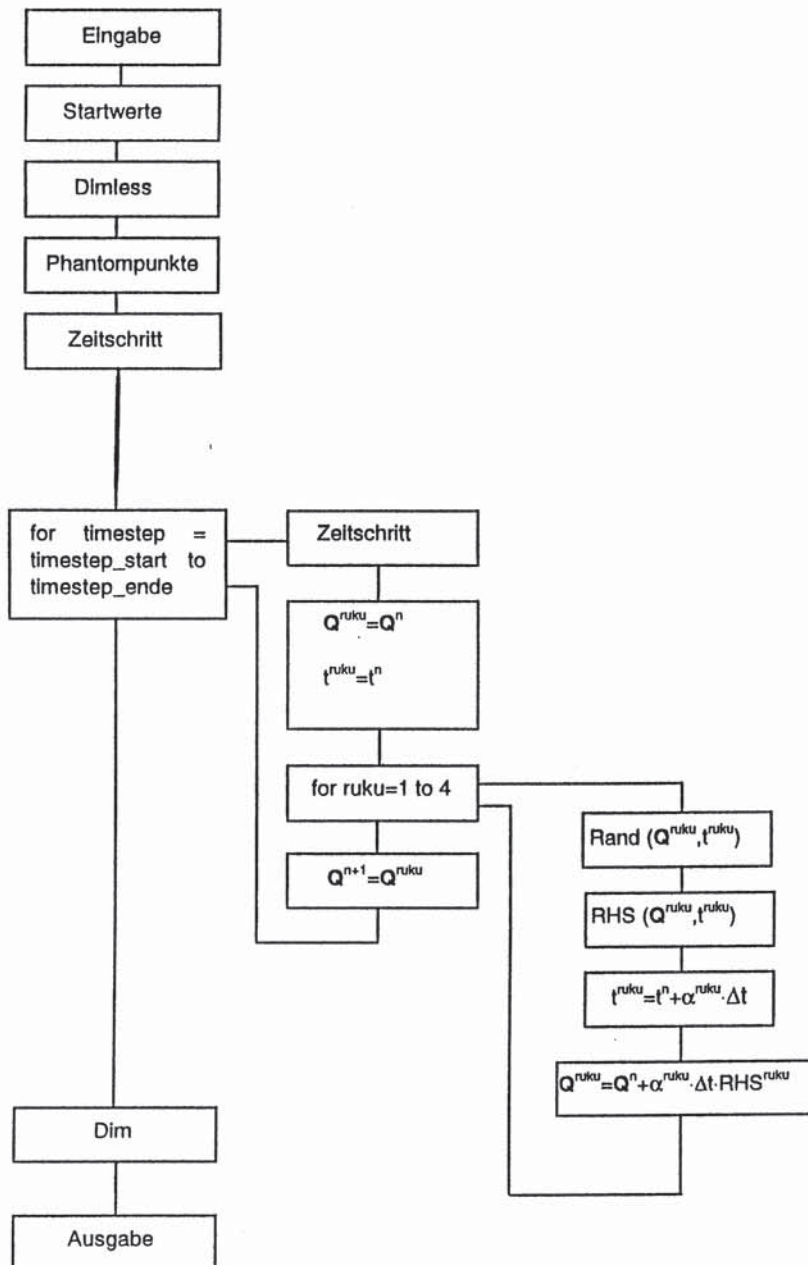
Alle vorhin angeführten Ansätze beruhen auf dem Zusammenhang zwischen turbulenten Spannungen und dem Hauptspannungstensor. Um komplexe Strömungen zu lösen, wird deshalb seit Beginn der 70er Jahre (Hanjalić und Launder, 1972; Donaldson, 1972) daran gearbeitet, das Schließungsproblem der Turbulenzmodellierung durch Transportgleichungen für die turbulenten Spannungen zu bewerkstelligen. Man nennt diesen Ansatz "Reynolds Stress Closure" bzw. "Second Order Closure". Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, daß der anisotrope Charakter der einzelnen Komponenten berücksichtigt werden kann. Er verlangt jedoch die Lösung von Transportgleichungen für alle Komponenten des Spannungstensors, für den turbulenten Wärmestrom und für eine zusätzliche Größe, meist der Dissipation ε , die für die Modellierung der Korrelationen höherer Ordnung benötigt wird (vier zusätzliche Gleichungen im 2D-Fall und sieben zusätzliche im 3D-Fall). Ausgehend von ursprünglich einfachen Strömungsproblemen werden heute schon komplexere, technisch relevante Strömungen, wie Tragflügel- oder Kanalströmungen, gelöst. Die Vorteile dieses doch recht komplexen Ansatzes zeigen sich aber erst bei komplexen Strömungen oder Einflüssen, wie Ablöseerscheinungen, Rotation, Auftrieb oder Stromlinienkrümmung.

10.5. Large Eddy Simulation (LES)

Das Verbindungsglied zwischen den statistischen Verfahren, die auf die Reynolds'schen Gleichungen beruhen, und der DNS-Methode stellen die sogenannten "Large Eddy Simulation"-Verfahren (LES) dar. Diese Verfahren lösen die großen turbulenten Wirbelstrukturen direkt und modellieren nur die kleinen Turbulenzstrukturen, die sogenannten "Subgrid Scale"-Bewegungen (Wirbel, die kleiner als die Netzmaschenweite sind).

Der Rechenaufwand der LES-Verfahren liegt zwar deutlich unter dem der DNS-Methode, er ist jedoch für technische Anwendungen noch immer viel zu groß. Diesen Verfahren dürfte jedoch bei steigender Rechnerleistung die Zukunft in der Turbulenzmodellierung gehören.

11. Ablauf eines CFD-Codes am Beispiel des Runge-Kutta-Verfahrens



Implementierung des Runge - Kutta Verfahrens

12. Druckkorrektur-Verfahren

Die Druckkorrektur-Verfahren bilden die Basis zahlreicher kommerzieller CFD-Codes. Der Grund dafür ist, daß sie sehr gut für langsame Strömungen geeignet sind und bereits Anfang der 70-er Jahre entwickelt wurden.

Das Verfahren ist eine iterative Prozedur zwischen Geschwindigkeits- und Druckfelder. Ausgehend von einer Anfangsnäherung für die Druckverteilung kann mit Hilfe der Impulsgleichungen ein Geschwindigkeitsfeld bestimmt werden. Das sich ergebende Geschwindigkeitsfeld erfüllt aber nicht die Kontinuitätsgleichung und muß daher nachkorrigiert werden. Da diese Korrektur natürlich wiederum Einfluß auf die Druckverteilung hat, kann eine Korrekturgleichung für das Druckfeld gewonnen werden. Diese Korrekturgleichung ist eine Poisson-Gleichung (elliptische Gleichung).

Dieser Algorithmus wurde von Patankar und Spalding (1972) entwickelt und **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) genannt.

Die Abfolge der Iterationsschritte lautet:

1. Initialisieren der Strömungsvariablen u^* , v^* , p^*
2. Berechnung der Transportkoeffizienten mit Hilfe der Strömungsvariablen
3. Lösen der Impulsgleichungen zur Bestimmung von u^* , v^*
4. Lösen der Druckkorrekturgleichung zur Bestimmung von p'
5. Korrektur der Druckverteilung, Bestimmung des neuen p^*
6. Korrektur der Geschwindigkeitsverteilung, Bestimmung der neuen u^* , v^*
7. Lösen der weiteren Gleichungen für Energie, Turbulenz, ...
8. Wiederholung des Ablaufes ab Schritt 2, bis eine konvergente Lösung gefunden ist

Verwendete und weiterführende Literatur

Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Verlag Hemisphere Publishing Corporation, 1984

Fletcher, C.A.J., "Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques", Springer Verlag, 1991

Fletcher, C.A.J., "Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 2: Specific Techniques for Different Flow Categories", Springer Verlag, 1991

Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1: Fundamentals of Numerical Discretization", Verlag John Wiley & Sons, 1988

Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows", Verlag John Wiley & Sons, 1988

Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Verlag Hemisphere Publishing Corporation, 1980 (SIMPLE-Verfahren)

VKI, 1989, "Numerical Methods for Flows in Turbomachinery", VKI-LS 1989-06

VKI, 1991, "Introduction to the Modeling of Turbulence", VKI-LS 1991-02

VKI, 1994, "Computational Fluid Dynamics ", VKI-LS 1994-05

Vorlesungen an der TU Graz

321.023: Meile, W., Steiner, H., "Numerische Methoden in der Strömungslehre und Wärmeübertragung"

317.040: Benigni, H., Meusberger, P., "Rechnerische Simulation von Strömungsmaschinen und Anlagen"

319.082: Sanz, W., "CFD in Turbomaschinen und Energieanlagen"

319.070: Woisetschläger, J., "Laser in der Schwingungs- und Strömungsmeßtechnik"

Interessante Home Pages im Internet

- <http://www.cfd-online.com>
- <http://www.fluent.com>
- <http://www.ansys.com>
- <http://www.avl.com>