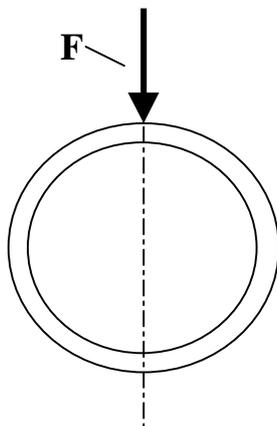
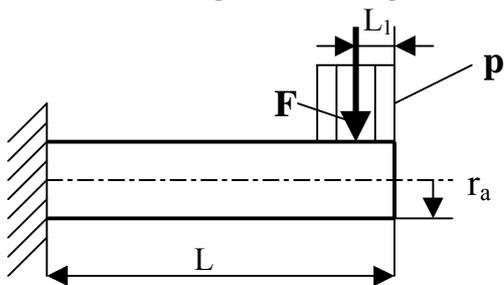


Vorlesungs-Beispiel

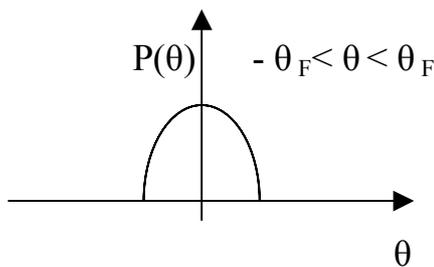
Dr. Hellmann

Kragträger, Vergleich Schalen- und Balkentheorie

Skizze der Aufgabenstellung:



$$\theta_F = \pi/6$$



$$p(\theta) = p_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \theta}{2 \cdot \theta_F}\right)$$

Geg.: $L=10^3$ mm, $L_1=25$ mm, $r_a=100$ mm, $F=10^4$ N,
 $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu=0.3$, $\sigma_{zul}=45$ MPa

Ges.:

1. Dimensionierung des Balken-Querschnittes (Kreisring-Profil) nach der Balkentheorie mit $\sigma_{v \max} = \sigma_{zul}$,
2. Nachrechnung des so dimensionierten Balkens als Schale nach der Biegetheorie mit beliebiger Belastung,
3. Überprüfung der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen an der Einspannstelle aus den Schalenschnittgrößen,
4. Vergleich der Verformungen der Balkenlösung (mit Berücksichtigung der Querkraftschubverzerrung) und der Schalenlösung,
5. Ort und Größe der maximalen Vergleichsspannung nach beiden Theorien,
6. Vergleich und Bewertung der beiden Lösungen.

Beschreibung:

Ein Kragträger mit Kreisringquerschnitt und gegebener Belastung, soll nach der Balkentheorie dimensioniert werden. Anschließend wird dieser Träger nach der Biegetheorie berechnet. Die Lasteinleitung der Einzelkraft F verteilt sich dabei am freien Ende in Achsrichtung konstant auf einer Länge von $2 \cdot L_1$ und in Umfangsrichtung als Kosinushalbwellen auf einem Winkel von $2 \cdot \theta_F = 60^\circ$. Die Richtung der Flächenlast ist normal zur Schalenoberfläche.

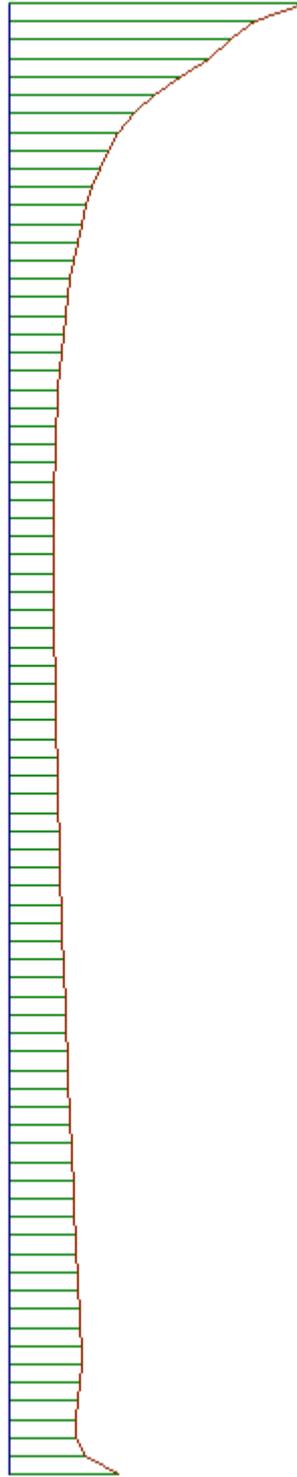
Die Ergebnisse der Berechnung nach der Balken- und nach der Schalentheorie sind vergleichend zu bewerten

σ_v – Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese

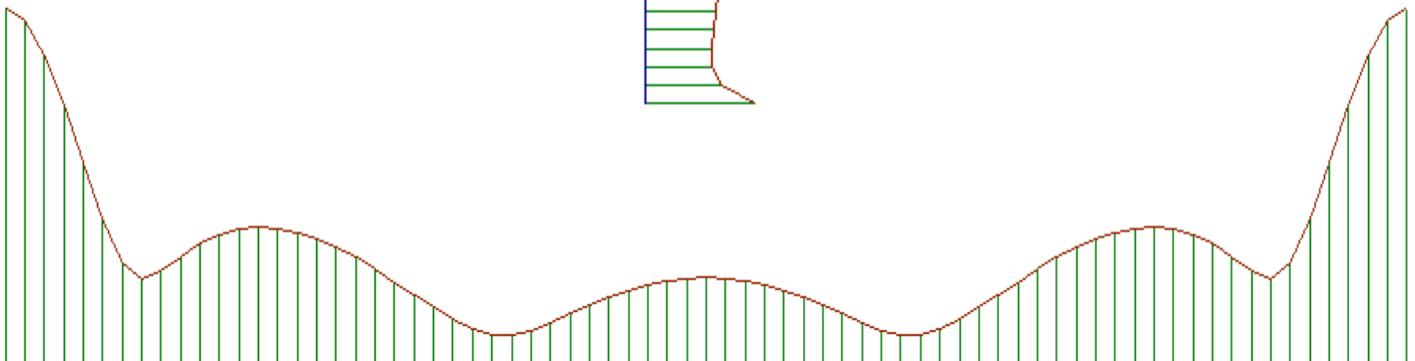
Beispiel Kragträger (Biegetheorie mit beliebiger Belastung),

dimensionslose Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese an der Außenkontur entlang des Meridians für den Umfangswinkel $\theta=0$ und entlang des Breitenkreises am freien Ende der Lasteinleitung, Bezugsspannung $\sigma_0 = 100\text{MPa}$

SIGV4a max/min = 1.612213/0.2443979



SIGV4a max/min = 1.612213/0.1322077



Kragträger, Vergleich Balkentheorie und Biegetheorie der Rotationsschale mit beliebiger Belastung

Einheiten definieren : $N := N$ $MPa := \frac{N}{mm^2}$

Geg. : Zylinder-Länge $L := 10^3 \cdot mm$
 halbe Länge der Lasteinleitung $L_1 := 25 \cdot mm$ $L_2 := 2 \cdot L_1$ $L_3 := L - L_1$
 Zylinder-Außenradius $r_a := 100 \cdot mm$
 resultierende Querraft der Lasteinleitung $F_R := 10^4 \cdot N$
 Materialwerte $E := 2.1 \cdot 10^5 \cdot MPa$ $\nu := 0.3$ $G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ $\sigma_{zul} := 45 \cdot MPa$

1. Dimensionierung nach der Balkentheorie :

$$M_{max} := F_R \cdot L_3 \qquad W_b = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a} \qquad \sigma_{max} = \sigma_{zul} = \frac{M_{max}}{W_b}$$

damit wird $r_i := \sqrt[4]{r_a^4 - \frac{4 \cdot F_R \cdot L_3}{\sigma_{zul} \cdot \pi} \cdot r_a}$ $r_i = 92.2474 \text{ mm}$

gewählt $r_i := 92 \cdot mm$

daraus folgt $h := r_a - r_i$ $h = 8 \text{ mm}$ $r := \frac{1}{2} \cdot (r_a + r_i)$ $r = 96 \text{ mm}$

2. Berechnung der Fourierreihe für die Lasteinleitung

$$\theta_F := \frac{\pi}{6} \qquad m_{max} := 100 \qquad m_{Roscha} := 8 \qquad m := 0..m_{max}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_F}^{\theta_F} \cos\left(\frac{\pi \cdot \theta}{2 \cdot \theta_F}\right) \cdot \cos(m \cdot \theta) \, d\theta = \frac{\theta_F \cdot \cos(m \cdot \theta_F)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (m \cdot \theta_F)^2}$$

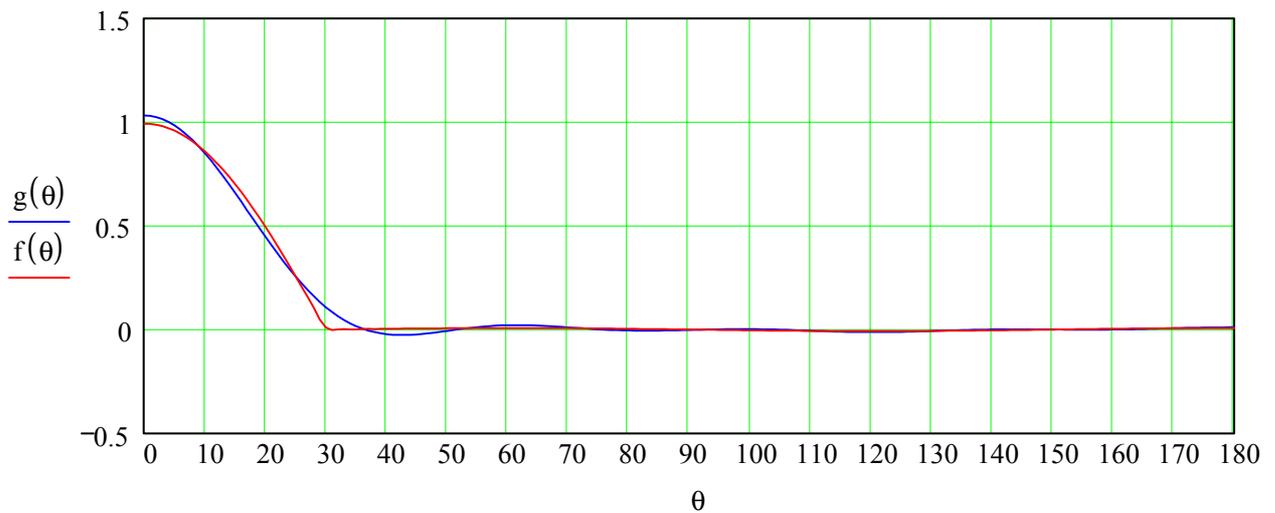
$$\theta := 0..180$$

$$a_m := \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} & \text{if } m = 3 \\ \frac{\theta_F \cdot \cos(m \cdot \theta_F)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (m \cdot \theta_F)^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

	0
0	0.2122
1	0.2067
2	0.191
3	0.1592
4	0.1364
5	0.1034
6	0.0707
7	0.0413
8	0.0174
9	0
10	-0.0105
11	-0.0148
12	-0.0141
13	-0.0103
14	-5.1066 · 10 ⁻³

$$g(\theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m_{\text{Roscha}}} a_m \cdot \cos\left(m \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$f(\theta) := g(\theta) + \sum_{m=m_{\text{Roscha}}+1}^{m_{\text{max}}} a_m \cdot \cos\left(m \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$



Fourier-Reihe der Flächenlast für Roscha :

$$p_z(p, \theta) := p \cdot \sum_{m=0}^{m_{\text{Roscha}}} a_m \cdot \cos(m \cdot \theta)$$

Achtung, es gilt also für die Eingabe in Roscha $a_0 := \frac{a_0}{2}$!

Wegen der Orthogonalität der Reihenglieder liefert nur das Glied mit $m=1$ einen

Anteil am vertikalen (Querkraft-) Gleichgewicht $p := \frac{F_R}{a_1 \cdot L_2 \cdot r \cdot \pi}$, $p = 3.2075 \text{ MPa}$.

$$F(p) := L_2 \cdot r \cdot \int_{-\pi}^{\pi} p_z(p, \theta) \cdot \cos(\theta) d\theta \quad F(p) = 1 \times 10^4 \text{ N}$$

3. Erfüllung der Roscha-Gleichgewichtsbedingungen an der Einspannstelle

Roscha-Ergebnisse des Grundlastfalles mit $m=1$ an der Einspannstelle :

$$n_r(\theta) := -0.1146 \cdot a_1 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \cos(\theta) \quad n_y(\theta) := 1.6143 \cdot a_1 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \cos(\theta)$$

$$n_{\phi\theta}(\theta) := 0.0458 \cdot a_1 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \sin(\theta) \quad m_\phi(\theta) := -0.1392 \cdot a_1 \cdot 10^4 \cdot \text{N} \cdot \cos(\theta)$$

Kräfte-Gleichgewicht :

$$F_{nr} := \int_0^{2 \cdot \pi} n_r(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta \quad F_{n\phi\theta} := \int_0^{2 \cdot \pi} n_{\phi\theta}(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot r \, d\theta$$

$$F_{nr} = -7.1457 \times 10^3 \text{ N} \quad F_{n\phi\theta} = 2.8558 \times 10^3 \text{ N} \quad F_{nr} + F_{n\phi\theta} = 1.0002 \times 10^4 \text{ N}$$

$$F_R = 1 \times 10^4 \text{ N}$$

Momenten-Gleichgewicht :

$$M_{ny} := \int_0^{2 \cdot \pi} n_y(\theta) \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta \quad M_{m\phi} := \int_0^{2 \cdot \pi} m_\phi(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta$$

$$M_{ny} = 9.6631 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad M_{m\phi} = -8.6797 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad M_{ny} - M_{m\phi} = 9.7499 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$F_R \cdot L_3 = 9.75 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

4. Querkraftschubverformung nach der Balkentheorie

$$F_Q := F_R$$

Formänderungsarbeit der Querkraftschubspannungen :

$$W_Q = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} \, dV \quad dV = L_3 \cdot dA$$

Schubfluß im dünnwandigen geschlossenem Profil ($h=\text{konst.}$) :

$$t(s) = h \cdot \tau(s) = \frac{F_{Qy}}{I_{xx}} \cdot S_x(s) \quad dS_x(s) = y(s) \cdot dA \quad dA = h \cdot ds$$

Für dünnwandigen Kreisring-Querschnitt : $ds = r \cdot d\theta \quad y(\theta) := r \cdot \cos(\theta) \quad S_x(0) = 0$

$$S_x = h \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \quad I_{xx} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_a^4 - r_i^4) \quad I_{xx} = 2.2274 \times 10^7 \text{ mm}^4 \quad A := \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)$$

zur Kontrolle das Flächenträgheitsmom. dünnwandig :

$$\int_0^{2 \cdot \pi} y(\theta)^2 \cdot h \cdot r \, d\theta = 2.2236 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\tau_0 := \frac{F_Q}{I_{XX}} \cdot r^2 \quad \tau_0 = 4.1375 \text{ MPa} \quad \tau(\theta) := \tau_0 \cdot \sin(\theta)$$

Damit die Formänderungsarbeit und Einführung des Querkraft-Schubfaktors :

$$W_Q = L_3 \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_{Qy}}{I_{XX}} \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \right)^2 \cdot h \cdot r \, d\theta = \frac{F_{Qy}^2 \cdot r^5 \cdot h \cdot \pi \cdot L_3}{2 \cdot G \cdot I_{XX}^2} = \kappa \cdot \frac{F_{Qy}^2 \cdot L_3}{2 \cdot G \cdot A}$$

$$\text{Daraus folgt der Schubfaktor } \kappa = \frac{A \cdot r^5 \cdot h \cdot \pi}{I_{XX}^2} = \frac{(r_a^2 - r_i^2) \cdot (r_a + r_i)^5 \cdot (r_a - r_i)}{2 \cdot (r_a^4 - r_i^4)^2}$$

$$\kappa := \frac{1}{2} \cdot \frac{(r_a + r_i)}{(r_a^2 + r_i^2)^2} \quad \kappa = 1.9931$$

$$v_M = \int_0^{L_3} \frac{M(s)}{E \cdot I_{XX}} \cdot \frac{d}{dF_Q} M(s) \, ds$$

$$v_Q := \kappa \cdot \frac{F_Q \cdot L_3}{G \cdot A} \quad v_Q = 0.0499 \text{ mm}$$

$$v_M := \int_0^{L_3} \frac{F_Q \cdot s}{E \cdot I_{XX}} \cdot s \, ds \quad v_M = 0.6605 \text{ mm}$$

$$\text{Durchbiegung an der Lasteinleitung : } v_{\text{ges}} := v_Q + v_M \quad v_{\text{ges}} = 0.7103 \text{ mm} \quad \frac{v_Q}{v_M} = 0.0755$$

zum Vergleich die Roscha-Ergebnisse an der Lasteinleitungsstelle (nicht am freien Rand):

$$v_\theta(65^\circ) = 0.7057 \cdot \text{mm}$$

$$v_\theta(80^\circ) = 0.7155 \cdot \text{mm}$$

$$v_\theta(70^\circ) = 0.7150 \cdot \text{mm}$$

$$v_\theta(85^\circ) = 0.7075 \cdot \text{mm}$$

$$v_\theta(75^\circ) = 0.7182 \cdot \text{mm}$$

$$v_\theta(90^\circ) = 0.6944 \cdot \text{mm}$$

5. Ort und Größe der max. Vergleichsspannung

nach Balkentheorie an der Einspannstelle für Winkel $\theta = 0$:

$$\sigma_{v\text{Balken_max}} := \frac{F_Q \cdot L_3}{I_{XX}} \cdot \left(r + \frac{h}{2} \right) \quad \sigma_{v\text{Balken_max}} = 43.7721 \text{ MPa}$$

zum Vergleich die entsprechenden Roscha-Spannungen für den Grundlastfall $m=1$:

$$\frac{n_y(0)}{h} = 41.7192 \text{ MPa}$$

$$\frac{6 \cdot m_\phi(0)}{h^2} = -26.9807 \text{ MPa}$$

Dazu kommen aber noch Umfangsspannungen, die es in der Balkentheorie nicht gibt. Die Spannungen für den Kombinationslastfall (Summe aller Reihenglieder =>Fouriersynthese) an der Einspannstelle für $\theta = 0$ sind:

$$\sigma_{\phi m} = 40.64 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{\phi b} = -25.80 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_{v_Au\beta en} = 59.05 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{v_Innen} = 13.19 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_{\theta m} = 12.19 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{\theta b} = -7.74 \cdot \text{MPa}$$

Die größten Vergleichsspannungen sind aber am freien Rand bei $\theta = 0$:

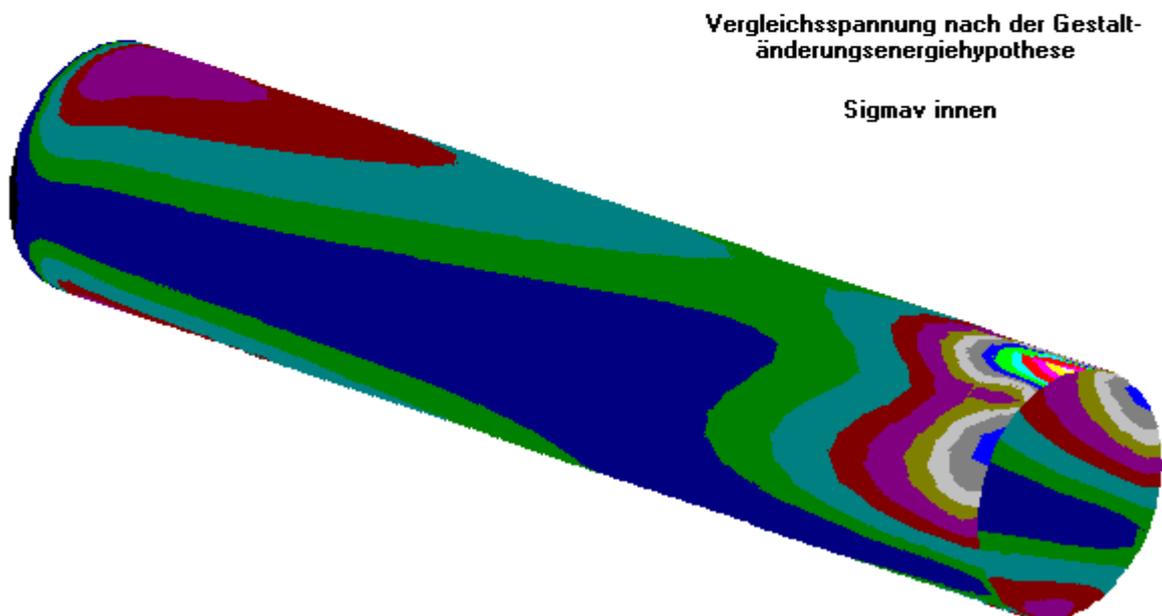
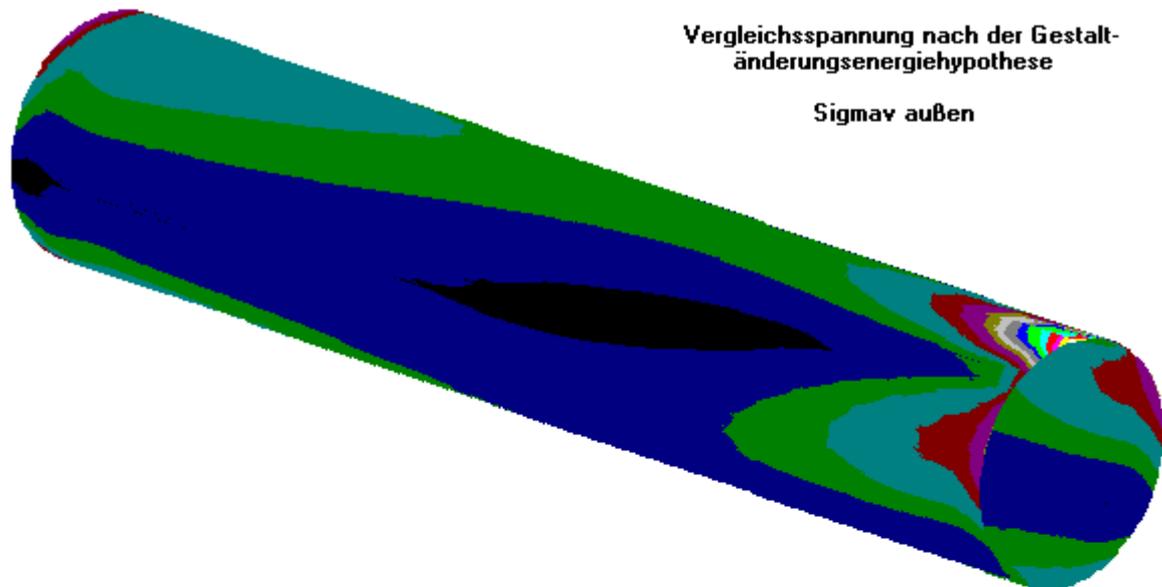
$$\sigma_{v_Au\beta en} = 161.2 \cdot \text{MPa} \quad \sigma_{v_Innen} = 13.22 \cdot \text{MPa}$$

6. Vergleich und Bewertung der beiden Lösungen

Die Verformungen stimmen nach beiden Theorien gut überein. Das Lasteinleitungsproblem und auch die Randstörungen an der Einspannstelle werden in der Balkentheorie nicht berücksichtigt. Deshalb liefern beide Theorien nur im mittleren, ungestörten Teil der Schale ausreichend übereinstimmende Lösungen.

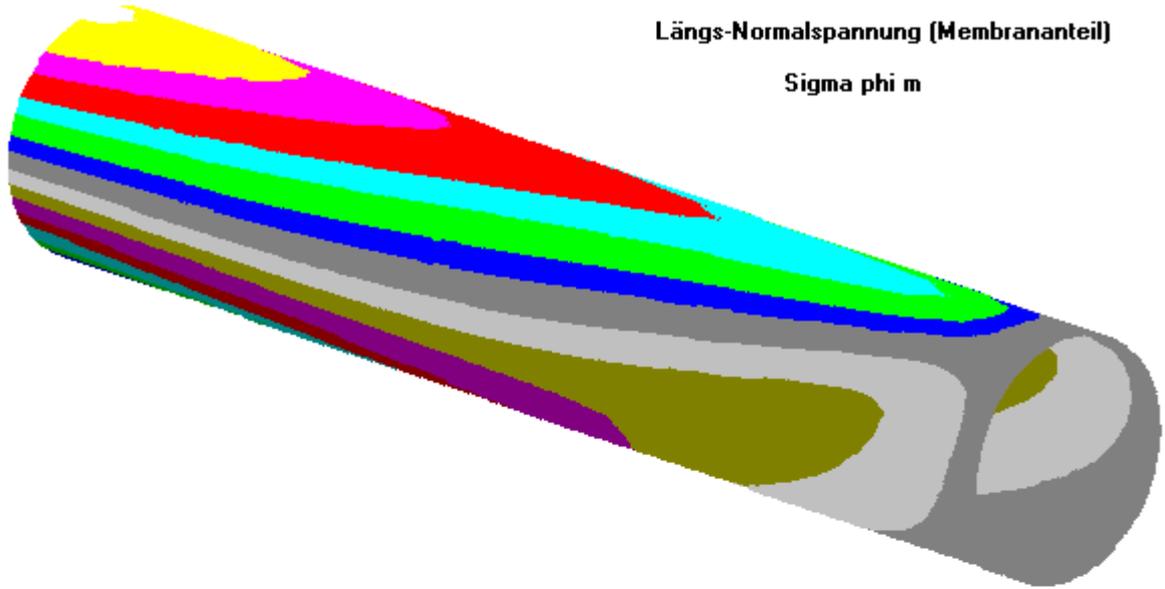
An der Lasteinleitungsstelle muß die Schale konstruktiv verändert werden, z.B. durch Vergrößerung der Wanddicke oder Versteifung durch den Einbau von Kreis(-Ring)-Scheiben.

Die folgenden Bilder zeigen die Vergleichsspannung und die Längs-Normalspannung nach der Schalen



Längs-Normalspannung (Membrananteil)

$\sigma_{\phi m}$



Längs-Normalspannung (Biegeanteil)

$\sigma_{\phi b}$

