

NUMERISCHE METHODEN (FEM, REM)

Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht

Dr.-Ing. habil. Volker Hellmann

27.03.12

Dieses Skript ist nicht identisch mit dem Inhalt der Vorlesung im Fach „FEM im Maschinenbau“. Der Inhalt in diesem Skript geht teilweise über den Stoff der Vorlesung hinaus. Hinweise zur Korrektur von Fehlern und zur Verbesserung der Verständlichkeit des Skriptes werden gern entgegengenommen.

Die Referenzen im Text (auf Formeln, Abbildungen, Tabellen, Kapitel, Endnoten) und das Inhaltsverzeichnis sind aktive Elemente. Durch Mausklick darauf gelangt man an die referenzierte Stelle. Mit dem Navigations-Menü von „Acrobat-Reader“ kann man die letzten Schritte „des Blätterns“ im Dokument (vor und zurück) wiederholen, also nach dem Nachsehen bei einer Referenz wieder zur vorigen Stelle im Skript zurückkehren.

Das Inhaltsverzeichnis ist als „Lesezeichen“ im PDF-Dokument gespeichert (Diese müssen im „Acrobat-Reader“ angezeigt werden). Damit ist eine schnelle Möglichkeit des „Blätterns“ im Dokument gegeben.

Dieses Skript ist urheberrechtlich geschützt. Jede (auch auszugsweise) Veröffentlichung bedarf der Zustimmung der Autoren.

Inhaltsverzeichnis

1	EINFÜHRUNG.....	4
2	METHODEN DER GEWICHTETEN RESIDUEN AM 1D-BEISPIEL.....	7
2.1	STARKE FORM	8
2.1.1	Kollokationsmethode.....	9
2.1.2	Methode der Momente	10
2.1.3	Verfahren von Galerkin	10
2.1.4	Verfahren vom Minimum des Fehlerquadratintegrals.....	11
2.1.5	Zusammenstellung der Ergebnisse.....	12
2.2	SCHWACHE FORM (VERFAHREN VON RITZ)	13
2.3	INVERSE FORM.....	16
3	METHODE DER FINITEN ELEMENTE (FEM)	19
3.1	FACHWERKE	20
3.1.1	2-Knoten-Stabelement.....	20
3.1.2	3-Knoten-Stabelement.....	22
3.1.3	Vergleichendes Beispiel.....	23
3.1.4	Zusammensetzen von Stabelementen im 1D-Raum	24
3.1.5	Transformation des Elementes in die Ebene (den 2D-Raum)	28
3.1.6	Zusammensetzen von Stabelementen in der Ebene	31
3.2	RANDBEDINGUNGEN (RB)	32
3.3	STABTRAGWERKE	35
3.3.1	Balkenelement, Querkraft-Biegung.....	35
3.3.2	Zusammensetzen von Balkenelementen im 1D-Raum	37
3.3.3	Balkenelement, Querkraft-Biegung mit Längskraft.....	39
3.3.4	Transformation des Elementes in die Ebene (den 2D-Raum)	40
3.3.5	Zusammensetzen von Balkenelementen in der Ebene	42
3.4	MEHRDIMENSIONALE KONTINUUMSELEMENTE	43
3.4.1	Elastisches Feldproblem.....	43
3.4.2	Näherungsweise Lösung	47
3.4.3	4-Knoten-Rechteck-Scheiben-FE.....	50
3.4.4	Beispiel: Rechteckscheibe mit Randlast.....	53
3.4.5	Schiefwinklige (krummlinige) FE.....	55
3.4.6	4-Knoten-Schiefwinkliges-Scheiben-FE.....	60
3.4.7	9-Knoten-Scheiben-FE.....	62
3.4.8	3-Knoten Dreieckelement.....	64
3.5	RANDPUNKTELEMENTE.....	67
3.5.1	Modifizierung der Formfunktionen	68
3.5.2	Statische Kondensation.....	70
3.6	NUMERISCHE INTEGRATION.....	72
4	ERGÄNZUNGEN, SPEZIELLE PROBLEME DER FEM.....	78
4.1	DYNAMISCHE PROBLEME.....	78
4.2	GROBE VERFORMUNGEN (1D: EBENER SCHUBWEICHER BALKEN)	80
4.2.1	Lösungsmethoden am Beispiel biegestarrer Druckstab.....	84
4.2.2	schubweicher, gekrümmter Balken	88
4.2.3	Beispiel: Nachbeulverhalten eines Druckstabes	88
5	METHODE DER RANDELEMENTE (REM)	90
5.1	ZUGSTAB	90
5.2	BIEGEBALKEN.....	93
5.2.1	mit elastischer Bettung.....	93
5.2.2	ohne elastische Bettung.....	97
5.3	RWA MIT POISSON-DGL $\Delta u + b = 0$ (2D)	97
5.3.1	2D-REM – Formulierung.....	101
5.3.2	Beispiel.....	103
5.4	PHYSIKALISCHE AUFGABENSTELLUNGEN MIT POISSON-DGL	106
5.4.1	Zugstab (1D)	106
5.4.2	Stationäre Wärmeleitung	107
5.4.3	Elektrostatistisches Potential.....	107
5.4.4	Vorgespannte Membran.....	108
5.4.5	Torsion.....	110

5.5	BEISPIELE MIT POISSON-DGL	113
5.5.1	Stationäre Wärmeleitung	113
5.5.2	Elektrostatistisches Potential.....	115
5.5.3	Vorgespannte Membran.....	119
5.6	RWA MIT HELMHOLTZ-DGL $\Delta(\cdot) + B^2(\cdot) = 0$	120
5.6.1	1D-REM - Formulierung	120
5.6.2	Beispiel.....	123
5.6.3	2D-REM – Formulierung.....	124
5.6.4	Beispiel 1.....	125
5.6.5	Beispiel 2.....	125
5.7	PHYSIKALISCHE AUFGABENSTELLUNGEN MIT HELMHOLTZ-DGL	126
5.7.1	Schwingende, vorgespannte Membran.....	126
5.7.2	Schallabstrahlung	127
5.8	BEISPIELE MIT HELMHOLTZ-DGL.....	129
5.8.1	Membran (2D-Innenraumproblem)	131
5.8.2	Ebene Schallabstrahlung (2D-Innenraumproblem).....	131
5.8.3	Ebene Schallabstrahlung (2D-Außenraumproblem).....	132
6	GRUNDLAGEN	133
6.1	EIGENSCHAFTEN EBENER SKALAR- UND VEKTORFELDER.....	133
6.2	SELBSTADJUNGIERTER DIFFERENTIALOPERATOR	136
6.3	DIRAC-IMPULS.....	138
6.4	SATZ VON MAXWELL-BETTI.....	138
6.5	PRINZIP DER VIRTUELLEN ARBEIT.....	141
6.6	PRINZIP VOM MINIMUM DES ELASTISCHEN GESAMTPOTENTIALS.....	142
6.7	VARIATIONSPRINZIP IN ZUWUCHSFORMULIERUNG	145
6.8	GROBE VERZERRUNGEN (1D: EBENER SCHUBWEICHER BALKEN)	147
6.9	UNEIGENTLICHE INTEGRALE.....	148
6.10	ZYLINDERFUNKTIONEN.....	151
6.11	FUNDAMENTALLÖSUNGEN FÜR DIE INVERSE FORM	153
6.11.1	$D(\cdot) = \Delta(\cdot)$, 1D	154
6.11.2	$D(\cdot) = \Delta(\cdot) - \beta^2(\cdot)$, 1D.....	156
6.11.3	$D(\cdot) = \Delta\Delta(\cdot)$, 1D.....	156
6.11.4	$D(\cdot) = \Delta\Delta(\cdot) + 4\alpha^4(\cdot)$, 1D	157
6.11.5	$D(\cdot) = \Delta(\cdot)$, 2D	159
6.11.6	$D(\cdot) = \Delta(\cdot) + \beta^2(\cdot)$, 1D.....	161
6.11.7	$D(\cdot) = \Delta(\cdot) + \beta^2(\cdot)$, 2D.....	162

1 Einführung

Viele Aufgabenstellungen in der Ingenieur Tätigkeit führen auf Randwertaufgaben (RWA). Das sind die allgemeinen Differentialgleichungen (Dgl), d.h. die Feldgleichungen des Problems im Gebiet G und die zur speziellen Aufgabenstellung gehörigen Randbedingungen (RB), d.h. die Feldgleichungen auf dem Rand R .

$$\text{Dgl: } \underline{D}(\underline{u}(\underline{x})) + \underline{p}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \text{im Gebiet } G \quad (1.1)$$

$$\text{RB: auf Rand } R = R_1 + R_2$$

$$\underline{D}_{R_1}(\underline{u}(\underline{x}_{R_1})) - \underline{r}_{R_1} = \underline{0} \quad \text{Rand } R_1 \text{ mit wesentlichen RB}$$

$$\underline{D}_{R_2}(\underline{u}(\underline{x}_{R_2})) - \underline{r}_{R_2} = \underline{0} \quad \text{Rand } R_2 \text{ mit natürlichen RB}$$

$$\begin{aligned} \underline{D}(\) & \quad - \text{Differentialoperator in } G \\ \underline{D}_{R_1}(\), \underline{D}_{R_2}(\) & - \text{Differentialoperatoren auf } R, \underline{x} = \begin{cases} (x) = (x_1) & \text{für 1D} \\ (x_1, x_2)^T & \text{für 2D} \\ (x_1, x_2, x_3)^T & \text{für 3D} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dimension des Randes R ist immer um eine Dimension niedriger als die des Gebietes G . Bei einem (3D-) Körper ist der Rand die (2D-) Oberfläche, bei einer (2D-) Fläche die (1D-) Randkontur dieser Fläche und bei einer (1D-) Linie die (0D-) Randpunkte der Linie.

Für RWA existieren nur für einfache Spezial- und Sonderfälle geschlossene, analytische Lösungen. Oft ist es notwendig, Methoden zur näherungsweisen Lösung dieser RWA anzuwenden.

Als einfaches Beispiel zur Demonstration der unterschiedlichen Verfahren zur näherungsweisen Lösung von RWA wird das 1D strukturelle Modell eines Zugstabes mit Streckenlast q und elastischer Stützung c verwendet. Dieses Beispiel wurde gewählt, weil der Zugstab das einfachste strukturelle Modell ist und die exak-

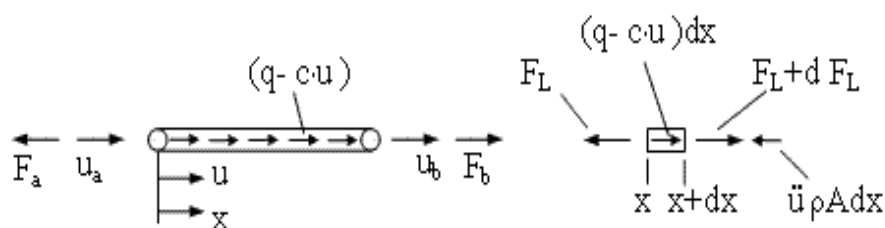


Abbildung 1.1: Zugstab mit Streckenlast q und elastischer Stützung c

te Lösung für die Längsverschiebung $u(x)$ bei elastischer Stützung kein Polynom ist und damit Näherungscharakter und Konvergenz von Näherungslösungen mit Polynomfunktionen gezeigt werden können. Im Bezug auf dieses Beispiel im weiteren Text wird der Name „Beispiel Zugstab“ verwendet.

Die allgemeinen Grundgleichungen (Dgl) des Problems sind:

- Gleichgewichtsbedingung (GGB, Bilanzgleichung): (1.2)

$$dF_L + (q - c \cdot u - \rho A \ddot{u}) dx = 0 \Rightarrow F_L' = \frac{dF_L}{dx} = -q + c \cdot u + \rho A \ddot{u}$$

- Verzerrungs-Verformungs-Beziehung (kinematische Gleichung):

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u'$$

- Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (konstitutive Gleichung, Stoffgesetz)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{F_L}{A} \Rightarrow u' = \frac{F_L}{EA}$$

L	-	Stablänge [m]
A	-	Querschnittsfläche [m ²]
E	-	Elastizitätsmodul [N/m ²]
q	-	Streckenlast [N/m]
c	-	Steifigkeit der elastischen Stützung [N/m ²]
F _L	-	Längskraft [N]
$\sigma = F_L/A$	-	Normalspannung [N/m ²]
x	-	Stabkoordinate [m] (0 < x < L)
$\rho A \ddot{u}$	-	bezogene Trägheitskraft [N/m]

Bei den Angaben in eckigen Klammern zu den physikalischen Einheiten steht N für eine beliebige Krafteinheit z.B. auch kN oder MN, analog m für eine beliebige Längeneinheit, z.B. auch mm oder cm u.s.w. Der Elastizitätsmodul wird z.B. im Maschinenbau üblicherweise in MPa = N/mm² angegeben. Für harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω ist

$$\ddot{u}(x, t) = -\omega^2 \cdot u(x, t) \quad (1.3)$$

Aus (1.2) kann die Dgl für die Längsverschiebung $u(x)$ abgeleitet werden:

$$(EAu')' - c \cdot u + q + \rho A \omega^2 u = 0 \quad (1.4)$$

$$u'' - \beta^2 u + p + \frac{\rho}{E} \omega^2 u = 0, \quad EA = \text{konst.}, \quad \beta^2 = \frac{c}{EA}, \quad p = \frac{q}{EA}$$

Als spezielle RB werden vorgegeben:

$$\text{wesentliche RB: } u(0) - u_a = 0 \quad \text{mit } u_a = 0.1\text{mm, unbekannt ist } F_L(0) \quad (1.5)$$

$$\text{natürliche RB: } F_L(L) - F_b = 0 \quad \text{mit } F_b = 10^4 \text{ N, unbekannt ist } u(L)$$

Dgl und RB in (1.1) sind für das Beispiel jeweils nur eine Gleichung. Die spezielle RWA ist damit:

$$\text{Dgl: } D(u) + p = 0, \quad D(\cdot) = (\cdot)'' - \left(\beta^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2\right)(\cdot) \quad (1.6)$$

$$\text{RB: } D_{R1}(u(0)) - r_{R1} = 0, \quad D_{R1}(\cdot) = (\cdot), \quad r_{R1} = u_a$$

$$D_{R2}(u(L)) - r_{R2} = 0, \quad D_{R2}(\cdot) = EA(\cdot)', \quad r_{R2} = F_b$$

Die allgemeine Lösung des statischen Problems ($\omega=0$) der Dgl für $\beta=\text{konst.}$ und $p=\text{konst.}$ ist

$$\text{Ansatz: } u = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp \beta \quad (1.7)$$

$$u(x) = C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{-\beta(L-x)} + \frac{p}{\beta^2}, \quad \frac{p}{\beta^2} = \frac{q}{c}$$

Die zugehörige Lösung dieser RWA mit der dimensionslosen Koordinate μ , $\mu=x/L$, $0 < \mu < 1$:

$$C_1 = \frac{c \cdot u_a - \beta \cdot Q \cdot F_b - q}{c(1 + Q^2)}, \quad C_2 = \frac{Q \cdot c \cdot u_a + \beta \cdot F_b - Q \cdot q}{c(1 + Q^2)}, \quad Q = e^{-\beta L} \quad (1.8)$$

$$u(\mu) = C_1 \cdot e^{-\beta L \mu} + C_2 \cdot e^{-\beta L(1-\mu)} + \frac{q}{c}, \quad \mu = \frac{x}{L}$$

Für die Zahlenwerte:

$E=10^5 \text{MPa}$, $c=100 \text{N/mm}^2$, $L=1 \text{m}$, $A=100 \text{mm}^2$, $q=100 \text{N/mm}$, $u_a=0.1 \text{mm}$, $F_b=10^4 \text{N}$ ist die numerische Auswertung von (1.8) in Abbildung 1.2. Alle physikalischen Größen wurden mit der Bezugsgröße $L_B=1 \text{mm}$ und der Bezugskraft $F_B=F_b$ dimensionslos gemacht.

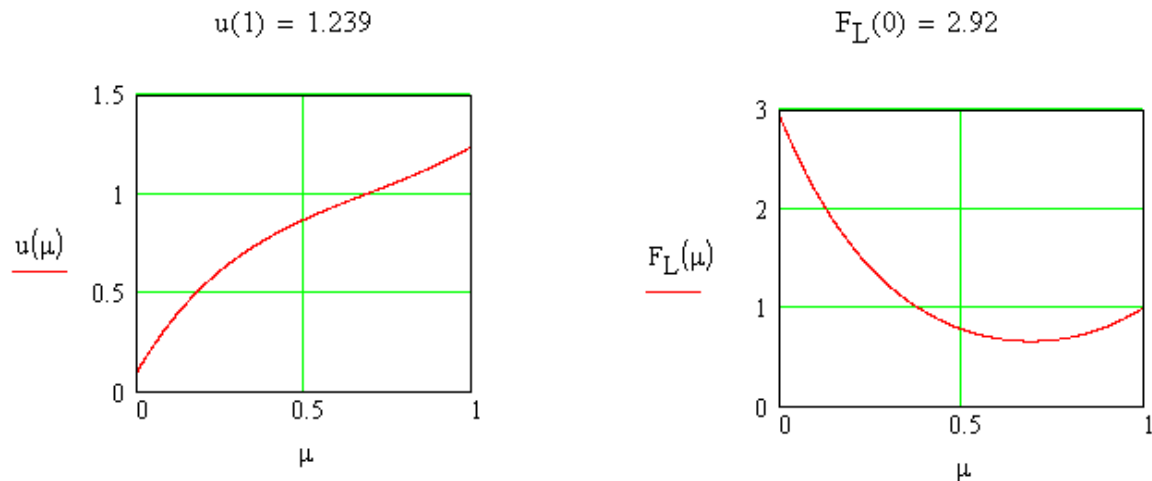


Abbildung 1.2: Zugstab, Längsverschiebung $u(\mu)$ und Längskraft $F_L(\mu)$

Ohne elastische Stützung, also für $\beta^2=0$ wird die statische Lösung ($\omega^2=0$) der RWA (1.6)

$$u(\mu) = u_a + \frac{q \cdot L + F_b}{EA} L\mu - \frac{q}{2EA} L^2 \mu^2, \quad \mu = \frac{x}{L} \quad (1.9)$$

2 Methoden der gewichteten Residuen am 1D-Beispiel

Gegeben ist die RWA mit der Dgl der Ordnung $2n$, hier speziell $n=1$, aus (1.4) und den $2n$ RB aus (1.5). Auf jedem Rand sind n RB vorgegeben, entweder wesentliche oder die zugeordneten natürlichen. Stattdessen können auch gemischte RB auftreten. Wesentliche RB enthalten die Ableitungen der Feldfunktionen von der Ordnung Null bis $n-1$, natürliche RB bis zur Ordnung $2n-1$, wobei dabei mindestens die Ordnung n auftreten muss. In gemischten RB sind wesentliche und natürliche RB gekoppelt. In der Festkörpermechanik sind wesentliche RB Bedingungen für Verformungen (Verschiebungen und Verdrehungen) und natürliche RB Bedingungen für die zugeordneten (arbeitskonjugierten) Kraftgrößen (Kräfte und Momente). Gemischte RB sind dann z.B. RB für elastische Randstützungen durch Translations- oder Drehfedern.

Gesucht sind Näherungslösungen dieser RWA nach den verschiedenen Methoden der gewichteten Residuen.

Bei den Methoden der gewichteten Residuen werden die Lösungen der Feldgleichungen nicht exakt (für jeden Feldpunkt) sondern nur im, mit einer Test- oder Wichtungsfunktion gewichteten, integralen Mittel über das gesamte Gebiet ermittelt.

$$\eta(\mu) = D(u(\mu)) + p(\mu) \quad - \text{Residuum der Dgl} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= u(\mu_{R1}) - u_{R1} \\ \eta_2 &= F_L(\mu_{R2}) - F_{R2} \end{aligned} \right\} \quad - \text{Residuen der RB}$$

Die Lösungen nach den Methoden der gewichteten Residuen enthalten alle als Spezialfall die exakte Lösung. Die Funktion $u(\mu)$ steht ab hier aber nicht mehr nur für die exakte Lösung, sondern auch für eine Näherungslösung. Für die Näherungslösungen wird ein Satz von linear unabhängigen Funktionen gewählt. Für alle in 2.1.1 bis 2.1.4 vorgestellten Methoden bzw. Verfahren werden identische Ansatz-Polynome $u(\mu)$ aus (2.1.4) verwendet. Diese erfüllen die Bedingung der linearen Unabhängigkeit. Wegen der Wahl identischer Ansatz-Polynome ist die direkte Vergleichbarkeit in 2.1.5 gegeben.

2.1 Starke Form

Die Ansatzfunktion $u(\mu)$ muss $2n$ mal (im Beispiel Zugstab ist $n=1$) nichttrivial, stetig differenzierbar sein (Forderung aus der Dgl) und alle RB exakt erfüllen. Die Bezeichnung „Starke Form“ resultiert aus diesen starken Forderungen an die Ansatzfunktion. Die Wichtungsfunktion $w(\mu)$ aus (2.1.2) muß keine speziellen Bedingungen erfüllen. Der gesamte Rand ist $R=R_1+R_2$. Auf dem Rand R_1 sind wesentliche RB und auf dem Rand R_2 natürliche RB vorgegeben. Die natürlichen RB sind selbst Dgl. Diese schon mit den Ansatzfunktionen zu erfüllen, ist i.a. schwierig und schränkt die Anwendbarkeit der Starken Form (für Probleme mit natürlichen RB) ein. Aus (1.4) wird mit (2.1):

$$\int_0^1 \eta(\mu) \cdot w(\mu) \cdot d\mu = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 0$$

Das Residuum η_1 ist eine algebraische Bedingung und kann schon mit der Wahl geeigneter Funktionen für die Näherungslösung erfüllt werden. Die Residuen η und η_2 sind Dgl und können i.a. nur als Bedingung der Näherungslösung vorgegeben werden.

Für eine 2D- oder 3D-RWA wird entsprechend:

$$\underline{\eta}(\underline{x}) = \underline{D}(\underline{u}(\underline{x})) + \underline{p}(\underline{x}) \quad (2.1.3)$$

$$\underline{\eta}_1(\underline{x}_{R1}) = \underline{D}_{R1}(\underline{u}(\underline{x}_{R1})) - \underline{r}_{R1} \quad , \quad \underline{\eta}_2(\underline{x}_{R2}) = \underline{D}_{R2}(\underline{u}(\underline{x}_{R2})) - \underline{r}_{R2}$$

$$\int_G \underline{\eta}(\underline{x}) \cdot \underline{w}(\underline{x}) \cdot dG = \underline{0}$$

$$\underline{\eta}_1(\underline{x}_{R1}) = \underline{0}$$

$$\underline{\eta}_2(\underline{x}_{R2}) = \underline{0}$$

Wir wählen als Ansatzfunktionen für die verschiedenen starken Formen der Methoden der gewichteten Residuen der speziellen 1D-RWA „Beispiel Zugstab“ die Polynome $u(x)$ aus (2.1.4). Mit diesen ergibt sich eine bessere Vergleichbarkeit mit den diskreten Methoden (FEM), bei denen in der Strukturmechanik i.a. Polynome als Ansatzfunktionen verwendet werden. Es sind auch andere Funktionen, z.B. trigonometrische Funktionen möglich. Entsprechend der o.a. (mindest) Forderung an die Differenzierbarkeit würde ein Polynom zweiten Grades ausreichen. Mit steigendem Grad des Ansatzpoly-

noms wird die Qualität der Näherungslösung verbessert. Wir verwenden ein Polynom dritten Grades mit den noch unbekannten Freiwerten u_i .

$$u(\mu) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} u_i \cdot \mu^i, \quad \mu = \frac{x}{L}, \quad u'(\mu) = \frac{du(\mu)}{dx} = \frac{1}{L} \frac{du(\mu)}{d\mu}, \quad i_{\max} = 3 \quad (2.1.4)$$

$$u(\mu) = u_0 + u_1\mu + u_2\mu^2 + u_3\mu^3$$

$$u'(\mu) = \frac{1}{L} (u_1 + 2u_2\mu + 3u_3\mu^2)$$

$$u''(\mu) = \frac{1}{L^2} (2u_2 + 6u_3\mu)$$

Die funktionelle Abhängigkeit von den Ansatzfreiwerten u_i wird zur Abkürzung der Schreibweise i.a. nicht angegeben. In den folgenden Abschnitten werden 4 Verfahren vorgestellt. Diese unterscheiden sich in der Vorschrift zur Wahl der Wichtungsfunktion $w(\mu)$. Die Ergebnisse dieser Verfahren für das „Beispiel Zugstab“ werden in 2.1.5 verglichen.

2.1.1 Kollokationsmethode

Die Residuen aus (2.1.2) werden an genau soviel diskreten Punkten Null gesetzt, wie der Ansatz Freiwerte besitzt. Im Falle des Beispiels mit vier Freiwerten u_i , $i=0,\dots,3$ zweimal für die Dgl. (im Gebiet) und einmal für jede der zwei RB (auf dem zugehörigen Rand). Die Wichtungsfunktion w ist der Dirac-Impuls δ (s.6.3):

$$\eta(\mu) = D(u(\mu)) + p(\mu), \quad \eta_1 = u(0) - u_a, \quad \eta_2 = F_L(1) - F_b, \quad F_L = EAu' \quad (2.1.5)$$

$$\int_0^1 \eta(\mu) \cdot \delta(\mu - \zeta_i) \cdot d\mu = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{mit z.B. } \zeta_1 = \frac{1}{4}, \quad \zeta_2 = \frac{3}{4}$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 0$$

Die Darstellung in (2.1.5) mit dem Dirac-Impuls als Wichtungsfunktion ist so gewählt, dass sie sich in (2.1.2) einordnen lässt. In der praktischen Durchführung sind die vier Bedingungen (ohne Dirac-Impuls) für die spezielle RWA besser so zu schreiben:

$$\eta(\mu) = u''(\mu) - \beta^2 u(\mu) + p, \quad \eta_1 = u(0) - u_a, \quad \eta_2 = F_L(1) - F_b \quad (2.1.6)$$

$$\eta\left(\mu = \frac{1}{4}\right) = 0, \quad \eta\left(\mu = \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 0$$

Aus diesen vier Bedingungen werden die vier Ansatzfreiwerte u_i bestimmt.

2.1.2 Methode der Momente

Die Ansatzfunktion $u(\mu)$ muss auch hier alle RB erfüllen. Deshalb bleiben für das gewichtete Gebietsintegral nur zwei Bedingungen übrig.

Bei der Methode der Momente wird im Gebiet mit einem Satz linear unabhängiger Funktionen gewichtet, hier z.B. mit $w_1=1$ und $w_2=\mu$.

$$\eta(\mu) = u''(\mu) - \beta^2 u(\mu) + p, \quad \eta_1 = u(0) - u_a, \quad \eta_2 = F_L(1) - F_b \quad (2.1.7)$$

$$\int_0^1 \eta(\mu) d\mu = 0, \quad \int_0^1 \eta(\mu) \cdot \mu \cdot d\mu = 0$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\eta_2 = 0$$

Es erscheint in (2.1.7) so, als ob durch die Wichtung mit $w_2=\mu$ das Gebietsintegral im Bereich der oberen Grenze 1 stärker gewichtet würde als im Bereich der unteren Grenze 0. Statt w_1 und w_2 sind aber beliebige Linearkombinationen, z.B. $w_1=1$ und $w_2=1-\mu$ identische Forderungen und demzufolge findet diese unterschiedliche Wichtung nicht statt.

2.1.3 Verfahren von Galerkin

Beim Verfahren von Galerkin gilt

$$u(\mu) = g_0(\mu) + \sum_{i=1}^N g_i(\mu) \cdot u_i \quad (2.1.8)$$

$$w(\mu) = \sum_{i=1}^N g_i(\mu) \cdot w_i$$

Hierbei erfüllt $g_0(\mu)$ alle inhomogenen RB (wesentliche und natürliche), entfällt also bei ausschließlich homogenen RB. Die linear unabhängigen Basisfunktionen $g_i(\mu)$, $i=1,2,\dots,N$ erfüllen alle RB homogen (also auch die inhomogenen RB).

Die Notwendigkeit, die natürlichen RB schon mit den Ansatzfunktionen zu erfüllen, schränkt die Anwendbarkeit dieses Verfahrens ein, da diese RB selbst schon Dgl sind. Für Probleme, bei denen ausschließlich wesentliche RB zu erfüllen sind, ist das Verfahren von Galerkin für diskrete Verfahren (FEM) ebenso geeignet, wie die in 2.2 vorgestellte Schwache Form.

Im „Beispiel Zugstab“ sind die RB:

$$u(0) - u_a = 0, \quad F_L(1) - F_b = 0 \Rightarrow u'(1) - \frac{F_b}{EA} = 0 \quad (2.1.9)$$

Die Ansatzfunktion $u(\mu)$ von (2.1.4) muss noch an diese RB angepasst werden:

$$\eta_1 = u(0) - u_a = 0 \Rightarrow u_0 = u_a \quad (2.1.10)$$

$$\eta_2 = F_L(1) - F_b = 0 \Rightarrow u_1 + 2u_2 + 3u_3 - \frac{F_b L}{EA} = 0$$

$$\text{umgestellt nach } u_3 \text{ ergibt } u_3 = \frac{1}{3} \left(-u_1 - 2u_2 + \frac{F_b L}{EA} \right)$$

u_0 und u_3 eingesetzt in (2.1.4) und geordnet nach den Freiwerten $u_1, u_2 \Rightarrow$

$$u(\mu) = g_0(\mu) + g_1(\mu) \cdot u_1 + g_2(\mu) \cdot u_2$$

$$w(\mu) = g_1(\mu) \cdot w_1 + g_2(\mu) \cdot w_2$$

$$g_0(\mu) = u_a + \frac{1}{3} \frac{F_b L}{EA} \mu^3, \quad g_1(\mu) = \left(1 - \frac{1}{3} \mu^2 \right) \cdot \mu, \quad g_2(\mu) = \left(1 - \frac{2}{3} \mu \right) \cdot \mu^2$$

Die Erfüllung der RB ist gegeben mit

$$g_0(0) - u_a = 0, \quad g'_0(1) - \frac{F_b}{EA} = 0 \quad (2.1.11)$$

$$g_1(0) = g_2(0) = 0, \quad g'_1(1) = g'_2(1) = 0$$

Aus der Nullbedingung des Gebietsintegrals von (2.1.3) wird entsprechend

$$\eta(\mu) = u''(\mu) - \beta^2 u(\mu) + p \quad (2.1.12)$$

$$\int_0^1 \eta(\mu) \cdot w(\mu) d\mu =$$

$$w_1 \int_0^1 \eta(\mu) \cdot g_1(\mu) d\mu + w_2 \int_0^1 \eta(\mu) \cdot g_2(\mu) d\mu = 0$$

Damit ergeben sich für beliebige w_1 und w_2 (ungleich Null) die 2 Bedingungen für die noch verbliebenen Freiwerte u_1 und u_2 :

$$\int_0^1 \eta(\mu) \cdot g_1(\mu) d\mu = 0 \quad (2.1.13)$$

$$\int_0^1 \eta(\mu) \cdot g_2(\mu) d\mu = 0$$

2.1.4 Verfahren vom Minimum des Fehlerquadratintegrals

Es wird der minimale Wert des Fehlerquadratintegrals gefordert. Aus den notwendigen Bedingungen für den minimalen Wert des Fehlerquadratintegrals ergeben sich nach (2.1.14) die Wichtungsfunktionem $w_i(\mu)$ als die partiellen Ableitungen des Residuums $\eta(\mu, u_i)$ nach den Freiwerten u_i der Ansatzfunktion $u(\mu)$. Auch hier müssen die RB schon durch die Ansatzfunktion $u(\mu)$ erfüllt werden. Für $u(\mu)$ gilt also (2.1.10). Damit ergeben sich die 2 Bedingungen für die Ansatzfreiwerte u_1 und u_2 :

$$\eta(\mu) = u''(\mu) - \beta^2 u(\mu) + p, \quad \int_0^1 \eta^2(\mu) \cdot d\mu = \text{Min.} \Rightarrow \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^1 \eta^2(\mu) \cdot d\mu = 2 \int_0^1 \eta(\mu) \cdot w_i(\mu) \cdot d\mu = 0, \quad i=1,2$$

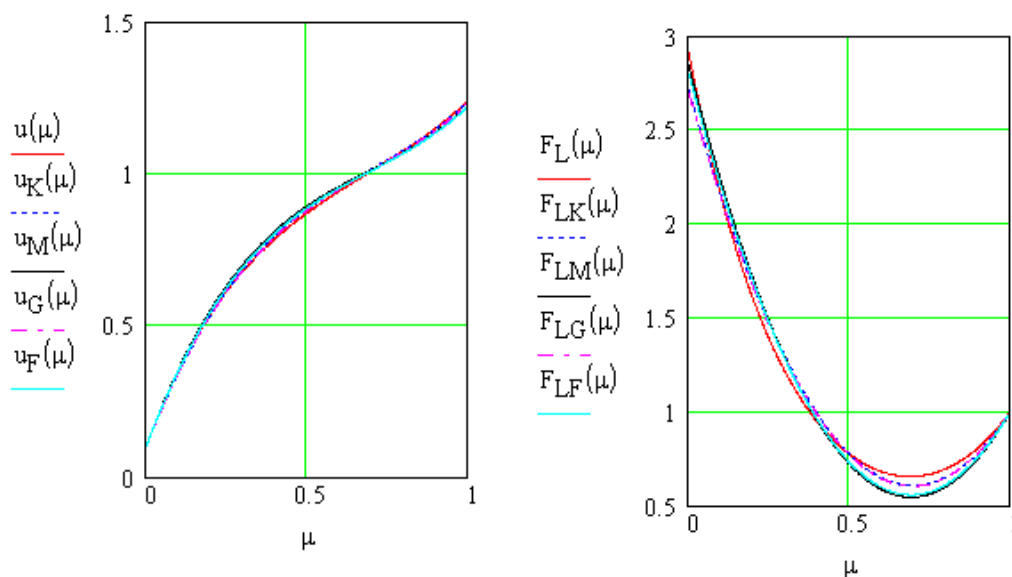
$$\text{mit } w_i(\mu) = \frac{\partial \eta(\mu, u_i)}{\partial u_i} \Rightarrow w_1(\mu) = -\left[\frac{2}{L^2} + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{3} \mu^2 \right) \right] \mu$$

$$w_2(\mu) = \frac{2}{L^2} (1 - 2\mu) - (\beta \mu)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \mu \right)$$

2.1.5 Zusammenstellung der Ergebnisse

In Abbildung 2.1 sind die Ergebnisse der 4 hier vorgestellten Näherungslösungen der exakten Lösung gegenübergestellt. In den Diagrammen für die Längsverschiebung u sind die 5 Kurven kaum zu unterscheiden. Größere Abweichungen treten erwartungsgemäß bei den Längskräften auf, da diese proportional dem Gradienten von u sind.

Die unten angegebenen Vektoren \mathbf{u}_i , $i=K,M,G,F$ enthalten die Koeffizienten (Freiwerter) der jeweiligen Ansatzfunktionen, die sich bei den 4 Näherungslösungen ergeben.



exakte Lösung	$u(1) = 1.239$	$F_L(0) = 2.92$	
Kollokation	$u_K(1) = 1.236$	$F_{LK}(0) = 2.714$	$\mathbf{u}_K^T = (0.1 \quad 2.714 \quad -3.02 \quad 1.442)$
Momente	$u_M(1) = 1.222$	$F_{LM}(0) = 2.848$	$\mathbf{u}_M^T = (0.1 \quad 2.848 \quad -3.329 \quad 1.603)$
Galerkin	$u_G(1) = 1.231$	$F_{LG}(0) = 2.703$	$\mathbf{u}_G^T = (0.1 \quad 2.703 \quad -3.013)$
Fehlerquadrat	$u_F(1) = 1.221$	$F_{LF}(0) = 2.806$	$\mathbf{u}_F^T = (0.1 \quad 2.806 \quad -3.249)$

Abbildung 2.1: Vergleich der exakten Lösung mit den Näherungslösungen der Starken Form

2.2 Schwache Form (Verfahren von Ritz)

Die Schwache Form ist Grundlage für viele Formulierungen der Methode der finiten Elemente (FEM). Bei der Schwachen Form wird durch n partielle Integrationen (im „Beispiel Zugstab“ ist $n=1$) der Differentialoperator teilweise auf die Testfunktion „geschoben“. Damit wird aus:

$$\int_0^1 [EAu''(\mu) - c \cdot u(\mu) + q(\mu)] \cdot w(\mu) \cdot L \cdot d\mu = 0 \quad (2.2.1)$$

$$= [EAu'(\mu_R) w(\mu_R)]_0^1 - \int_0^1 EAu' \cdot w' \cdot L \cdot d\mu + \int_0^1 [-c \cdot u + q] w \cdot L \cdot d\mu$$

Das ergibt die Schwache Form der Methode der gewichteten Residuen.

mit dem Operator $U(\) = EA \cdot (\)'$, $(\)' = \frac{d(\)}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d(\)}{d\mu}$ (2.2.2)

$$\int_0^1 \frac{L}{EA} U(u) \cdot U(w) \cdot d\mu + \int_0^1 (c \cdot u - q) w \cdot L \cdot d\mu +$$

$$- U(u(1)) w(1) + U(u(0)) w(0) = 0$$

und

$$U(u(1)) = F_b \quad \text{und} \quad U(u(0)) = F_a$$

Die zugehörigen zwei allgemeinen RB sind:

$$\begin{aligned} \text{RB: } U(u(0)) - F_a = 0 \quad \text{oder} \quad u(0) - u_a = 0 \\ U(u(1)) - F_b = 0 \quad \text{oder} \quad u(1) - u_b = 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

bekannt sind entweder $(F_a \text{ oder } u_a)$ und $(F_b \text{ oder } u_b)$

Für das „Beispiel Zugstab“ gelten die speziellen RB:

$$\begin{aligned} \text{RB: am Rand } \mu_a=0 : F_a \text{ ist unbekannt und } u(0) - u_a = 0 \\ \text{am Rand } \mu_b=1 : u_b \text{ ist unbekannt und } U(u(1)) - F_b = 0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Die Ansatzfunktion $u(\mu)$ und die Wichtungsfunktion $w(\mu)$ müssen n mal nichttrivial, stückweise stetig differenzierbar sein. Es wird gefordert, dass sie die wesentlichen RB exakt erfüllen. In (2.2.2) sind die natürlichen RB enthalten. Diese werden auf „natürlichem Wege“ im Mittel erfüllt, also i.a. nicht exakt.

Die Bezeichnung „Schwache Form“ resultiert aus diesen gegenüber der „Starken Form“ schwächeren Forderungen an die Ansatzfunktionen.

Für die spezielle RWA des „Beispiels Zugstab“ ist die Schwache Form der Methode der gewichteten Residuen

$$\int_0^1 \frac{L}{EA} U(u) \cdot U(w) \cdot d\mu + \int_0^1 (c \cdot u - q) w \cdot L \cdot d\mu - F_b w(1) + F_a w(0) = 0 \quad (2.2.5)$$

wesentliche RB: $u(0) - u_a = 0$, $w(0) - 1 = 0$

Zum Vergleich mit den Ergebnissen aus 2.1 wählen wir zur Algebraisierung der RWA dieselben Ansatzfunktionen wie in 2.1 für die Starken Formen.

$$u(\mu) = u_a + \sum_{i=1}^3 u_i \cdot g_i(\mu), \quad w(\mu) = 1 + \sum_{i=1}^3 g_i(\mu), \quad g_i(\mu) = \mu^i \quad (2.2.6)$$

$$\underline{u} = (u_j) = (u_a \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$$

$$\underline{g}_u = (g_{uj}) = (1 \quad \mu \quad \mu^2 \quad \mu^3)^T, \quad \underline{g}_w = (g_{wj}) = \underline{g}_u$$

$$u(\mu) = \sum_{j=0}^3 u_j \cdot g_{uj} = \underline{g}_u^T \cdot \underline{u}, \quad w = \underline{g}_w$$

$$u'(\mu) = \underline{g}_u'^T \cdot \underline{u}, \quad w' = \underline{g}_w', \quad \underline{g}_k' = \frac{d\underline{g}_k}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d\underline{g}_k}{d\mu}, \quad k = u, w$$

Diese erfüllen die wesentlichen RB aus (2.2.5).

Aus (2.2.5) ergibt sich mit diesen Ansatzfunktionen

$$\int_0^1 EAL \cdot \underline{g}_u'^T \cdot \underline{u} \cdot \underline{g}_w' d\mu + \int_0^1 (c \cdot \underline{g}_u^T \underline{g}_w - q \cdot \underline{g}_w) \cdot L \cdot d\mu + \quad (2.2.7)$$

$$- F_b \underline{g}_w(\mu=1) + F_a \underline{g}_w(\mu=0) = 0, \quad j = 0, \dots, 3$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der g_{wj} ergeben sich aus (2.2.5) die Nullbedingungen in (2.2.7) für jedes j . Das sind vier Gleichungen zur Berechnung der 4 Unbekannten u_1, u_2, u_3 und F_a . Diese Gleichungen sind für $\underline{g}_w = \underline{g}_u$ identisch mit den notwendigen Bedingungen (6.6.7) aus dem Minimum vom elastischen Gesamtpotential.

Das Gleichungssystem (2.2.7) kann mit Einführung von Matrizen verkürzt geschrieben werden

$$\underline{g} = \underline{g}_u = \underline{g}_w, \quad \underline{K} = \underline{N} + \beta^2 \underline{M} \quad (2.2.8)$$

$$N_{i,j} = L \cdot \int_0^1 g'_i \cdot g'_j d\mu, \quad M_{i,j} = L \cdot \int_0^1 g_i \cdot g_j d\mu, \quad i, j = 0, \dots, 3$$

$$b_j = L \cdot \int_0^1 g_j d\mu = \frac{L}{j+1}$$

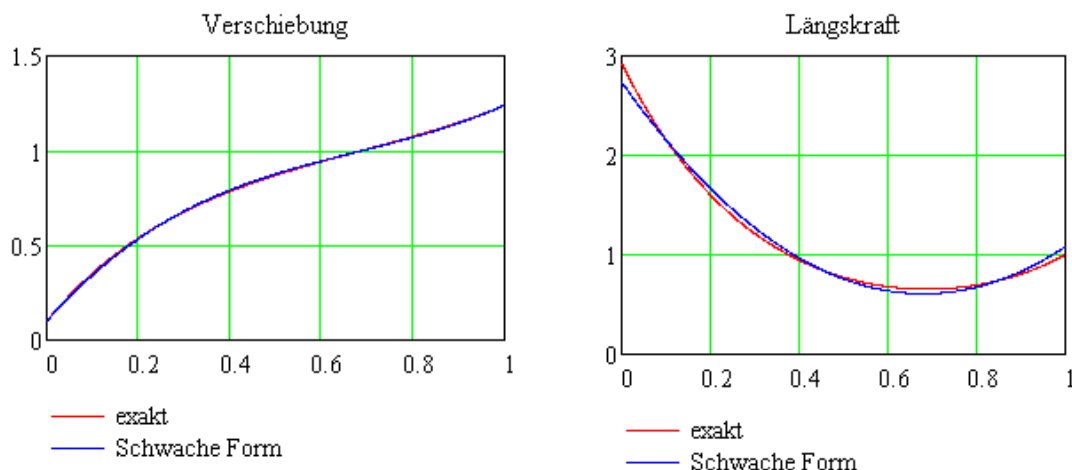
$$\underline{K} \cdot \underline{u} - \frac{q}{EA} \cdot \underline{b} - \frac{F_b}{EA} \underline{g}(\mu=1) + \frac{F_a}{EA} \underline{g}(\mu=0) =$$

$$\underline{K} \cdot \underline{u} - \frac{q \cdot L}{EA} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \frac{F_b}{EA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{F_a}{EA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Die Matrizen \underline{N} und \underline{M} aus (2.2.8) sind

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1.333 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1.8 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3.333 & 2.5 \\ 5 & 3.333 & 2.5 & 2 \\ 3.333 & 2.5 & 2 & 1.667 \\ 2.5 & 2 & 1.667 & 1.429 \end{pmatrix} 10^2 \quad (2.2.9)$$

Die Gleichungen (2.2.8) entkoppeln. Die Lagerkraft F_a kommt nur in der 1. Gleichung vor. Das ist die GGB des Stabes. Da F_a nach erfolgter Berechnung der Ansatzfreiwerte u_i auch aus $F_a = F_L(0) = EA u'(0)$ berechnet werden kann, lässt sich einschränkend zu (2.2.5) fordern, dass w die wesentlichen RB nur homogen zu erfüllen hat, $w(0)=0$. Damit wird die 1 Gleichung von (2.2.7) identisch Null. Es bleiben drei Gleichungen



exakte Lösung

$$u(1) = 1.239$$

$$F_L(0) = 2.920$$

Schwache Form

$$u_s(1) = 1.240$$

$$F_{Ls}(0) = 2.732$$

$$F_{Ls}(1) = 1.083$$

$$\underline{u}_s^T = (0.1 \quad 2.732 \quad -3.127 \quad 1.535)$$

natürl. RB nicht exakt erfüllt!!

Abbildung 2.2: exakte und Näherungslösung der Schwachen Form mit Polynom 3. Grades

zur Berechnung der Ansatzfreiwerte u_i .

Die numerische Lösung von (2.2.8), verglichen mit der exakten Lösung, ist in Abbildung 2.2 dargestellt

Die Näherungslösung der Schwachen Form ist im Gebiet genauer, als die der Starken Formen aus Abbildung 2.1. Es ist immer derselbe Polynomgrad für die Ansatzfunktionen gewählt worden. Bei den Starken Formen erfüllen die Ansatzfunktionen alle RB und bei der Schwachen Form nur die wesentlichen. Deshalb hat die Schwache Form mehr Freiheit um die exakte Lösung im Gebiet genauer anzunähern.

2.3 Inverse Form

Die Inverse Form ist Grundlage für die Methode der Rand-Elemente (REM). Sie ergibt sich aus der Schwachen Form durch weitere n partielle Integrationen (hier $n=1$).

Starke Form

(2.3.1)

$$\int_0^1 \{ [EAu''(\mu) - c \cdot u(\mu)] \cdot w(\mu) + q(\mu) \cdot w(\mu) \} \cdot L \cdot d\mu = 0$$

Schwache Form

$$[EAu'(\mu_R) w(\mu_R)]_0^1 - \int_0^1 EAu' \cdot w' \cdot L \cdot d\mu + \int_0^1 [-c \cdot u + q] w \cdot L \cdot d\mu = 0$$

Inverse Form

$$\int_0^1 \{ [EAw''(\mu) - c \cdot w(\mu)] \cdot u(\mu) + q(\mu) \cdot w(\mu) \} \cdot L \cdot d\mu + \\ - [EAw'(\mu_R) u(\mu_R)]_0^1 + [EAu'(\mu_R) w(\mu_R)]_0^1 = 0$$

Der Differentialoperator $D(\)$ aus (1.6) wird dadurch vollständig auf die Testfunktion „geschoben“. $D(u)w$ geht über in $D(w)u$. Aus (2.3.1) wird nach Division durch EA

$$\int_0^1 [w''(\mu) - \beta^2 \cdot w(\mu)] \cdot u(\mu) \cdot L \cdot d\mu = - \int_0^1 p(\mu) \cdot w(\mu) \cdot L \cdot d\mu \quad (2.3.2) \\ + [w'(\mu_R) u(\mu_R)]_0^1 - [u'(\mu_R) w(\mu_R)]_0^1, \quad p(\mu) = \frac{q(\mu)}{EA}$$

Wenn nur die aus (2.3.2) folgenden Minimalforderungen an u und w gestellt werden, ergeben sich keine brauchbaren Näherungslösungen für u . Deshalb wird gefordert, daß w die Dgl (1.1) in der Form $D(w(s)) = \delta(s)$ erfüllt, mit dem Dirac-Impuls $\delta(s)$ statt $-p$ als Störfunktion. Diese spezielle Lösung ist die Fundamentallösung $w(s)$

$$w(s) = \frac{\beta}{2c} e^{-\beta \cdot L \cdot |s|} \cdot 1N, \quad w'(s) = \frac{dw}{L \cdot d\mu} = -\frac{\beta^2}{2c} \text{sign}(s) e^{-\beta \cdot L \cdot |s|} \cdot 1N \quad (2.3.3)$$

$$s = \mu - \zeta, \quad [w] = m$$

entsprechend (6.11.2.1) mit Faktor $-N/(EA)$.

Für

$$w''(\mu, \zeta) - \beta^2 \cdot w(\mu, \zeta) = \delta(\mu - \zeta), \quad \delta(\mu - \zeta) - \text{Dirac-Impuls} \left[m^{-1} \right] \quad (2.3.4)$$

wird aus (2.3.2)

$$u(\zeta) = \int_0^1 \delta(\mu - \zeta) \cdot u(\mu) \cdot L \cdot d\mu = - \int_0^1 p(\mu) \cdot w(\mu, \zeta) \cdot L \cdot d\mu \quad (2.3.5)$$

$$+ \left[w'(\mu_R, \zeta) u(\mu_R) \right]_0^1 - \left[u'(\mu_R) w(\mu_R, \zeta) \right]_0^1$$

An die Näherungsfunktion u werden keine Forderungen bezüglich Differenzierbarkeit und Erfüllung der RB gestellt. Es wird für u im Gebiet keine Ansatzfunktion gewählt. Nach (2.3.5) ergibt sich $u(\zeta)$ an diskreten (willkürlich gewählten) Punkten ζ im Gebiet.

In (2.3.5) sind alle Größen auf der rechten Seite bis auf 2 noch zu bestimmende Randwerte

$$\text{entweder } u_a = u(0) \quad \text{oder} \quad u'_a = u'(0) \quad (2.3.6)$$

und

$$\text{entweder } u_b = u(1) \quad \text{oder} \quad u'_b = u'(1)$$

bekannt. Diese lassen sich mit den 2 Gleichungen aus (2.3.7) bestimmen. Die singulären Quellpunkte ζ_i , $i=a,b$ dürfen nicht genau auf dem Rand liegen und werden mit der kleinen Größe ε sehr randnah ins Gebiet geschoben. Natürlich kann man stattdessen auch die entsprechenden links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktionen (2.3.3) bilden.

$$\zeta_a = 0 + \varepsilon, \quad \zeta_b = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.3.7)$$

$$u(\zeta_i) = - \int_0^1 p(\mu) \cdot w(\mu, \zeta_i) \cdot L \cdot d\mu$$

$$+ \left[w'(1, \zeta_i) u_b - w'(0, \zeta_i) u_a \right] - \left[u'_b w(1, \zeta_i) - u'_a w(0, \zeta_i) \right], \quad i = a, b$$

Mit

$$u_a = u(0) \approx u(\zeta_a), \quad u_b = u(1) \approx u(\zeta_b) \quad (2.3.8)$$

wird aus (2.3.7) für $p=\text{konst.}$

$$\begin{bmatrix} -w'(0, \zeta_a) - 1 & w'(1, \zeta_a) \\ -w'(0, \zeta_b) & w'(1, \zeta_b) - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} w(0, \zeta_a) & -w(1, \zeta_a) \\ w(0, \zeta_b) & -w(1, \zeta_b) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_a \\ u'_b \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

$$= p \cdot L \cdot \begin{pmatrix} \int_0^1 w(\mu, \zeta_a) d\mu \\ \int_0^1 w(\mu, \zeta_b) d\mu \end{pmatrix}$$

Beim „Beispiel Zugstab“ sind bekannt u_a, u'_b und unbekannt u'_a, u_b . Die Unbekannten lassen sich aus (2.3.9) zu

$$u_b = 1.239\text{mm} \quad , \quad u'_a = 2.922 \cdot 10^{-3} \Rightarrow F_a = EAu'_a = 2.922F_b \quad (2.3.10)$$

berechnen. Die gefundene Lösung ist bis auf die Näherung (2.3.8) exakt.

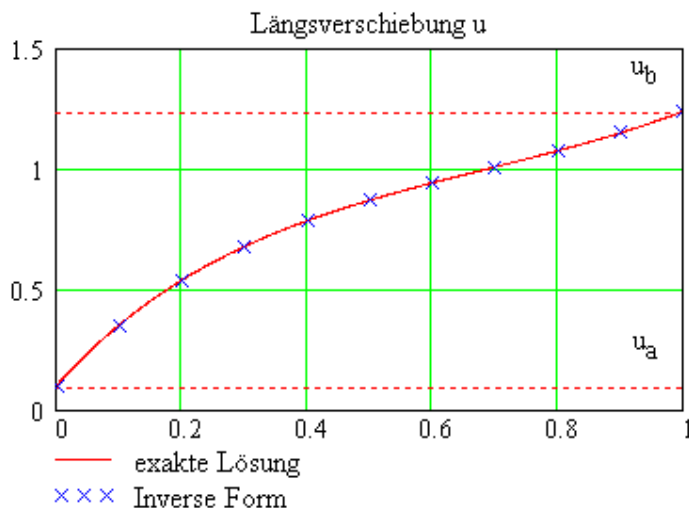
$$u_{\text{exakt}}(\mu) = C_1 e^{-\alpha\mu} + C_2 e^{-\alpha(1-\mu)} + \frac{q}{c}, \quad \mu \in [0,1] \quad (2.3.11)$$

$$C_1 = -0.912\text{mm}, \quad C_2 = 0.278\text{mm}$$

Die exakte Lösung (2.3.11) ist aus (1.8).

Beim 1D-Modell ist der Rand 0D (die 2 Randpunkte). Es ist keine Diskretisierung erforderlich. Deshalb ist die Lösung exakt.

Nur bei 2D und 3D Problemen müssen die Ränder diskretisiert werden. Mit einem Gleichungssystem entsprechend (2.3.9) werden dann die Freiwerte der diskreten Näherungsfunktionen auf dem Rand berechnet.



Über (2.3.7) können entsprechend Abbildung 2.3 für diskrete Quellpunkte ζ_i Funktionswerte im Inneren des Gebietes berechnet werden.

Abbildung 2.3: Beispiel Zugstab, Lösung der Inversen Form

3 Methode der finiten Elemente (FEM)

Die Theorie der FEM ist sehr umfassend. In diesem Skript wird versucht, die grundlegenden Zusammenhänge darzustellen. Als weiterführende Literatur wird z.B. ¹ empfohlen.

Für beliebige Geometrie des Gebietes G und beliebige Belastungen ist es i.a. nicht möglich, mit Näherungsfunktionen, deren Wertigkeitsbereich sich über das gesamte Gebiet erstreckt, zu brauchbaren Lösungen der RWA zu kommen. Deshalb wird das Gesamtgebiet in endliche Teilgebiete (finite Elemente, FE) eingeteilt. Für jedes Element werden Ansatzfunktionen gewählt. Man kann so mit einfachen Ansatzfunktionen, z.B. Polynomen geringer Ordnung, brauchbare Näherungslösungen berechnen.

Diese Ansatzfunktionen müssen auf den Elementgrenzen bestimmte Stetigkeitsforderungen erfüllen. Die FEM beruht oft auf der Schwachen Form der Methode der gewichteten Residuen. Wie in 6.6 gezeigt, ist dabei der Zugang auch über das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials möglich.

Ziel ist es, die gewichteten Gebietsintegrale der Dgl für G in ein algebraisches Gleichungssystem zu überführen. Zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungssysteme stehen leistungsfähige Algorithmen zur Verfügung.

Es werden Ansatzfunktionen eingeführt. Diese gelten nicht für das gesamte Gebiet G , sondern nur für Teilgebiete (FE). Das Gebiet G wird in eine endliche Zahl FE diskretisiert, mit einem FE-Netz überzogen. Die Netzknoten sind die Knoten des FE-Modells. An diesen Knoten sind die FE gekoppelt. Damit wird es möglich, auch für komplexe Feldprobleme, mit einfachen, nur für jeweils ein FE gültigen Ansatzfunktionen, brauchbare Näherungslösungen zu erhalten.

Die Ansatzfunktionen sind Produktsummen aus vorgegeben Formfunktionen $g_j(\underline{x})$ und noch unbekannten Freiwerten u_j .

$$u = \sum_j g_j(\underline{x}) \cdot u_j \quad (3.1)$$

Als Formfunktionen werden oft Lagrangesche Polynome gewählt. Diese haben an jeweils einem Knoten des FE den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert 0. Die Freiwerte u_j sind damit die physikalischen, wesentlichen Variablen des Problems, bei Feldproblemen der (3D-)Kontinuumsmechanik i.a. die Knotenverschiebungen, bei Problemen der (2D oder 1D) Strukturmechanik (Balken, Platten, Schalen) auch die Verdrehungen an den Knoten. Durch Gleichsetzen der entsprechenden Freiwerte aller an einem Knoten verbundenen FE lassen sich, wegen deren physikalischen Bedeutung, die notwendigen Stetigkeitsforderungen (in der Festkörpermechanik die C^0 -Stetigkeit für Verschiebungen und die C^1 -Stetigkeit für Verdrehungen) auf sehr einfache Weise erfüllen.

3.1 Fachwerke

Fachwerke sind Tragwerke, deren Elemente ausschließlich aus 1D-Zug/Druckstäben bestehen. Diese Stäbe sind an ihren Verbindungen, den Knoten, gelenkig miteinander verbunden oder/und gelenkig gelagert. Es werden also an den Knoten keine Biegemomente übertragen. Kräfte werden ausschließlich in den Knoten eingeleitet. Momente sind nicht zugelassen.

3.1.1 2-Knoten-Stabelement

Das Stabelement (2K-FE) ist identisch mit dem Stab aus Abbildung 1.1. Für die Ansatzfunktion $u(\mu)$ werden lineare Polynomansätze (lineare Lagrangesche Polynome) gewählt.

$$u(\mu) = \sum_{j=0}^1 g_j(\mu) \cdot u_j = (1-\mu)u_0 + \mu \cdot u_1 \quad (3.1.1)$$

$$u'(\mu) = \sum_{j=0}^1 g'_j(\mu) \cdot u_j = \frac{1}{L}(-u_0 + u_1)$$

Die $g_j(\mu)$ sind die (linearen) Formfunktionen und die u_j die noch unbekannten Ansatzfreiwerte (die Knotenverschiebungen). In Vektorschreibweise wird aus (3.1.1)

$$u(\mu) = \underline{g}^T(\mu) \cdot \underline{u}, \quad u'(\mu) = \underline{g}'^T(\mu) \cdot \underline{u} \quad (3.1.2)$$

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \underline{g}' = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Völlig analog zu (2.2.8) (dort mit Polynomen 3.Ordnung) ergibt sich die FE-Formulierung für das Stabelement mit $F_0=F_a$ und $F_1=F_b$

$$(\underline{N} + \beta^2 \underline{M}) \cdot \underline{u} - \frac{q}{EA} \cdot \underline{b} - \frac{F_1}{EA} \underline{g}(\mu=1) + \frac{F_0}{EA} \underline{g}(\mu=0) = \underline{0} \quad (3.1.3)$$

$$N_{i,j} = L \cdot \int_0^1 g'_i \cdot g'_j d\mu, \quad M_{i,j} = L \cdot \int_0^1 g_i \cdot g_j d\mu, \quad b_j = L \cdot \int_0^1 g_j d\mu, \quad i, j = 0, 1$$

$$\underline{N} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{M} = \frac{L}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das sind zwei Gleichungen. Diese nach $-F_0$ und F_1 umgestellt ergibt mit

$$\begin{pmatrix} -F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{L}{3}c & -\frac{EA}{L} + \frac{L}{6}c \\ -\frac{EA}{L} + \frac{L}{6}c & \frac{EA}{L} + \frac{L}{3}c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} Lq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

die FE-Formulierung für das Stabelement e. Dabei sind die für das Element gültigen Kennwerte: Elementdehnsteifigkeit EA, Elementlänge L, Steifigkeit der elastischen Stützung des Elementes c und die über L konstante Streckenlast q.

$$\underline{\underline{f}}^e = \left(\underline{\underline{K}}^e + \beta^2 \underline{\underline{M}}^e \right) \cdot \underline{\underline{u}}^e - \underline{\underline{p}}^e \quad (3.1.5)$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \begin{pmatrix} f_0^e \\ f_1^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_0^e \\ F_1^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}}^e = \begin{pmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}}^e = \frac{1}{2} L q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \frac{c}{EA}$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}^e = \frac{EAL}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In (3.1.5) ist die FE Gleichung für das Stabelement e, mit dem Knotenkraftvektor $\underline{\underline{f}}^e$, der (symmetrischen) Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^e$, dem Knotenverschiebungsvektor $\underline{\underline{u}}^e$ und dem Vektor der äquivalenten Knotenlasten $\underline{\underline{p}}^e$.

Die (kontinuierliche, hier konstante) Gebietslast q (für $q \neq 0$) wird entsprechend (3.1.3) durch äquivalente (diskrete) Lasten $\underline{\underline{p}}^e$ an den Knoten des FE ersetzt. Äquivalent bedeutet statisch äquivalent, d.h. die GGB am FE ist global (am gesamten FE) mit $\underline{\underline{p}}^e$ statt q identisch. Lokal (an Teilen des FE) ist diese aber unterschiedlich. Demzufolge ist die exakte Lösung mit $\underline{\underline{p}}^e$ statt q auch unterschiedlich. Diese Aussagen gelten allgemein für alle FE-Formulierungen.

Für $c=0$ ist die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^e$ singulär, d.h. es muss mindestens eine der Knotenverschiebungen vorgegeben werden, um die Starrkörperbewegung des Elementes zu begrenzen.

Hervorzuheben ist, dass bei der FE-Formulierung, im Unterschied zu den Schnittgrößendefinitionen, alle Komponenten des Knotenkraftvektors die gleiche Richtungsdefinition haben, wie die des Knotenverschiebungsvektors.

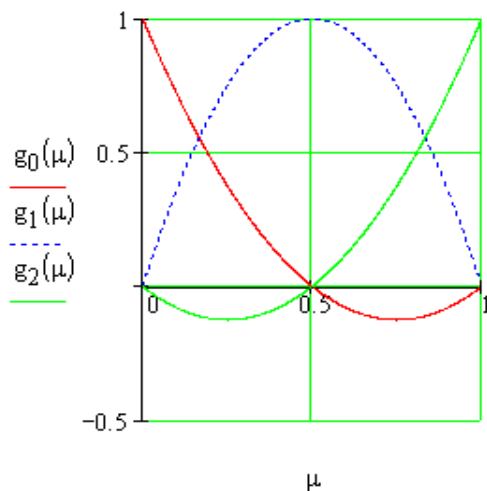
Damit kann man bei Bildung der resultierenden Knotenkraft eines Knotens die Koordinaten der Knotenkräfte mehrerer an diesem Knoten gekoppelter Elemente addieren, da die Komponenten immer die gleiche Richtungsdefinition haben.

3.1.2 3-Knoten-Stabelement

Für das 3-Knoten-Stabelement (3K-FE) werden quadratische Formfunktionen (3.1.6) (Lagrangesche Polynome 2.Grades) verwendet.

$$u(\mu) = \sum_{j=0}^2 g_j(\mu) \cdot u_j = 2(1-\mu) \left(\frac{1}{2} - \mu \right) u_0 + 4\mu(1-\mu) u_1 - 2\mu \left(\frac{1}{2} - \mu \right) u_2 \quad (3.1.6)$$

$$u'(\mu) = \sum_{j=0}^2 g'_j(\mu) \cdot u_j = \frac{1}{L} [(-3 + 4\mu) u_0 + (4 - 8\mu) u_1 + (-1 + 4\mu) u_2]$$



Diese Formfunktionen sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Damit wird wie in 3.1.1 die zu (3.1.5) analoge FE-Formulierung (3.1.7) hergeleitet.

Abbildung 3.1: quadratische Formfunktionen

$$\underline{\underline{f}}^e = \left(\underline{\underline{K}} + \beta^2 \underline{\underline{M}} \right) \cdot \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{p}} \quad (3.1.7)$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \begin{pmatrix} f_0^e \\ f_1^e \\ f_2^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} u_0^e \\ u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}} = \frac{1}{6} L q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \frac{c}{EA}$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}} = \frac{EAL}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Vergleichendes Beispiel

Die Näherungslösungen „Beispiel Zugstab“ von 3.1.1 (\mathbf{u}_2 , 4 2K-FE der Länge $L/4$) und 3.1.2 (\mathbf{u}_3 , 2 3K-FE der Länge $L/2$) werden mit der exakten Lösung \mathbf{u}_{ex} verglichen. Beide FE-Modelle haben 5 Knoten. Um die Abweichungen zur exakten Lösung im Diagramm sichtbar machen zu können, wurde mit $c=800\text{N/mm}$ (statt $c=100\text{N/mm}$) gerechnet. Die Lösung mit den 2 3K-FE ist genauer als die Lösung mit den 4 2K-FE. Diese Aussage trifft allgemein zu. Bei Konvergenzuntersuchungen ist, bei gleicher Anzahl Freiwerte und damit ungefähr gleichem numerischen Aufwand, die p-Konvergenz (gleiches Netz, aber FE mit höherem Polynomgrad der Ansatzfunktionen) der h-Konvergenz (feineres FE-Netz, aber FE mit gleichem Polynomgrad), vorzuziehen.

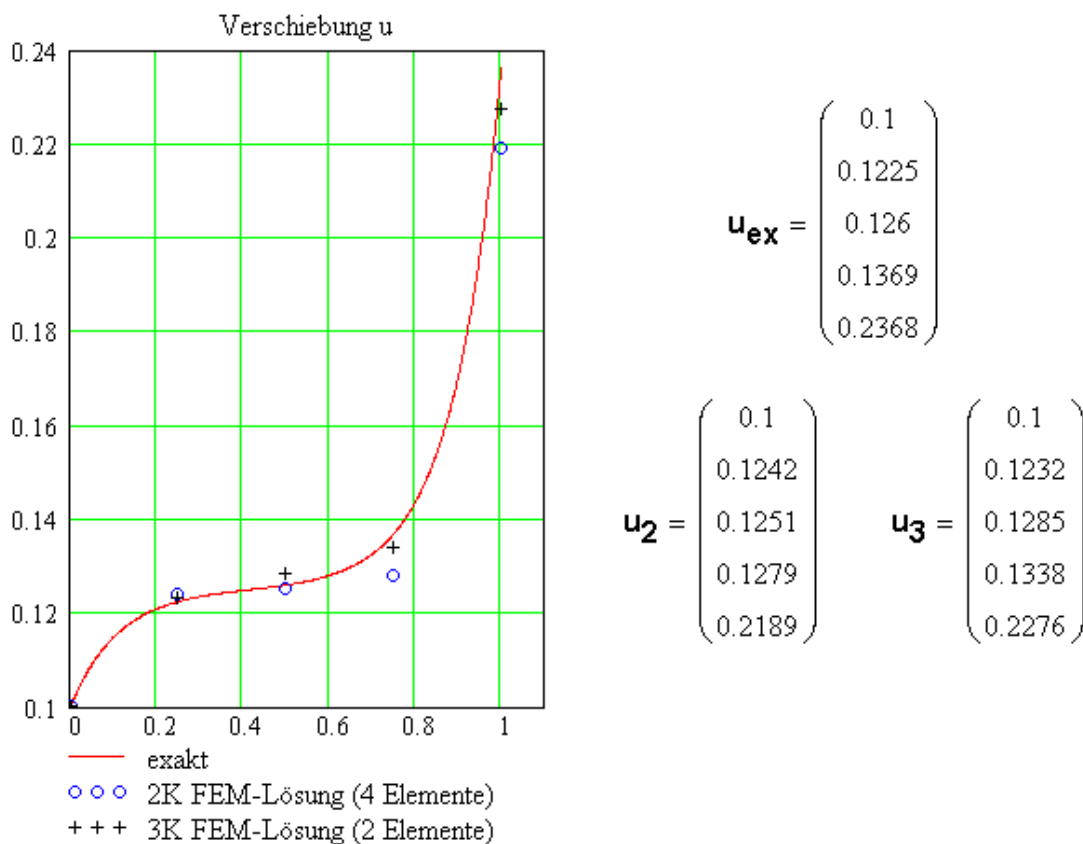


Abbildung 3.2: Vergleich 2K- und 3K-Stub-FE

Die elastischen Gesamtpotentiale für die 3 Lösungen sind

$$\pi = \pi_f - \pi_a, \quad 2\pi_f - \pi_a = 0 \Rightarrow \pi = -\pi_f \quad (3.1.8)$$

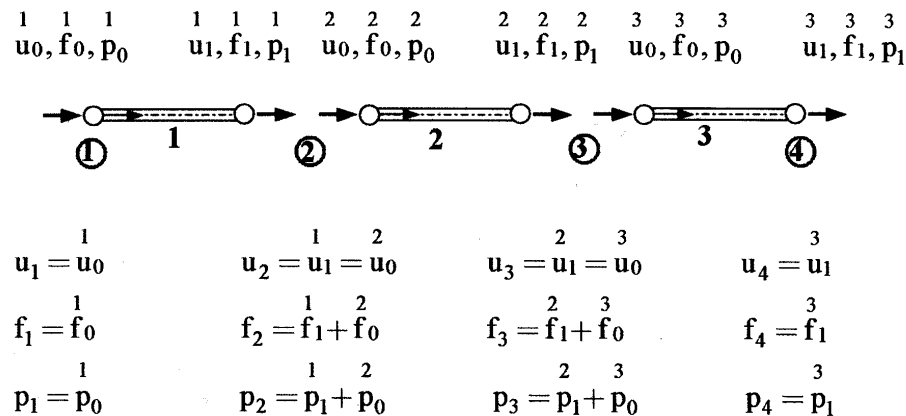
$$\pi_{\text{ex}} = -\pi_{f \text{ ex}} = \text{Min.} \Rightarrow \pi_{f \text{ ex}} = \text{Max.}$$

$$\pi_{\text{ex}} < \pi_3 < \pi_2$$

$$\pi_{\text{ex}} = -0.7807 = \text{Min.}, \quad \pi_3 = -0.7734, \quad \pi_2 = -0.7670$$

3.1.4 Zusammensetzen von Stabelementen im 1D-Raum

In Abbildung 3.3 ist symbolisch ein Modell dargestellt, dass aus den 3 Stabelementen 1,2 und 3 besteht (Kopindex bei den Verschiebungen u , Knotenkräften f , äquivalenten Knotenlasten p). Jedes Element des Modells hat 2 lokale Knoten (0 und 1). Das Modell hat insgesamt 4 globale Knoten (GK) mit den Nummern 1,2,3,4. Die Knoten 2 und 3 sind jeweils Anfangs- und Endknoten zweier aufeinanderfolgender Elemente. An diesen Knoten gelten die Kontinuitätsbedingung für die Verschiebung (C^0 -Stetigkeit) und die Äquivalenzbedingung für die Kräfte und die äquivalenten Knotenlasten aus Abbildung 3.3.



Die Koinzidenzmatrix aus Abbildung 3.4 gibt Auskunft über die Struktur des Modells und die Bedingungen zur Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{K} aus den drei Elementsteifigkeitsmatrizen.

Abbildung 3.3: FE-Modell aus 3 Stabelementen

Die Spalten sind mit den lokalen Knoten-Nummern der Elemente (0 am Elementanfang und 1 am Elementende) und die Zeilen mit den Nummern der Elemente (hier 1,2,3) nummeriert. In den Feldern stehen für jedes Element die Nummern der GK des Modells. Element 1 ist mit seinem Anfangsknoten 0 am GK 1 und mit seinem Endknoten 1 mit GK 2 verbunden. Analoges gilt für die Elemente 2 und 3.

	0	1
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Abbildung 3.4: Koinzidenzmatrix des Modells

Aus der FE-Formulierung (3.1.5) bzw. (3.1.9) für die Einzelemente e

$$\underline{f}^e = \underline{K}^e \cdot \underline{u}^e - \underline{p}^e, \quad \underline{K}^e = \begin{pmatrix} K_{0,0}^e & K_{0,1}^e \\ K_{1,0}^e & K_{1,1}^e \end{pmatrix}, \quad \underline{p}^e = \begin{pmatrix} p_0^e \\ p_1^e \end{pmatrix}, \quad e = 1, 2, 3 \quad (3.1.9)$$

wird mit Hilfe der Koinzidenzmatrix die FE-Formulierung für das Gesamtmodell.

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{p}} \quad (3.1.10)$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ 1 & 2 \\ p_1 + p_0 \\ 2 & 3 \\ p_1 + p_0 \\ 3 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}_{j,k}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ \mathbf{K}_{0,0} & \mathbf{K}_{0,1} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \\ \mathbf{K}_{1,0} & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{0,0} \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ \mathbf{K}_{0,1} & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{0,0} \end{matrix} \\ 0 & \mathbf{K}_{1,0} & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{0,0} & \mathbf{K}_{0,1} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{1,0} & \mathbf{K}_{1,1} \end{pmatrix}, \quad j, k = 0, 1, 2, 3$$

Die Formfunktionen des Gesamtmodells sind in Abbildung 3.5 über der dimensionslosen Längenkoordinate $0 \leq \mu < 1$ des Gesamtmodells dargestellt.

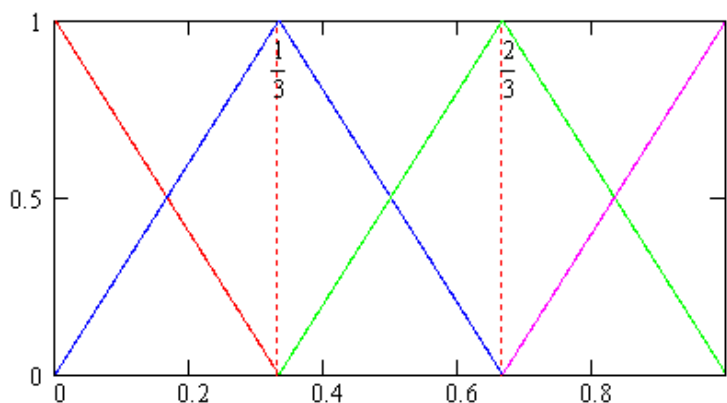


Abbildung 3.5: Formfunktionen für 3 Elemente

$\underline{\mathbf{f}}$ und $\underline{\mathbf{u}}$.

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_b \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_a \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

Bekannt sind $u_1 = u_a$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = F_b$ und unbekannt f_1 , u_2 , u_3 , u_4 . Die Auflösung von (3.1.10) nach diesen vier Unbekannten lässt sich noch ohne großen Aufwand durchführen. Für große Gleichungssysteme ist das nicht mehr praktikabel.

Es sollen durch Modifikationen der Matrix \underline{K} die wesentlichen RB erfüllt werden ohne die Symmetrie und die Bandstruktur der Matrix \underline{K} zu stören, damit man diese Vorteile bei der Auflösung ausnutzen kann.

Im Beispiel gelingt das, indem die 1.Gleichung mit einer Gleichung $C_\infty u_a = C_\infty u_1$ überlagert wird. Diese Gleichung steht damit nicht mehr zur Berechnung der Knotenkraft f_1 zur Verfügung. C_∞ ist dabei eine große Steifigkeit, z.B. $C_\infty = 10^{10} \overset{1}{K}_{0,0}$.

Bei der Pivottisierung der 1.Gleichung von (3.1.12) (Division durch $(\overset{1}{K}_{0,0} + C_\infty)$) ergibt sich $\frac{C_\infty}{\overset{1}{K}_{0,0} + C_\infty} u_a = u_{1\text{mod}} + \frac{1}{\overset{1}{K}_{0,0} + C_\infty} \left(u_{2\text{mod}} - \overset{1}{p}_0 \right)$. Das ist mit sehr guter Näherung die wesentliche RB $u_1 = u_a$ (mit $u_{1\text{mod}} \approx u_1$).

$$\underline{f}_{\text{mod}} = \underline{K}_{\text{mod}} \cdot \underline{u}_{\text{mod}} - \underline{p} \quad (3.1.12)$$

$$\underline{f}_{\text{mod}} = \begin{pmatrix} C_\infty \cdot u_a \\ 0 \\ 0 \\ F_b \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_{\text{mod}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_{\text{mod}}, \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \overset{1}{p}_0 \\ \overset{1}{p}_2 \\ \overset{2}{p}_1 + \overset{1}{p}_0 \\ \overset{2}{p}_3 \\ \overset{3}{p}_1 + \overset{2}{p}_0 \\ \overset{3}{p}_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{K}_{\text{mod}} = \begin{pmatrix} \overset{1}{K}_{0,0} + C_\infty & \overset{1}{K}_{0,1} & 0 & 0 \\ \overset{1}{K}_{1,0} & \overset{1}{K}_{1,1} + \overset{2}{K}_{0,0} & \overset{2}{K}_{0,1} & 0 \\ 0 & \overset{2}{K}_{1,0} & \overset{2}{K}_{1,1} + \overset{3}{K}_{0,0} & \overset{3}{K}_{0,1} \\ 0 & 0 & \overset{3}{K}_{1,0} & \overset{3}{K}_{1,1} \end{pmatrix}$$

Die nun noch unbekannte Knotenkraft f_1 wird nach der Berechnung des (vollständigen) Knotenverschiebungsvektor $\underline{u}_{\text{mod}}$ aus der ursprünglichen FE-Formulierung ausgerechnet. Mit sehr guter Näherung gilt $\underline{u} \approx \underline{u}_{\text{mod}}$.

$$\underline{u}_{\text{mod}} = \underline{K}_{\text{mod}}^{-1} \cdot (\underline{f}_{\text{mod}} + \underline{p}) \Rightarrow \underline{u}_{\text{mod}} \quad (3.1.13)$$

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{u}_{\text{mod}} - \underline{p}, \quad \underline{u} \approx \underline{u}_{\text{mod}}$$

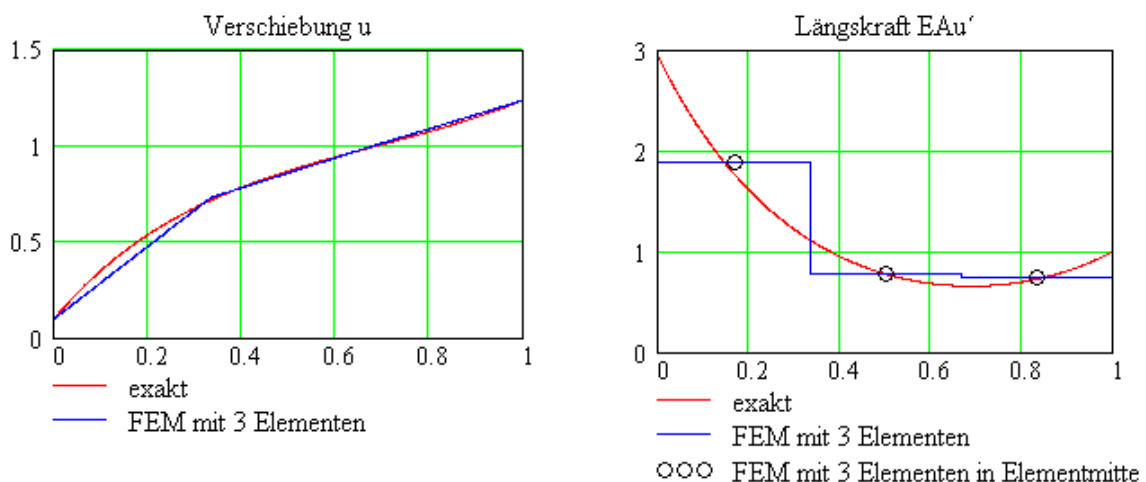
Die Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ des Modells „Beispiel Zugstab“ ist in (3.1.14)

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \cdot 10^3 \quad (3.1.14)$$

$$\beta^2 = 1 \times 10^{-5} \quad \mathbf{K} := \mathbf{N} + \beta^2 \cdot \mathbf{M}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4.111 & -2.444 & 0 & 0 \\ -2.444 & 8.222 & -2.444 & 0 \\ 0 & -2.444 & 8.222 & -2.444 \\ 0 & 0 & -2.444 & 4.111 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

Die Lösung kann Abbildung 3.6 entnommen werden. Der Polygonzug des Verschiebungsverlaufes ist schon relativ genau. Der Längskraftverlauf ergibt sich aus der Ableitung des Verschiebungsverlaufes und ist deshalb stückweise konstant. In den Elementmitten stimmt er schon gut mit der exakten Lösung überein.

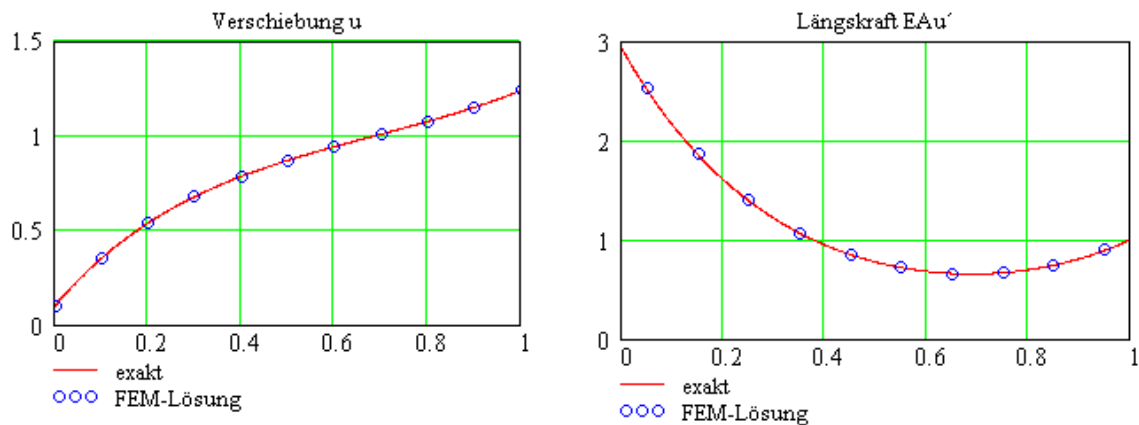


exakte Lösung $u(1) = 1.239$ $F_L(0) = 2.92$

FEM Lösung $u_s(1) = 1.237$ $F_{Ls}\left(\frac{1}{6}\right) = 1.888$ $\mathbf{u}_s^T = (0.1 \ 0.729 \ 0.99 \ 1.237)$

Abbildung 3.6: FE-Lösung mit 3 gleichen Stabelementen

In Abbildung 3.7 ist die FE-Lösung für ein Modell mit 10 gleichen Elementen der exakten Lösung gegenübergestellt. Darin ist die Konvergenz der FE-Lösung gut zu erkennen.



exakte Lösung $u(1) = 1.239$ $F_L(0) = 2.92$

FEM-Lösung $\mathbf{u}^T = (0.1 \ 0.352 \ 0.539 \ 0.678 \ 0.785 \ 0.87 \ 0.942 \ 1.008 \ 1.075 \ 1.149 \ 1.239)$
 $\mathbf{f}^T = (-2.931 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$

Abbildung 3.7: FE-Lösung mit 10 gleichen Stabelementen

3.1.5 Transformation des Elementes in die Ebene (den 2D-Raum)

Um ebene Stabstrukturen (Fachwerke) modellieren zu können, muss das 1D-Stabelement mit der Stabkoordinate s_e durch Drehung in die Ebene transformiert werden. Bei einem 2D-Fachwerk sind, im Gegensatz zum 1D-Modell, Streckenlast und elastische Stützung nicht physikalisch sinnvoll. Die Streckenlast wird trotzdem zugelassen, um am Beispiel die Transformation des Vektors der äquivalenten Knotenbelastungen \mathbf{p} zu zeigen. Die elastische Stützung wird weglassen.

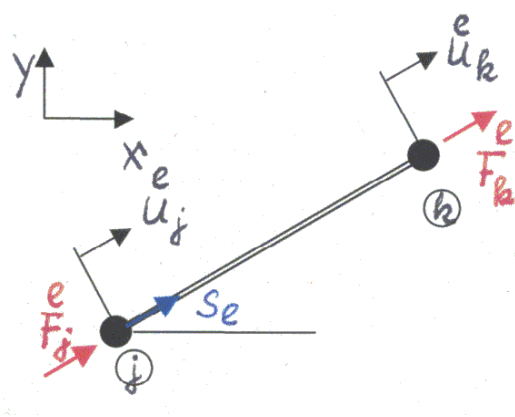


Abbildung 3.8: Einzelstab lokal

In Abbildung 3.8 ist ein Stab mit dem globalen Anfangsknoten GK j bei $s_e=0$ und dem globalen Endknoten GK k bei $s_e=1$ dargestellt. Seine Steifigkeitsmatrix in (3.1.15) ergibt sich aus (3.1.5) mit $c=0$.

$$\mathbf{f}_s^e = \mathbf{K}_s^e \cdot \mathbf{u}_s^e - \mathbf{p}_s^e, \quad \mathbf{f}_s^e = \begin{pmatrix} F_j^e & F_k^e \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_s^e = \begin{pmatrix} u_j^e & u_k^e \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{p}_s^e = \begin{pmatrix} p_j^e & p_k^e \end{pmatrix}^T \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{K}_s^e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

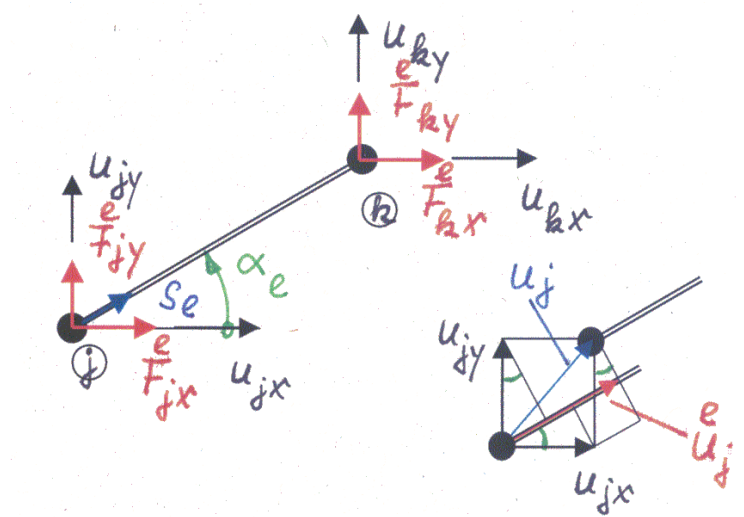


Abbildung 3.9: Einzelstab global

$$\begin{matrix} e \\ F_{nx} \end{matrix} = \begin{matrix} e \\ F_n \end{matrix} \cos \alpha_e, \quad n = j, k \quad (3.1.16)$$

$$\begin{matrix} e \\ F_{ny} \end{matrix} = \begin{matrix} e \\ F_n \end{matrix} \sin \alpha_e$$

$$\begin{matrix} e \\ u_n \end{matrix} = \begin{matrix} e \\ u_{nx} \end{matrix} \cos \alpha_e + \begin{matrix} e \\ u_{ny} \end{matrix} \sin \alpha_e, \quad \begin{matrix} e \\ u_{n\perp} \end{matrix} = -\begin{matrix} e \\ u_{nx} \end{matrix} \sin \alpha_e + \begin{matrix} e \\ u_{ny} \end{matrix} \cos \alpha_e$$

Die Transformation in die kartesische x,y-Ebene entsprechend Abbildung 3.9 mit (3.1.16) führt mit der Transformationsmatrix \underline{T}

$$\begin{matrix} e \\ \underline{T} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_e & 0 \\ \sin \alpha_e & 0 \\ 0 & \cos \alpha_e \\ 0 & \sin \alpha_e \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e \\ \underline{T}^T \end{matrix} \cdot \begin{matrix} e \\ \underline{T} \end{matrix} = \underline{I} \quad (3.1.17)$$

auf die 4x4 Elementsteifigkeitsmatrix $\begin{matrix} e \\ \underline{K} \end{matrix}$ von (3.1.19).

Die Verschiebung $\begin{matrix} e \\ u_{n\perp} \end{matrix}$ in (3.1.16) steht orthogonal auf $\begin{matrix} e \\ u_n \end{matrix}$ und kann für den 1D-Stab nicht vorgegeben werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f}}_s^e &= \underline{\underline{K}}_s^e \cdot \underline{\underline{u}}_s^e - \underline{\underline{p}}_s^e \Rightarrow \underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{f}}_s^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{K}}_s^e \cdot \underline{\underline{u}}_s^e - \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{p}}_s^e \\ &= \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{K}}_s^e \cdot \underline{\underline{T}}^{eT} \cdot \underline{\underline{u}}^e - \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{p}}_s^e = \underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{\underline{u}}^e - \underline{\underline{p}}^e \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}_{jx}^e & \underline{\underline{f}}_{jy}^e & \underline{\underline{f}}_{kx}^e & \underline{\underline{f}}_{ky}^e \end{pmatrix}^T, \quad \underline{\underline{u}}^e = \begin{pmatrix} u_{jx} & u_{jy} & u_{kx} & u_{ky} \end{pmatrix}^T$$

$$\underline{\underline{p}}^e = \begin{pmatrix} \underline{\underline{p}}_{jx}^e & \underline{\underline{p}}_{jy}^e & \underline{\underline{p}}_{kx}^e & \underline{\underline{p}}_{ky}^e \end{pmatrix}^T$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{K}}_s^e \cdot \underline{\underline{T}}^{eT}$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{f}}_s^e, \quad \underline{\underline{u}}_s^e = \underline{\underline{T}}^{eT} \cdot \underline{\underline{u}}^e, \quad \underline{\underline{p}}^e = \underline{\underline{T}}^e \cdot \underline{\underline{p}}_s^e$$

Der Index j ist die globale Knotennummer GK des Gesamtmodells am Anfang des Elementes bei $s_e=0$ und der Index k die entsprechende Knotennummer am Ende bei $s_e=1$. Diese GK ergeben sich aus der Koinzidenzmatrix des speziellen Modells.

$$s_\alpha = \sin \alpha_e, \quad c_\alpha = \cos \alpha_e \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}^e &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{jj}^e & \underline{\underline{K}}_{jk}^e \\ \underline{\underline{K}}_{kj}^e & \underline{\underline{K}}_{kk}^e \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 & s_\alpha c_\alpha & -c_\alpha^2 & -s_\alpha c_\alpha \\ s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 & -s_\alpha c_\alpha & -s_\alpha^2 \\ -c_\alpha^2 & -s_\alpha c_\alpha & c_\alpha^2 & s_\alpha c_\alpha \\ -s_\alpha c_\alpha & -s_\alpha^2 & s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}}^{eT} \\ \underline{\underline{K}}_{jj}^e &= \underline{\underline{K}}_{kk}^e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 & s_\alpha c_\alpha \\ s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{K}}_{jk}^e = \underline{\underline{K}}_{kj}^e = -\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 & s_\alpha c_\alpha \\ s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rang beider Steifigkeitsmatrizen ist Eins

$$\|\underline{\underline{K}}_s^e\| = \|\underline{\underline{K}}^e\| = 1 \quad (3.1.20)$$

Der Rangabfall von 1 beim 1D-Stab und von 3 beim 2D-Stab (1D-Stab im 2D-Raum) ergibt sich aus den möglichen Starrkörperbewegungen, eine Verschiebung in Stabrichtung beim 1D-Stab bzw. 2 Verschiebungen und eine Verdrehung beim 2D-Stab.

3.1.6 Zusammensetzen von Stabelementen in der Ebene

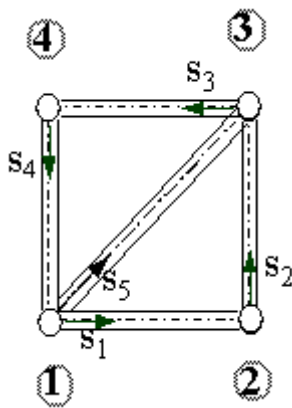


Abbildung 3.10: FE-Modell aus 5 Stabelementen

	0	1
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	1
5	1	3

Abbildung 3.11: Koinzidenzmatrix des Modells

Die Assemblierung eines Fachwerkes aus einzelnen Stabelementen soll am Beispiel aus Abbildung 3.10 demonstriert werden. Es ist ein Modell mit 4 Knoten und 5 Stäben. Analog zu 3.1.4 gibt die Koinzidenzmatrix aus Abbildung 3.11 die Topologie der Struktur an. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix hat die Dimension $N \times N$. N ergibt sich aus $AK=4$ (Anzahl der Knoten) und $AFW=2$ (Anzahl der Freiwerte pro Knoten) zu

$$N=AK*AFW=8.$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}^e &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{jj}^e & \underline{\underline{K}}_{jk}^e \\ \underline{\underline{K}}_{kj}^e & \underline{\underline{K}}_{kk}^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{f}}_j = \begin{pmatrix} f_{jx} \\ f_{jy} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}}_j = \begin{pmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}}_j = \begin{pmatrix} p_{jx} \\ p_{jy} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}}_j^e = \begin{pmatrix} p_{jx}^e \\ p_{jy}^e \end{pmatrix} \quad (3.1.21) \\ \underline{\underline{f}} &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^1 + \underline{\underline{K}}_{11}^4 + \underline{\underline{K}}_{11}^5 & \underline{\underline{K}}_{12}^1 & \underline{\underline{K}}_{13}^5 & \underline{\underline{K}}_{14}^4 \\ \underline{\underline{K}}_{21}^1 & \underline{\underline{K}}_{22}^1 + \underline{\underline{K}}_{22}^2 & \underline{\underline{K}}_{23}^2 & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{31}^5 & \underline{\underline{K}}_{32}^2 & \underline{\underline{K}}_{33}^2 + \underline{\underline{K}}_{33}^3 + \underline{\underline{K}}_{33}^5 & \underline{\underline{K}}_{34}^3 \\ \underline{\underline{K}}_{41}^4 & 0 & \underline{\underline{K}}_{43}^3 & \underline{\underline{K}}_{44}^3 + \underline{\underline{K}}_{44}^4 \end{pmatrix} \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{p}} \\ \underline{\underline{f}} &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}_1 \\ \underline{\underline{f}}_2 \\ \underline{\underline{f}}_3 \\ \underline{\underline{f}}_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{u}}_1 \\ \underline{\underline{u}}_2 \\ \underline{\underline{u}}_3 \\ \underline{\underline{u}}_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{p}}_1 \\ \underline{\underline{p}}_2 \\ \underline{\underline{p}}_3 \\ \underline{\underline{p}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{p}}_1^1 + \underline{\underline{p}}_1^4 + \underline{\underline{p}}_1^5 \\ \underline{\underline{p}}_2^1 + \underline{\underline{p}}_2^2 \\ \underline{\underline{p}}_3^2 + \underline{\underline{p}}_3^3 + \underline{\underline{p}}_3^5 \\ \underline{\underline{p}}_4^3 + \underline{\underline{p}}_4^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Indizes j bzw. k der 2×2 Teilsteifigkeitsmatritzen $\underline{\underline{K}}_{jj}^e, \underline{\underline{K}}_{jk}^e, \underline{\underline{K}}_{kj}^e, \underline{\underline{K}}_{kk}^e$ einer (globalen) 2D-Stabsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}^e$ geben dabei die globale Knotennummer GK des Anfangsknotens j bzw. Endknotens k des Elementes e an. Damit ist eindeutig festgelegt, an welche Stelle der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ die Teilsteifigkeitsmatrix einzuordnen (zu addieren) ist. Hauptdiagonalelemente der Elementsteifigkeitsmatrix des Elementes

e werden dabei generell immer auf die Hauptdiagonale der Gesamtsteifigkeitsmatrix addiert.

(3.1.21) ist ein Gleichungssystem 8. Ordnung. Insgesamt 8 der 16 Kraft- und Verformungsgrößen sind als RB vorgegeben. Eine Auflösung nach den verbleibenden 8 unbekannten Größen ist die Lösung des Problems.

Die Steifigkeitsmatrix des noch ungefesselten Systems in (3.1.21) (entsprechend (3.1.10)) hat den Rang 5. Das System muss mindestens statisch bestimmt gelagert sein, damit sie den Rang 8 erhält, d.h. nicht singulär ist und invertiert werden kann.

Inhomogene Verschiebungsbedingungen wie in (3.1.12) können wieder durch Überlagerung der mit C^∞ multiplizierten wesentlichen RB realisiert werden, so dass die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix nicht gestört wird oder bei homogenen Verschiebungsbedingungen durch Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten.

Im Beispiel nehmen wir an, dass die Knoten 1 und 4 unverschieblich gelagert und die Kräfte der Knoten 2 und 3 mit \tilde{f}_2, \tilde{f}_3 vorgegeben sind. Damit ergibt sich durch Streichen der zu den Knoten 1 und 4 gehörigen Zeilen und Spalten 1,2,7,8 das reduzierte Gleichungssystem von (3.1.22) zur Berechnung der noch unbekannten 4 Verschiebungen.

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_4 = \underline{0} \quad (3.1.22)$$

$$\underline{f}_2 = \tilde{f}_2, \quad \underline{f}_3 = \tilde{f}_3$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix} = \underline{K} \begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} = \underline{K}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\underline{K}_{22}} + \overset{2}{\underline{K}_{22}} & \overset{2}{\underline{K}_{23}} \\ \overset{2}{\underline{K}_{32}} & \overset{2}{\underline{K}_{33}} + \overset{3}{\underline{K}_{33}} + \overset{5}{\underline{K}_{33}} \end{pmatrix}$$

Die 4 noch unbekannten Lagerkräfte werden dann aus den gestrichenen Gleichungen berechnet

$$\begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\underline{K}_{12}} & \overset{5}{\underline{K}_{13}} \\ 0 & \overset{3}{\underline{K}_{43}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_4 \end{pmatrix} \quad (3.1.23)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix des Stabes 4 hat keinen Anteil. Dieser Stab bleibt kräftefrei, da beide Knoten dieses Stabes unverschieblich gelagert sind.

3.2 Randbedingungen (RB)

RB für Kraftgrößen sind problemlos zu realisieren. Die vorgegebenen Kraftgrößen werden in den Vektor \underline{f} der Knotenlasten addiert. Unter RB sind deshalb nachfolgend

in diesem Abschnitt ausschließlich Verformungs-RB und gemischte RB (RB für elastische Stützungen durch Federn) zu verstehen.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, RB zu realisieren. Es können z.B. außer der im Folgenden beschriebenen Methode RB auch durch Hinzufügen von Nebenbedingungen zum Potential berücksichtigt werden.² Hier sollen Straffunktionen zum Potential hinzugefügt werden. Dabei bleiben Größe, Symmetrie und i.a. Bandstruktur des Gesamtgleichungssystems erhalten. Außerdem sollen auch noch elastische Stützungen (Federn) zum Gesamtmodell hinzugefügt werden können über die sich mit linearelastischen Federn gestützte Knoten realisieren lassen.

Homogene RB wurden in 3.1.6 durch Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten der Steifigkeitsmatrix realisiert. Die verbleibende, kleinere Steifigkeitsmatrix ist wieder symmetrisch, muss aber völlig neu aufgebaut werden. Bei großen Matrizen erfordert das viel Speicherplatz und Rechenzeit. Inhomogene RB können auf diese Weise nicht realisiert werden.

In 3.1.4 wurde schon die inhomogene RB $u_1 = u_a$ am Anfangsrand durch die Addition der Gleichung $C_\infty u_1 = C_\infty u_a$ zur entsprechenden, also der 1. Gleichung des Gesamtgleichungssystems realisiert. Dabei blieben die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix und ihre Größe unverändert. Die originale Steifigkeitsmatrix des ungefestelten Systems (ohne RB) kann durch Subtraktion der hinzugefügten Gleichung leicht wieder hergestellt werden und durch nachfolgende andere Modifikationen können die RB ohne großen Aufwand verändert werden. Diese Methode ist sehr effektiv. Sie kann verallgemeinert werden, indem man zum elastischen Gesamtpotential π aus (6.6.8) Straffunktionen hinzufügt. Die RB lassen sich entsprechend (3.2.1) allgemein formulieren.

$$\begin{aligned}\underline{G}_R \underline{u} - \underline{u}_R &= \underline{0} \\ \underline{\Delta f}_F - \underline{K}_F \underline{u}_F &= \underline{0}\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Die Kraftgrößen und die Verformungen der Federn aus (3.2.1) müssen noch in die globalen Richtungen von $\underline{\Delta f}$ und \underline{u} transformiert werden.

$$\begin{aligned}\underline{\Delta f} &= \underline{G}_F^T \underline{\Delta f}_F, \quad \underline{u}_F = \underline{G}_F \underline{u} \\ \Rightarrow \underline{\Delta f} - \underline{G}_F^T \underline{K}_F \underline{G}_F \underline{u} &= \underline{0}\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Dabei sind:

\underline{G}_R	-	Transformationsmatrix zur Richtungstransformation von \underline{u} in \underline{u}_R
\underline{u}_R	-	Vektor der vorgegebenen RB für die Verformungen
\underline{G}_F	-	Transformationsmatrix zur Richtungstransformation von $\underline{\Delta f}_F$ in $\underline{\Delta f}$
$\underline{\Delta f}_F$	-	Vektor der durch die Federn eingeleiteten Kraftgrößen
\underline{K}_F	-	Steifigkeitsmatrix der Federn
\underline{u}_F	-	Verformungen der Federn

Die Verformungs-RB von (3.2.1) werden als Potential π_R

$$\pi_R = \frac{1}{2}(\underline{G}_R \underline{u} - \underline{u}_R)^T \cdot (\underline{G}_R \underline{u} - \underline{u}_R) = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{G}_R^T \underline{G}_R \underline{u} - \underline{u}^T \underline{G}_R^T \underline{u}_R + \frac{1}{2} \underline{u}_R^T \cdot \underline{u}_R \quad (3.2.3)$$

mit einer großen Steifigkeit C^∞ multipliziert und mit dem Potential $\frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{\Delta f}$ der elastischen Stützungen dem Gesamtpotential π aus (6.6.8) hinzugefügt. Die Matrix \underline{K} ist singulär. Sie gehört zum noch ungelagerten System. Mit den RB in (3.2.1), (3.2.3) und den elastischen Stützungen müssen mindestens die Starrkörperbewegungen behindert werden (d.h. mindestens statisch bestimmte Lagerung).

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} - \underline{p}^T \underline{u} - \underline{f}^T \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{\Delta f} = \text{Min.} \quad (3.2.4)$$

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{2} \tilde{\underline{u}}^T \underline{K} \tilde{\underline{u}} - \underline{p}^T \tilde{\underline{u}} - \tilde{\underline{f}}^T \tilde{\underline{u}} + \frac{1}{2} \tilde{\underline{u}}^T \underline{\Delta f} + C^\infty \pi_R = \text{Min.}, \quad \tilde{\underline{u}} \approx \underline{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{\underline{u}}^T} = \underline{K} \tilde{\underline{u}} - \underline{p} - \tilde{\underline{f}} + C^\infty \underline{G}_R^T (\underline{G}_R \tilde{\underline{u}} - \underline{u}_R) + \underline{G}_F^T \underline{K}_F \underline{G}_F \tilde{\underline{u}} = \underline{0}$$

$\tilde{\underline{f}}$ – Vektor der (bekannten) vorgegebenen Knotenlasten

$\tilde{\underline{u}}$ – Vektor der unbekannten Knotenverformungen

Die Steifigkeit C^∞ ist groß gegenüber den Steifigkeiten in \underline{K} . Mit (3.2.4) ergibt sich

$$\underline{f}_R = \underline{K}_R \tilde{\underline{u}} - \underline{p} \quad (3.2.5)$$

$$\text{mit } \underline{f}_R = \tilde{\underline{f}} + C^\infty \underline{G}_R^T \underline{u}_R, \quad \underline{K}_R = \underline{K} + C^\infty \underline{G}_R^T \underline{G}_R + \underline{G}_F^T \underline{K}_F \underline{G}_F$$

Die Lösung des Gleichungssystems (3.2.5) und der Vektor \underline{f} der Knotenkräfte sind

$$\tilde{\underline{u}} = \underline{K}_R^{-1} (\underline{f}_R + \underline{p}) \quad (3.2.6)$$

$$\underline{f} \approx \underline{K} \tilde{\underline{u}} - \underline{p} \quad (\text{wegen } \tilde{\underline{u}} \approx \underline{u})$$

Der Vektor \underline{f} enthält die vorgegebenen, äußeren Knotenlasten und die daraus resultierenden Lagerreaktionen.

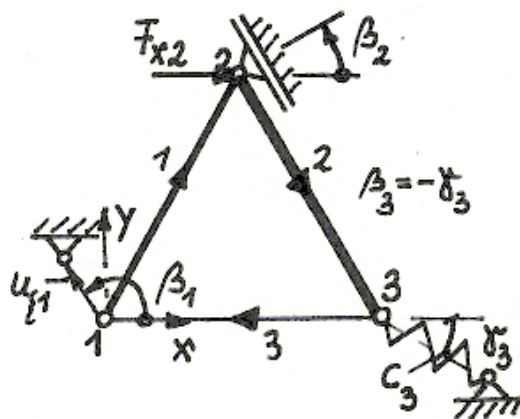


Abbildung 3.12: RB allgemein, Berechnungsmodell

In Abbildung 3.12 ist als Beispiel das Berechnungsmodell eines Fachwerkes mit 3 Stäben und 3 Knoten skizziert. Am Knoten 1 ist die Verschiebung $u_{\xi 1}$ mit dem Winkel β_1 vorgegeben. Die Verschiebung $u_{\eta 1}$ senkrecht dazu (in Richtung $\beta_1 + \pi/2$) ist Null. Am Knoten 2 wird in Richtung x die Kraft F_{x2} eingeleitet. Außerdem ist dieser Knoten mit einem Loslager unter dem Winkel β_2 gelagert. Der Knoten 3 wird durch eine Feder der Steifigkeit c_3 unter dem Winkel $\beta_3 = -\gamma_3$ gestützt. Für dieses Modell sind die Vektoren und Matrizen der RB in (3.2.7) dargestellt. Die Richtungstransformationen in

(3.2.7) sind entsprechend (3.1.16).

$$\underline{u}^T = (u_{x1} \quad u_{y1} \mid u_{x2} \quad u_{y2} \mid u_{x3} \quad u_{y3}) \quad (3.2.7)$$

$$\underline{G}_R = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_1) & \cos(\beta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos(\beta_2) & \sin(\beta_2) & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underline{u}_R^T = (u_{\xi 1} \quad u_{\eta 1} \quad 0) \quad , \quad u_{\eta 1} = 0$$

$$\underline{G}_F = (0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \mid \cos(\beta_3) \quad \sin(\beta_3))$$

$$\underline{K}_F = (c_3)$$

3.3 Stabtragwerke

Stabtragwerke sind Tragwerke, deren Elemente ausschließlich aus Biegestäben (Biegebalken) bestehen. Diese Stäbe sind an ihren Verbindungen, den Knoten, biegesteif angeschlossen oder/und gelagert.

3.3.1 Balkenelement, Querkraft-Biegung

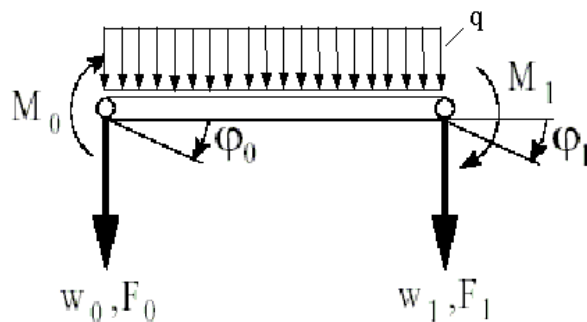


Abbildung 3.13: *Balkenelement*

Es wird die Bernoulli-Hypothese vorausgesetzt (Querschnitte der unverformten Balkenschwerpunktachse bleiben bei Verformung eben und senkrecht zur verformten Balkenschwerpunktachse, der neutralen Faser. Ist exakt für reine Biegung und für Querkraft-Biegung eine Näherung). Das Balkenelement ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Es hat die Biegesteifigkeit EI , die Länge L und ist mit der konstanten Streckenlast q belastet. Die

Knoten (Anfangsknoten 0 und Endknoten 1) haben den Freiheitsgrad 2, die Verschiebung w_j und die Verdrehung φ_j . Die zugeordneten, arbeitskonjugierten Kraftgrößen sind die Querkraft F_j und das Biegemoment M_j , $j=0,1$. Die dimensionslose Koordinate in Richtung der Balkenachse von 0 nach 1 ist μ mit $0 < \mu < 1$.

Die RWA des Biegebalkens ist (Dgl 4.Ordnung mit insgesamt $2 \times 2 = 4$ RB)

$$\text{Dgl: } EI \cdot w'''' - q = 0, \quad ()' = \frac{1}{L} \frac{d()}{d\mu} \quad (3.3.1)$$

$$\text{RB am Rand } \mu=0: \quad w(0) = w_0 \quad \text{oder} \quad EI \cdot w'''(0) = -F_0$$

$$w'(0) = \varphi_0 \quad \text{oder} \quad EI \cdot w''(0) = -M_0$$

$$\text{RB am Rand } \mu=1: \quad w(1) = w_1 \quad \text{oder} \quad EI \cdot w'''(1) = F_1$$

$$w'(1) = \varphi_1 \quad \text{oder} \quad EI \cdot w''(1) = M_1$$

Es werden der Knotenkraftgrößenvektor \underline{f} und der Knotenverformungsvektor \underline{u} eingeführt

$$\underline{f} = (F_0 \quad M_0 \quad F_1 \quad M_1)^T, \quad \underline{u} = (w_0 \quad \varphi_0 \quad w_1 \quad \varphi_1)^T \quad (3.3.2)$$

Aus 6.6 folgt entsprechend das elastische Gesamtpotential

$$\pi = L \int Q(\mu, w, w'') d\mu - \underline{f}^T \cdot \underline{u} = \text{Min.} \quad (3.3.3)$$

$$Q(\mu, w, w'') = \left[\frac{1}{2} EI (w'')^2 - q w \right]$$

Die Ansatzfunktion w muss nach (3.3.3) mindestens 2-mal stetig differenzierbar sein.

Wegen der 4 Freiwerte im Vektor \underline{u} wird ein Polynom dritten Grades verwendet. Auch hier sollen die Freiwerte die physikalischen Knotenverformungen sein. Diese Bedingung erfüllen Hermitesche Polynome aus (3.3.4), bei denen für jeden Knoten der Funktionswert und die erste Ableitung (einer der 4 Werte mit dem Wert Eins und die anderen 3 mit dem Wert Null) vorgegeben sind. Gleichung (3.3.4) ist die exakte Lö-

$$w(\mu) = \underline{g}^T(\mu) \cdot \underline{u}, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 1 - 3\mu^2 + 2\mu^3 \\ L(\mu - 2\mu^2 + \mu^3) \\ 3\mu^2 - 2\mu^3 \\ L(-\mu^2 + \mu^3) \end{pmatrix}, \quad \underline{g}' = \frac{1}{L} \frac{d\underline{g}}{d\mu} \quad (3.3.4)$$

sung der homogenen Dgl aus (3.3.1). Damit ist für verschwindende Streckenlast $q=0$, d.h. verschwindende 4. Ableitung von w , die exakte Lösung in der FEM-Formulierung

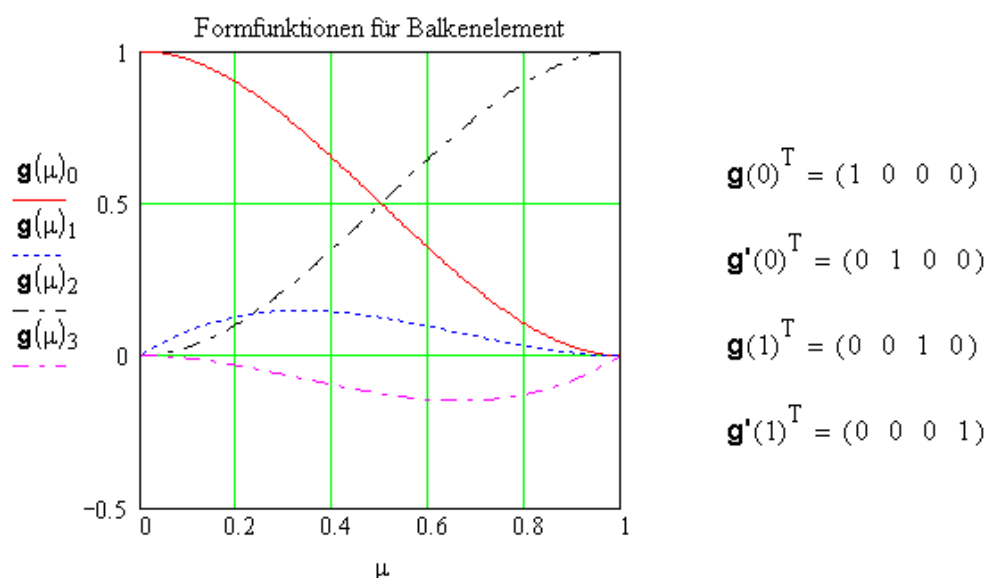


Abbildung 3.14: Hermitesche Polynome

enthalten.

Die Hermite'sche Polynome sind in Abbildung 3.14 dargestellt.

Analog (2.2.7) aus der Schwachen Form und entsprechend der notwendigen Bedingung (6.6.7) aus dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials wird

$$Q(\underline{\mu}, \underline{u}) = \frac{1}{2} EI (\underline{g}''^T \cdot \underline{u})^2 - q \underline{g}^T \cdot \underline{u} \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_j} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 EI \cdot L \cdot \underline{g}''^T \cdot \underline{u} \cdot \underline{g}_j'' d\mu + \int_0^1 (-q \cdot \underline{g}_j) \cdot L \cdot d\mu - f_j = 0 \quad , \quad j = 0, \dots, 3$$

$$\underline{K} \cdot \underline{u} - \underline{p} - \underline{f} = \underline{0} \quad , \quad \underline{p} = qL \int_0^1 \underline{g} \cdot d\mu$$

$$K_{i,j} = EI \cdot L \int_0^1 \underline{g}_i'' \cdot \underline{g}_j'' d\mu \quad , \quad i, j = 0, \dots, 3$$

Die FE-Formulierung mit dem Kopindex e der Elementnummer ist damit

$$\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{u}^e - \underline{p}^e \quad (3.3.6)$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{p}^e = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{L}{6} \\ 1 \\ -\frac{L}{6} \end{pmatrix}$$

Dieses Balkenelement ist entsprechend 3.1.4 zur Modellierung von (1D-) Durchlaufträgern geeignet. Bei einem (2D-) Modell in der Ebene müssen auch die Längsverschiebung und die Längskraft berücksichtigt werden.

3.3.2 Zusammensetzen von Balkenelementen im 1D-Raum

Das Zusammensetzen von Balkenelementen ist völlig analog zu 3.1.4.

Es wird exemplarisch ein Balken entsprechend Abbildung 3.3 aus 3 Elementen zusammengesetzt. Am Knoten 1 ist er starr eingespannt und am Knoten 4 frei (Kragträger). Die Parameter sind Länge $L=10^3$ mm, Elastizitätsmodul $E=10^5$ Mpa, Flächenmoment 2.Ordnung $I=10^7$ mm⁴, Streckenlast $q=100$ N/mm. Die Steifigkeitsmatrix des ungelagerten Systems, der Vektor der äquivalenten Knotenlasten, der Verformungsvektor und der Kraftgrößenvektor des FE-Problems sind in Abbildung 3.15. Zur Realisierung der Einspannbedingungen am Knoten 1 sind entsprechend (3.1.12) in den ersten zwei Gleichungen noch die Steifigkeit C_∞ in der Hauptdiagonalen zu addieren ($C_\infty w_1=0$, $C_\infty \varphi_1=0$).

Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem sind exakt erfüllt: Lagerkraft $qL=10^5\text{N}$, Lagermoment $\frac{1}{2}qL^2=5 \cdot 10^7\text{Nmm}$.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3.24 & 540 & -3.24 & 540 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 540 & 1.2 \times 10^5 & -540 & 6 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.24 & -540 & 6.48 & 0 & -3.24 & 540 & 0 & 0 \\ 540 & 6 \times 10^4 & 0 & 2.4 \times 10^5 & -540 & 6 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.24 & -540 & 6.48 & 0 & -3.24 & 540 \\ 0 & 0 & 540 & 6 \times 10^4 & 0 & 2.4 \times 10^5 & -540 & 6 \times 10^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.24 & -540 & 3.24 & -540 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 540 & 6 \times 10^4 & -540 & 1.2 \times 10^5 \end{pmatrix} 10^5$$

$$\mathbf{p}^T = (0.167 \ 9.259 \ 0.333 \ 0 \ 0.333 \ 0 \ 0.167 \ -9.259) 10^5$$

$$\mathbf{u}^T = (0 \ 1.543 \times 10^{-8} \ 2.212 \ 0.012 \ 6.996 \ 0.016 \ 12.5 \ 0.017)$$

$$\mathbf{f}^T = (-1 \ -500 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) 10^5$$

Abbildung 3.15: FE-Formulierung mit 3 gleichen Elementen

Die Durchbiegung w und die Verdrehung ϕ von exakter und FEM-Lösung stimmen praktisch überein. Das Polynom 4.Ordnung der exakten Lösung wird stückweise durch 3 Polynome 3.Ordnung sehr gut in Funktionsverlauf und erster Ableitung angenähert. In Abbildung 3.16 sind dazu bei der FEM-Lösung auch Werte im Inneren der FE auf-

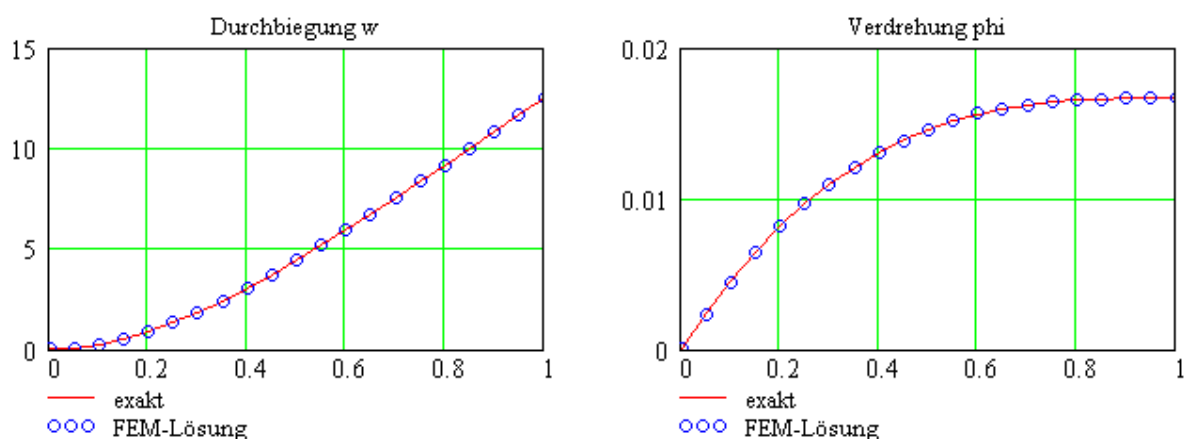


Abbildung 3.16: Durchbiegung [mm], Verdrehung [1] getragen.

Unterschiede gibt es in den höheren Ableitungen (den Schnittgrößen) und damit auch in den daraus berechneten Spannungen.

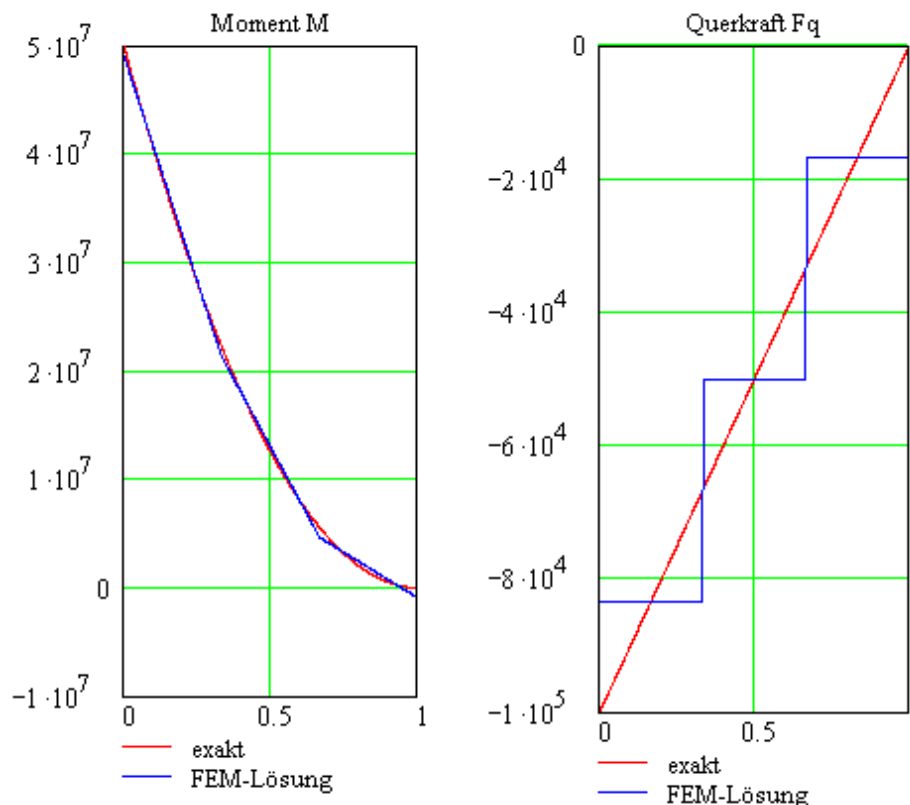


Abbildung 3.17: Moment [Nmm], Querkraft [N]

In den Elementmitten stimmt die Querkraft nach der FEM mit der exakten Lösung überein.

3.3.3 Balkenelement, Querkraft-Biegung mit Längskraft

Die FE-Formulierung für ein Balkenelement, Querkraft-Biegung mit Längskraft, ergibt sich aus denen von 3.1.1 und 3.3.1. Die Koordinaten des Kraftgrößenvektors sind arbeitskonjugiert zu denen des Verformungsvektors und die Streckenlasten q_u , und q_w sind positiv in Richtung positiver Verschiebungen u bzw. w . Bei realen Balken wird D , wenn die FE-Länge L groß gegenüber den Querschnittsabmessungen der Querschnittsfläche A ist, sehr groß gegenüber der 12 in der Steifigkeitsmatrix sein. Das ist damit begründet, dass die Längsverformungen u bei Biegebeanspruchung klein gegenüber den Querverformungen w (Durchbiegungen) sind. Bei Transformationen entsprechend 3.3.4 werden diese Elemente der Steifigkeitsmatrix in (3.3.13) addiert. Um unerwünschte numerische Versteifungseffekte zu vermeiden sollte deshalb die FE-Länge L nicht zu groß im Vergleich mit den Querschnittsabmessungen gewählt werden. Als grober Richtwert wird hier willkürlich der Faktor 100 angegeben. Damit wird D für einen quadratischen Querschnitt schon rund 10^5 .

$$\underline{\underline{f}}_b^e = \underline{\underline{K}}_b^e \cdot \underline{\underline{u}}_b^e - \underline{\underline{p}}_b^e \quad (3.3.7)$$

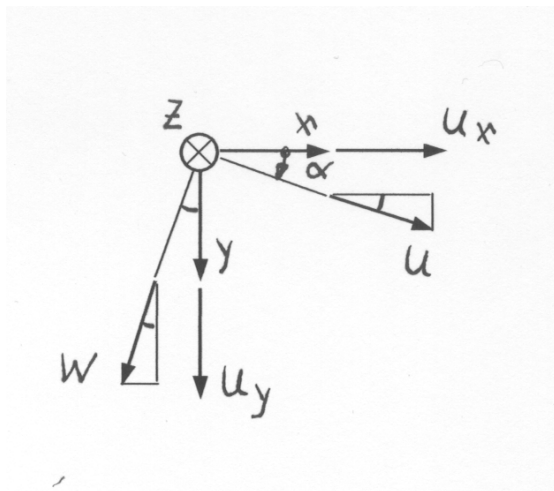
$$\underline{\underline{f}}_b^e = (F_{u0} \quad F_{w0} \quad M_0 \mid F_{u1} \quad F_{w1} \quad M_1)^T$$

$$\underline{\underline{u}}_b^e = (u_0 \quad w_0 \quad \varphi_0 \mid u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1)^T$$

$$\underline{\underline{p}}_b^e = \left(\frac{q_u L}{2} \quad \frac{q_w L}{2} \quad \frac{q_w L^2}{12} \mid \frac{q_u L}{2} \quad \frac{q_w L}{2} \quad -\frac{q_w L^2}{12} \right)^T$$

$$\underline{\underline{K}}_b^e = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -D & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{A \cdot L^2}{I}$$

3.3.4 Transformation des Elementes in die Ebene (den 2D-Raum)



Nach Abbildung 3.18 sind die Transformationsgleichungen der lokalen Verschiebungen u und w in die globalen u_x und u_y .

Die lokale Balkenlängskoordinate s des Balkenelementes zeigt (vom Anfangsknoten zum Endknoten) in die gleiche Richtung wie die lokale Verschiebung u des Balkenelementes.

Abbildung 3.18: Transformation der Verschiebungen

$$u_x = u \cdot c_\alpha - w \cdot s_\alpha \quad (3.3.8)$$

$$u_y = u \cdot s_\alpha + w \cdot c_\alpha$$

mit

$$c_\alpha = \cos \alpha, \quad s_\alpha = \sin \alpha$$

Die Kräfte werden genauso wie die Verschiebungen transformiert. Die Verdrehungen φ_i und die Momente M_i behalten bei Drehung um die z -Achse ihre Richtung bei, $i=0,1$.

Die Transformation des Elementes in die x,y-Ebene durch Drehung mit dem Winkel α ist mit der Transformationsmatrix \underline{T}

$$\underline{T} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_\alpha & -s_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \underline{T}^{-1} = \underline{T}^T, \quad |\underline{T}| = 1 \quad (3.3.9)$$

nach (3.3.10) durchzuführen

$$\begin{aligned} \underline{f}_b^e &= \underline{K}_b^e \cdot \underline{u}_b^e - \underline{p}_b^e \\ \underline{f}^e &= \underline{T} \underline{f}_b^e = \underline{T} \underline{K}_b^e \cdot \underline{u}_b^e - \underline{T} \underline{p}_b^e \\ \underline{u}^e &= \underline{T} \underline{u}_b^e \Rightarrow \underline{T}^{-1} \underline{u}^e = \underline{T}^{-1} \underline{T} \underline{u}_b^e = \underline{u}_b^e \\ \Rightarrow \underline{f}^e &= \underline{K} \underline{u} - \underline{p} \quad \text{mit} \quad \underline{K} = \underline{T} \underline{K}_b^e \underline{T}^T, \quad \underline{p} = \underline{T} \underline{p}_b^e \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Die raumfesten Kraftgrößenvektoren, Verformungsvektoren und Vektoren der äquivalenten Knotenbelastungen durch die Streckenlasten sind dabei

$$\begin{aligned} \underline{f}^e &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{f}_{jx}^e & \underline{f}_{jy}^e & \underline{M}_j^e & \underline{f}_{kx}^e & \underline{f}_{ky}^e & \underline{M}_k^e \end{array} \right)^T \\ \underline{u}^e &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{u}_{jx}^e & \underline{u}_{jy}^e & \varphi_j^e & \underline{u}_{kx}^e & \underline{u}_{ky}^e & \varphi_k^e \end{array} \right)^T \\ \underline{p}^e &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{p}_{jx}^e & \underline{p}_{jy}^e & \underline{p}_{j\varphi}^e & \underline{p}_{kx}^e & \underline{p}_{ky}^e & \underline{p}_{k\varphi}^e \end{array} \right)^T \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Formal kann die Elementsteifigkeitsmatrix wieder analog wie in (3.1.19) mit vier 3x3 Teilmatrizen geschrieben werden. Die tiefgestellten Indizes j und k geben dabei die globale Knotennummer GK an mit der Anfangs- bzw. Endknoten des Elementes e in der Gesamtstruktur verbunden sind.

$$\begin{aligned} \underline{K}^e &= \begin{pmatrix} \underline{K}_{jj}^e & \underline{K}_{jk}^e \\ \underline{K}_{kj}^e & \underline{K}_{kk}^e \end{pmatrix} = \underline{K}^{eT} \\ \underline{p}^e &= \frac{L}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_\alpha q_u - s_\alpha q_w & s_\alpha q_u + c_\alpha q_w & \frac{L}{6} q_w & c_\alpha q_u - s_\alpha q_w & s_\alpha q_u + c_\alpha q_w & -\frac{L}{6} q_w \end{array} \right)^T \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K}}_{jj}^e &= \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} Dc_\alpha^2 + 12s_\alpha^2 & (D-12)c_\alpha s_\alpha & -6Ls_\alpha \\ & Ds_\alpha^2 + 12c_\alpha^2 & 6Lc_\alpha \\ \text{sym.} & & 4L^2 \end{pmatrix} & D = \frac{A \cdot L^2}{I} & (3.3.13) \\
 \underline{\underline{K}}_{kk}^e &= \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} Dc_\alpha^2 + 12s_\alpha^2 & (D-12)c_\alpha s_\alpha & 6Ls_\alpha \\ & Ds_\alpha^2 + 12c_\alpha^2 & -6Lc_\alpha \\ \text{sym.} & & 4L^2 \end{pmatrix} \\
 \underline{\underline{K}}_{jk}^e &= \underline{\underline{K}}_{kj}^T = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} -(Dc_\alpha^2 + 12s_\alpha^2) & (-D+12)c_\alpha s_\alpha & -6Ls_\alpha \\ (-D+12)c_\alpha s_\alpha & -(Ds_\alpha^2 + 12c_\alpha^2) & 6Lc_\alpha \\ 6Ls_\alpha & -6Lc_\alpha & 2L^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3.5 Zusammensetzen von Balkenelementen in der Ebene

Das Zusammensetzen der Balkenelemente erfolgt völlig analog zu 3.1.6 beim Fachwerk. Für ein aus 5 Balkenelementen zusammengesetztes Modell entsprechend Abbildung 3.10

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K}} &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{jj}^e & \underline{\underline{K}}_{jk}^e \\ \underline{\underline{K}}_{kj}^e & \underline{\underline{K}}_{kk}^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{f}}_j = \begin{pmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}}_j = \begin{pmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}}_j = \begin{pmatrix} p_{jx} \\ p_{jy} \\ p_{j\varphi} \end{pmatrix} & (3.3.14) \\
 \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}_1 \\ \underline{\underline{f}}_2 \\ \underline{\underline{f}}_3 \\ \underline{\underline{f}}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overset{1}{\underline{\underline{K}}}_{11} + \overset{4}{\underline{\underline{K}}}_{11} + \overset{5}{\underline{\underline{K}}}_{11} & \overset{1}{\underline{\underline{K}}}_{12} & \overset{5}{\underline{\underline{K}}}_{13} & \overset{4}{\underline{\underline{K}}}_{14} \\ & \overset{1}{\underline{\underline{K}}}_{21} & \overset{1}{\underline{\underline{K}}}_{22} + \overset{2}{\underline{\underline{K}}}_{22} & \overset{2}{\underline{\underline{K}}}_{23} & 0 \\ & \overset{5}{\underline{\underline{K}}}_{31} & \overset{2}{\underline{\underline{K}}}_{32} & \overset{2}{\underline{\underline{K}}}_{33} + \overset{3}{\underline{\underline{K}}}_{33} + \overset{5}{\underline{\underline{K}}}_{33} & \overset{3}{\underline{\underline{K}}}_{34} \\ & \overset{4}{\underline{\underline{K}}}_{41} & 0 & \overset{3}{\underline{\underline{K}}}_{43} & \overset{3}{\underline{\underline{K}}}_{44} + \overset{4}{\underline{\underline{K}}}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{u}}_1 \\ \underline{\underline{u}}_2 \\ \underline{\underline{u}}_3 \\ \underline{\underline{u}}_4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \underline{\underline{p}}_1 \\ \underline{\underline{p}}_2 \\ \underline{\underline{p}}_3 \\ \underline{\underline{p}}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overset{1}{\underline{\underline{p}}}_1 + \overset{4}{\underline{\underline{p}}}_1 + \overset{5}{\underline{\underline{p}}}_1 \\ \overset{1}{\underline{\underline{p}}}_2 + \overset{2}{\underline{\underline{p}}}_2 \\ \overset{2}{\underline{\underline{p}}}_3 + \overset{3}{\underline{\underline{p}}}_3 + \overset{5}{\underline{\underline{p}}}_3 \\ \overset{3}{\underline{\underline{p}}}_4 + \overset{4}{\underline{\underline{p}}}_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Realisierung von Verformungsbedingungen an den Knoten ist auch völlig analog zu 3.1.6 beim Fachwerk, mit der Erweiterung, dass als Knotenverformungen zusätzlich zu den Verschiebungen in der Modellebene Verdrehungen senkrecht dazu vorgegeben werden können. Der Knotenfreiheitsgrad ist 3.

3.4 Mehrdimensionale Kontinuumsselemente

3.4.1 Elastisches Feldproblem

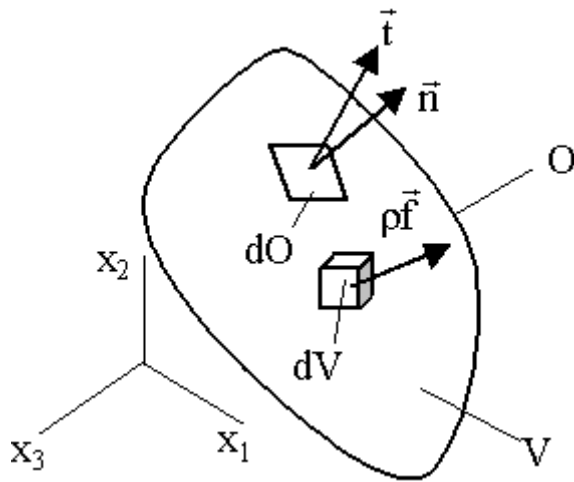


Abbildung 3.19: Volumen

V	– Volumen mit Volumenelement dV
$O = O_t + O_u$	– Oberfläche mit Oberflächenelement dO
O_t	– Oberfläche mit kinetischen-RB (natürlichen-RB)
O_u	– Oberfläche mit kinematischen-RB (wesentlichen-RB)
ρ	– Dichte
\vec{f}	– Kraft pro Masseinheit
\vec{t}	– Kraft pro Oberflächeneinheit (Spannungsvektor auf dO)
\vec{n}	– Außen-Normalen-Einheitsvektor
$\{\vec{e}_k\}_{k=1,2,3}$	– kartesische Einheitsvektoren

Vereinbarungen:

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_k\} \quad (3.4.1)$$

$$\delta_{kl} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}_k = v_k \vec{e}_k = v_l \vec{e}_l, \quad \vec{v} \cdot \vec{e}_l = v_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = v_k \delta_{kl} = v_l$$

Spannungsdefinition:

$$\vec{t} = t_k \vec{e}_k \text{ mit } t_k = \sigma_{lk} n_l \quad (3.4.2)$$

Grundgleichungen:

- Kinetik:

$$\text{GGB am differentiellen Volumenelement: } \sigma_{kl,k} + \rho \cdot f_l = 0 \quad (3.4.3)$$

$$\text{kinetische RB: } t_k = \sigma_{lk} n_l = \bar{t}_k \text{ auf } O_t$$

- Kinematik:

$$\text{Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen: } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad \text{in } V \quad (3.4.4)$$

kinematische RB: $u_k = \bar{u}_k$ auf O_u

- Stoffgesetz (HOOKE)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} = C_{klmn} \varepsilon_{mn} \quad (3.4.5)$$

Bilanz:

15 Gleichungen: 3 GGB, 6 Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen, 6 Gleichungen des Stoffgesetzes

15 Unbekannte: $u_k, \sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}$

Zur numerischen Berechnung Überführung in Matrixschreibweise:

Definition der Vektoren:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \mid \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \quad (3.4.6)$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \mid \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13}]^T, \quad \gamma_{kl} = 2\varepsilon_{kl}$$

$$(\rho \underline{f}) = \rho [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$$

$$\underline{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^T$$

$$\underline{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$$

Damit

Spannungsdefinition :

$$\underline{t} = \underline{T} \underline{\sigma}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

Grundgleichungen:

- Kinetik:

$$\text{GGB am differentiellen Volumenelement: } \underline{D}^T \underline{\sigma} + \rho \cdot \underline{f} = \underline{0} \quad (3.4.8)$$

$$\underline{D}^T(\underline{\sigma}) = \begin{bmatrix} (\underline{\sigma})_{,1} & 0 & 0 & (\underline{\sigma})_{,2} & 0 & (\underline{\sigma})_{,3} \\ 0 & (\underline{\sigma})_{,2} & 0 & (\underline{\sigma})_{,1} & (\underline{\sigma})_{,3} & 0 \\ 0 & 0 & (\underline{\sigma})_{,3} & 0 & (\underline{\sigma})_{,2} & (\underline{\sigma})_{,1} \end{bmatrix}$$

$$\text{kinetische RB: } \underline{t} = \underline{T} \underline{\sigma} = \underline{\bar{t}} \quad \text{auf } O_t$$

- Kinematik:

$$\text{Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen: } \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad \text{in } V \quad (3.4.9)$$

$$\text{kinematische RB: } \underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } O_u$$

- Stoffgesetz (HOOKE)

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon} \quad (3.4.10)$$

Sonderfall: ebener Spannungszustand

Definition der Vektoren:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T \quad (3.4.11)$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}]^T, \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

$$(\rho \underline{f}) = \rho [f_1 \quad f_2]^T$$

$$\underline{t} = [t_1 \quad t_2]^T$$

$$\underline{u} = [u_1 \quad u_2]^T$$

Damit

Spannungsdefinition:

$$\underline{t} = \underline{T} \underline{\sigma}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

Grundgleichungen:

- Kinetik:

$$\text{GGB am differentiellen Volumenelement: } \underline{D}^T \underline{\sigma} + \rho \cdot \underline{f} = \underline{0} \quad (3.4.13)$$

$$\underline{D}^T(\underline{u}) = \begin{bmatrix} (\underline{u})_{,1} & 0 & (\underline{u})_{,2} \\ 0 & (\underline{u})_{,2} & (\underline{u})_{,1} \end{bmatrix}$$

$$\text{kinetische RB: } \underline{t} = \underline{T} \underline{\sigma} = \underline{\bar{t}} \quad \text{auf } O_t$$

- Kinematik:

$$\text{Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen: } \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad \text{in } V \quad (3.4.14)$$

$$\text{kinematische RB: } \underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } O_u$$

- Stoffgesetz (HOOKE)

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}, \quad \underline{C} = \underline{C}^T \quad (3.4.15)$$

$$\underline{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} E - \text{Elastizitätsmodul} \\ \nu - \text{Querdehnungszahl} \end{array}$$

$$G = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{Schubmodul}$$

Gesamtfeldproblem (RWA):

Einsetzen (3.4.9) in (3.4.10) in (3.4.8) \Rightarrow 3 gekoppelte partielle Dgl 2. Ordnung in V

$$\underline{D}^T [\underline{C} (\underline{D} \underline{u})] + \rho \underline{f} = \underline{0} \quad (3.4.16)$$

RB auf O_u (3 algebraische Gleichungen)

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad (3.4.17)$$

RB auf O_t (3 gekoppelte partielle Dgl 1. Ordnung)

$$\underline{T} \underline{C} (\underline{D} \underline{u}) = \underline{\bar{t}} \quad (3.4.18)$$

3.4.2 Näherungsweise Lösung

Die RWA (3.4.16) bis (3.4.18) soll (näherungsweise) gelöst werden.

Hier steht \underline{u} wieder für einen Näherungsansatz, der als Spezialfall auch die exakte Lösung enthalten kann.

Starke Form

$$\int_V \underline{w}^T \left[\underline{D}^T (\underline{C} \underline{D} \underline{u}) + \rho \underline{f} \right] dV = 0 \quad (3.4.19)$$

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad O_u$$

$$\underline{T} \underline{C} \underline{D} \underline{u} = \underline{\bar{t}} \quad \text{auf} \quad O_t$$

Die Starke Form ist schwierig anzuwenden, da die Ansatzfunktionen für \underline{u} alle RB erfüllen müssen. Die kinematischen RB auf O_u sind algebraische Gleichungen und bereiten dabei wenige Probleme, aber die kinetischen RB auf O_t sind Dgl und mit den Ansatzfunktionen i.a. nicht zu erfüllen.

Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials (entsprechend 6.6):

$$W = W_i - W_a = \text{Min.} \quad (3.4.20)$$

$$W_i = \int_V \left(\int_{\varepsilon} \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon} \right) dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{C} \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\underline{D} \underline{u})^T \underline{C} (\underline{D} \underline{u}) dV$$

$$W_a = \int_V \rho \underline{f}^T \underline{u} dV + \int_{O_t} \underline{t}^T \underline{u} dO, \quad \int_{O_t} \underline{t}^T \underline{u} dO = \int_{O_t} \underline{\bar{t}}^T \underline{u} dO + \int_{O_u} \underline{t}^T \underline{\bar{u}} dO$$

Die notwendige Bedingung aus (6.6.5) für das Minimum des elastischen Gesamtpotentials stimmt vollständig mit der Formulierung (2.2.1) (für $w=u$) aus der Schwachen Form überein. Die Schwache Form setzt aber in jedem Falle die Existenz und Verwendung von Dgl (1.1) voraus.

Energieprinzipien, im speziellen Falle das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials, sind oft allgemeiner (auch ohne die Kenntnis der Dgl) anwendbar. Deshalb wurde hier die Herleitung aus dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials gewählt.

Übergang zur FEM:

- Diskretisierung des Volumens V und damit der Oberfläche O . V wird in N Finite Elemente (FE) eingeteilt („ V wird mit einem FE-Netz überzogen“). Auf O_t entstehen damit M Oberflächen. Wesentliche RB werden (auf FE-Ebene) nicht erfüllt $\Rightarrow O_t \neq O, O_u = 0$. Vorgabe von wesentlichen RB erfolgt für das Gesamt-FE-Modell.

$$\int_V \dots dV = \sum_{e=1}^N \left(\int_V^e \dots dV \right), \quad V = \sum_{e=1}^N V^e \quad (3.4.21)$$

$$\int_{O_t} \dots dO = \sum_{E=1}^M \left(\int_{O_t}^E \dots dO \right), \quad O_t = \sum_{E=1}^M O_t^E$$

$$W = \sum_{e=1}^N W^e = \text{Min.}, \quad \bar{W} = \bar{W}_i - \bar{W}_a - \text{elastisches Gesamtpotential des Elementes } e$$

- Algebraisierung durch Einführung von Näherungsansätzen für die Verformungen der Elemente.

$$\underline{u}^e = \underline{N}(\underline{x}) \underline{v}^e \quad (3.4.22)$$

\underline{u}^e – Näherungsansatz für die Verformungen des Elementes e

$\underline{N}(\underline{x})$ – Matrix der Formfunktionen von e

\underline{x} – Vektor der lokalen Ortskoordinaten von e

\underline{v}^e – Vektor der Freiwerte des Näherungsansatzes von e

Die Freiwerte des Näherungsansatzes für das Element e sind die Verformungen an den Elementknoten.

Das elastische Gesamtpotential des Elementes e erfüllt keine wesentlichen RB, ist also unabhängig von einer speziellen RWA. Die gesamte Oberfläche des Elementes kann belastet werden. Damit kann das Element, wenn ein Teil seiner Oberfläche zu O_t gehört, die dortigen Bedingungen erfüllen. Zusätzlich zu der Definition in Abbildung 3.19 sind aber auch Einzelkräfte auf O und in V (im Inneren von V) und Flächenlasten in V (an im Inneren von V liegenden Flächen eines FE) zugelassen, denn an jedem Knoten i des Elementes dürfen Einzelkräfte F_i angreifen ($\Rightarrow W_F = \underline{v}^T \underline{F}$). Einzellasten und Flächenlasten im Inneren von V sind in Modellen der Kontinuumsmechanik kaum möglich. Für andere physikalische RWA (z.B. Wärmeleitung oder Akustik) sind das punkt- bzw. flächenförmige Quellen oder Senken, die in der Modellierung durchaus sinnvoll sein können.

In der folgenden Herleitung ((3.4.23) bis (3.4.25)) des elastischen Gesamtpotentials für ein Element e wird der Kopfindex e weggelassen.

$$W = W_i - W_a = \text{Min.} \quad (3.4.23)$$

$$W_i = \int_V \left(\int_{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon} \right) dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{C} \underline{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\underline{D} \underline{u})^T \underline{C} (\underline{D} \underline{u}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left[(\underline{D} \underline{N}(\underline{x}) \underline{v})^T \underline{C} (\underline{D} \underline{N}(\underline{x}) \underline{v}) \right] dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left[\underline{v}^T (\underline{D} \underline{N}(\underline{x}))^T \underline{C} (\underline{D} \underline{N}(\underline{x})) \underline{v} \right] dV$$

$$W_a = \int_V (\rho \underline{f})^T \underline{u} dV + \int_O \underline{t}^T \underline{u}_O dO + W_F$$

$$= \int_V (\rho \underline{f})^T (\underline{N}(\underline{x}) \underline{v}) dV + \int_O \underline{t}^T (\underline{N}(\underline{x}_O) \underline{v}) dO + W_F, \quad W_F = \sum v_i F_i = \underline{v}^T \underline{F}$$

$$= \int_V \underline{v}^T \underline{N}(\underline{x})^T (\rho \underline{f}) dV + \int_O \underline{v}^T \underline{N}(\underline{x}_O)^T \underline{t} dO + \underline{v}^T \underline{F}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \underline{v}^T} = \underline{0} = \int_V \left[(\underline{D} \underline{N}(\underline{x}))^T \underline{C} (\underline{D} \underline{N}(\underline{x})) \underline{v} \right] dV +$$

$$- \int_V \underline{N}(\underline{x})^T (\rho \underline{f}) dV - \int_O \underline{N}(\underline{x}_O)^T \underline{t} dO - \underline{F}$$

Der Näherungsansatz für das Element e erfüllt keine wesentlichen RB auf der Oberfläche O des Elementes e . Deshalb gilt für die Oberfläche des Elementes e : $O=O_t$, $O_u=0$. In der zu (3.4.20) zusätzlichen Endwertarbeit W_F an den Knoten i ist entweder die Verformung v_i vorgegeben (Kraftgröße F_i ist unbekannt) oder die Kraftgröße F_i ist vorgegeben (Verformung v_i ist unbekannt).

In (3.4.23) ist die FE-Formulierung für ein Element in den lokalen Elementkoordinaten

$$\underline{K}_{\text{lok}} \underline{v}_{\text{lok}} - \underline{p}_{\text{lok}} - \underline{f}_{\text{lok}} = \underline{0} \quad (3.4.24)$$

$$\underline{K}_{\text{lok}} = \int_V (\underline{D} \underline{N}(\underline{x}))^T \underline{C} (\underline{D} \underline{N}(\underline{x})) dV - \text{Steifigkeitsmatrix}$$

$$\underline{v}_{\text{lok}} = \underline{v} - \text{Vektor der Freiwerte des Näherungsansatzes}$$

$$\underline{p}_{\text{lok}} = \int_V \underline{N}(\underline{x})^T (\rho \underline{f}) dV + \int_O \underline{N}(\underline{x}_O)^T \underline{t} dO, \quad \underline{x}_O - \text{Ortskoord. auf Rand } O$$

- Vektor der (bekannten) äquivalenten Knotenlasten

$$\underline{f}_{\text{lok}} = \underline{F} - \text{Vektor der zu } \underline{v}_{\text{lok}} \text{ arbeitskonjugierten Knotenlasten}$$

Zur Assemblierung des Gesamtmodells muss noch mit der Transformationsmatrix \underline{T} eine Transformation in die globale Koordinatenbasis des Systems durchgeführt werden

$$\underline{f}_{\text{lok}} = \underline{K}_{\text{lok}} \cdot \underline{v}_{\text{lok}} - \underline{p}_{\text{lok}} \quad \Rightarrow \quad \underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{v} - \underline{p} \quad (3.4.25)$$

$$\underline{K} = \underline{T} \cdot \underline{K}_{\text{lok}} \cdot \underline{T}^T$$

$$\underline{f} = \underline{T} \cdot \underline{f}_{\text{lok}}, \quad \underline{v}_{\text{lok}} = \underline{T}^T \cdot \underline{v}, \quad \underline{p} = \underline{T} \cdot \underline{p}_{\text{lok}}$$

	0	. . .	M
1	GK ₁₁	. . .	GK _{1M}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
N	GK _{N1}	. . .	GK _{NM}

Mit der Wahl der Elemente in V ist die Lage der globalen Knoten GK des FE-Netzes festgelegt. Diese werden nummeriert.

N -Anzahl der Elemente,

$(M+1)$ -(Anzahl der Knoten)/Element.

GK_{nm}-globale Knotennummer des m -ten Knotens am n -ten Element, $n=1,2,\dots,N$, $m=0,1,\dots,M$.

Abbildung 3.20: *Koinzidenzmatrix*

Danach lässt sich die Koinzidenzmatrix angeben.

Entsprechend (3.4.21) und (3.4.23) (wieder mit Kopindex e für das FE-Element e in globalen Koordinaten) ist

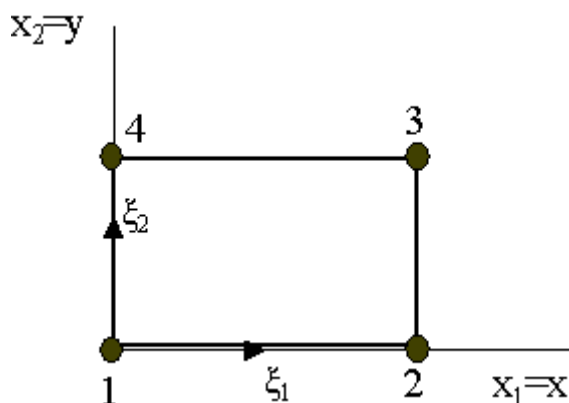
$$W = \sum_{e=1}^N W^e = \text{Min.} \quad \text{mit} \quad \underline{f}^e = \underline{K}^e \cdot \underline{v}^e - \underline{p}^e \quad \text{aus} \quad \frac{\partial W^e}{\partial \underline{v}^e} = \underline{0} \quad , \quad e = 1, \dots, N \quad (3.4.26)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{v} - \underline{p} \quad \text{aus} \quad \frac{\partial W}{\partial \underline{v}^T} = \underline{0}$$

Aus der Koinzidenzmatrix ergibt sich die Anordnung der Koordinaten der Elementvektoren $\underline{f}^e, \underline{v}^e, \underline{p}^e$ in den globalen Vektoren $\underline{f}, \underline{v}, \underline{p}$ des Gesamtsystems und der Element-Stifigkeitsmatrix \underline{K}^e in der globalen Stifigkeitsmatrix \underline{K} des Gesamtsystems. Sie werden dementsprechend (analog zu (3.1.21), (3.3.14)) aufsummiert.

3.4.3 4-Knoten-Rechteck-Scheiben-FE

4-Knoten-Rechteck-(Scheiben-)Element (ebener Spannungszustand)



$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq a \\ 0 &\leq x_2 \leq b \\ \xi_1 &= \frac{x}{a}, \quad \xi_2 = \frac{y}{b} \\ \xi_1, \xi_2 &\in [0, 1] \\ \text{Dicke } h \end{aligned}$$

Abbildung 3.21: *4-Knoten-Rechteck-(Scheiben-)Element*

Formfunktionen

$$g_0(\xi) = 1 - \xi, \quad g_1(\xi) = \xi \quad (3.4.27)$$

$$f_1(\xi_k) = g_0(\xi_1) \cdot g_0(\xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$f_2(\xi_k) = g_1(\xi_1) \cdot g_0(\xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)$$

$$f_3(\xi_k) = g_1(\xi_1) \cdot g_1(\xi_2) = \xi_1 \xi_2$$

$$f_4(\xi_k) = g_0(\xi_1) \cdot g_1(\xi_2) = (1 - \xi_1) \xi_2$$

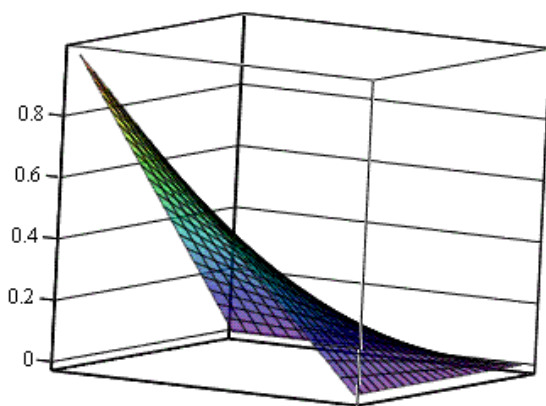
Ansatzfunktionen des FE e, Matrix der Formfunktionen $\underline{N}(\underline{x})$

$$\underline{u}^e(\xi_k) = \begin{bmatrix} u_x^e(\xi_k) \\ u_y^e(\xi_k) \end{bmatrix} = \underline{N}(\xi_k) \cdot \underline{v}^e \quad (3.4.28)$$

$$\underline{N}(\xi_k) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_4 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}^e = \begin{bmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} & v_{x3} & v_{y3} & v_{x4} & v_{y4} \end{bmatrix}^T$$

Formfunktion 4K-Rechteckelement



Eine der Formfunktionen für ein 4Knoten-Rechteck-FE ist in Abbildung 3.22 dargestellt (Regelfläche). Die Ränder sind geradlinig begrenzt aber die Fläche ist gekrümmt. Die Formfunktion hat an einem Knoten den Wert 1 und an den drei anderen Knoten den Wert 0.

Abbildung 3.22: Formfunktion für 4Knoten-FE

Verzerrungen

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}}^e = \underline{\underline{DN}} \underline{\underline{v}}^e \quad (3.4.29)$$

$$\underline{\underline{DN}} = \begin{bmatrix} f_{1,x} & 0 & f_{2,x} & 0 & f_{3,x} & 0 & f_{4,x} & 0 \\ 0 & f_{1,y} & 0 & f_{2,y} & 0 & f_{3,y} & 0 & f_{4,y} \\ f_{1,y} & f_{1,x} & f_{2,y} & f_{2,x} & f_{3,y} & f_{3,x} & f_{4,y} & f_{4,x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{(1-\xi_2)}{a} & 0 & \frac{(1-\xi_2)}{a} & 0 & \frac{\xi_2}{a} & 0 & -\frac{\xi_2}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\xi_1)}{b} & 0 & -\frac{\xi_1}{b} & 0 & \frac{\xi_1}{b} & 0 & \frac{(1-\xi_1)}{b} \\ -\frac{(1-\xi_1)}{b} & -\frac{(1-\xi_2)}{a} & -\frac{\xi_1}{b} & \frac{(1-\xi_2)}{a} & \frac{\xi_1}{b} & \frac{\xi_2}{a} & \frac{(1-\xi_1)}{b} & -\frac{\xi_2}{a} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix

$$\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{\underline{v}}^e - \underline{\underline{p}}^e \quad (3.4.30)$$

$$\underline{\underline{K}}^e = a \cdot b \cdot h \int_0^1 \int_0^1 (\underline{\underline{DN}})^T \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{DN}}) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{Eh}{24(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \underline{\underline{K}}_{12}^e \\ \underline{\underline{K}}_{21}^e & \underline{\underline{K}}_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{22}^e = \underline{\underline{K}}_{11}^e, \quad \underline{\underline{K}}_{21}^e = \underline{\underline{K}}_{12}^{eT}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a}$$

Die tiefgestellten Indizes 1 und 2 der Teilmatrizen der Steifigkeitsmatrix in (3.4.30) geben lediglich die Zuordnung zu (3.4.31) an und haben keinen Bezug zu Knotennummern.

Die Koordinaten des Vektors der äquivalenten Knotenlasten $\underline{\underline{p}}^e$ ergeben sich aus den Volumenintegralen der Massenkkräfte und aus den Randintegralen der Flächenlasten auf den Rändern des FE und sind für verschwindende Massenkkräfte und Randflächenlasten Null. Die Teilmatrizen der Steifigkeitsmatrix aus (3.4.30) sind

$$\begin{aligned}
 {}^e \underline{\underline{K}}_{11} &= \begin{bmatrix} 8\beta + 4\alpha(1-\nu) & 3(1+\nu) & -8\beta + 2\alpha(1-\nu) & -3(1-3\nu) \\ 3(1+\nu) & 8\alpha + 4\beta(1-\nu) & 3(1-3\nu) & 4\alpha - 4\beta(1-\nu) \\ -8\beta + 2\alpha(1-\nu) & 3(1-3\nu) & 8\beta + 4\alpha(1-\nu) & -3(1+\nu) \\ -3(1-3\nu) & 4\alpha - 4\beta(1-\nu) & -3(1+\nu) & 8\alpha + 4\beta(1-\nu) \end{bmatrix} \\
 {}^e \underline{\underline{K}}_{12} &= \begin{bmatrix} -4\beta - 2\alpha(1-\nu) & -3(1+\nu) & 4\beta - 4\alpha(1-\nu) & 3(1-3\nu) \\ -3(1+\nu) & -4\alpha - 2\beta(1-\nu) & -3(1-3\nu) & -8\alpha + 2\beta(1-\nu) \\ 4\beta - 4\alpha(1-\nu) & -3(1-3\nu) & -4\beta - 2\alpha(1-\nu) & 3(1+\nu) \\ 3(1-3\nu) & -8\alpha + 2\beta(1-\nu) & 3(1+\nu) & -4\alpha - 2\beta(1-\nu) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

3.4.4 Beispiel: Rechteckscheibe mit Randlast

In Abbildung 3.23 ist das Modell einer Rechteckscheibe dargestellt. Sie ist in 8x12 gleiche, quadratische FE diskretisiert. Die Ränder oben und rechts sind Symmetrieränder, d.h. oben gilt $v_y=0$, $F_x=0$, rechts gilt entsprechend $F_y=0$, $v_x=0$. Die Ränder unten und links sind ohne Verformungsvorgabe. Auf 7/8 des unteren Randes wird eine Flächenlast p_y eingelegt. Alle physikalischen Größen sind mit N und mm dimensionslos gemacht.

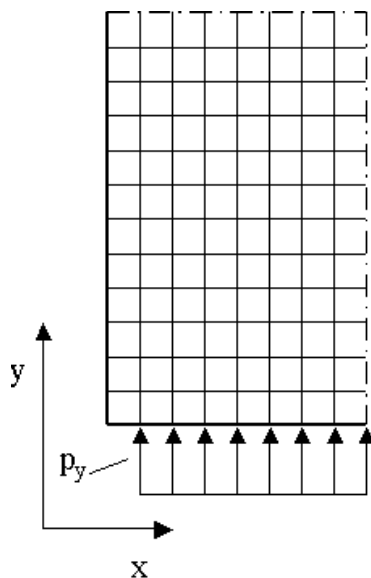


Abbildung 3.23: Rechteckscheibe

Scheibenabmessung: $L_x=2000$, $L_y=3000$, $h=10$

FE-Abmessung: $250 \times 250 \times h$

Materialwerte: $E=200$, $\nu=0.3$

Belastung: $p_y=0.1$

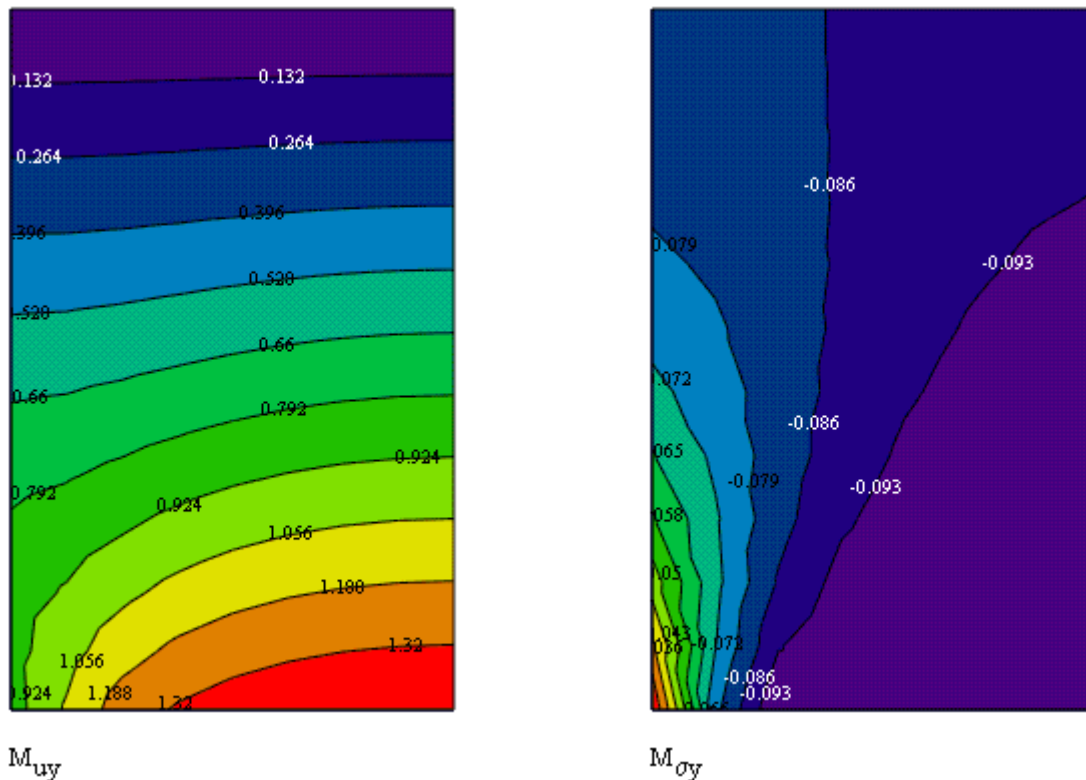
In Abbildung 3.24 sind die Knotenkräfte F_x in x- und F_y in y-Richtung angegeben, am unteren Rand die eingelegten Kräfte in Richtung y (äquivalente Knotenlasten) und am oberen bzw. rechten Rand die Reaktionskräfte in Richtung y bzw. x. Ihre Summe ist jeweils

gleich Null. Damit sind die Kräfte-GGB in x- und y-Richtung erfüllt. Natürlich ist auch jede Momenten-GGB senkrecht zur Modellebene erfüllt.

Abbildung 3.25 zeigt auf der linken Seite die vertikale Verschiebung u_y , mit der maximalen Verschiebung $u_{y\max}=1.45$ an der rechten unteren Ecke. Auf der rechten Seite von Abbildung 3.25 ist die Normalspannung σ_y , mit $|\sigma_y|=p_y=0.1$ im rechten Bereich des unteren Randes. Die Spannungsberechnung erfolgte nach der Lösung des FE-Problems aus den Verschiebungsableitungen über das Materialgesetz. Dabei sind die Spannungen in den Elementmitten berechnet worden. An den Knoten entstehen, entsprechend des Näherungscharakters der FEM, Diskontinuitäten des Spannungszustandes. Zur farblichen Darstellung sind die Werte zwischen den Ergebnispunkten interpoliert.

$$\begin{matrix}
 F_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24.52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40.49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26.16 \end{pmatrix} & F_y = \begin{pmatrix} -104.66 & -209.38 & -211.29 & -214.69 & -218.75 & -222.71 & -225.98 & -228.11 & -114.43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 125 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Abbildung 3.24: Knotenkräfte in x- und y-Richtung


 Abbildung 3.25: Verschiebung u_y und Spannung σ_y

Es stellt sich ein nahezu homogener Spannungszustand mit $|\sigma_y| \approx \frac{7}{8} p_y = 0.0875$ ein. Der homogene Spannungszustand gehört zu einem Modell, bei dem der gesamte untere

re Rand mit $\tilde{p}_y = \frac{7}{8}p_y = 0.0875$ belastet ist. Die zu diesem homogenen Spannungszustand gehörige vertikale Verschiebung des unteren Randes ist $u_y = \frac{|\sigma_y|}{E} L_y = 1.3125$.

3.4.5 Schiefwinklige (krummlinige) FE

Bei vielen Modellen ist es nicht möglich, die Geometrie des Gebietes genau genug durch Rechteck-FE darzustellen. Abbildung 3.26 (aus ¹⁾) enthält zwei derartige (sehr grob vernetzte) Beispiele.

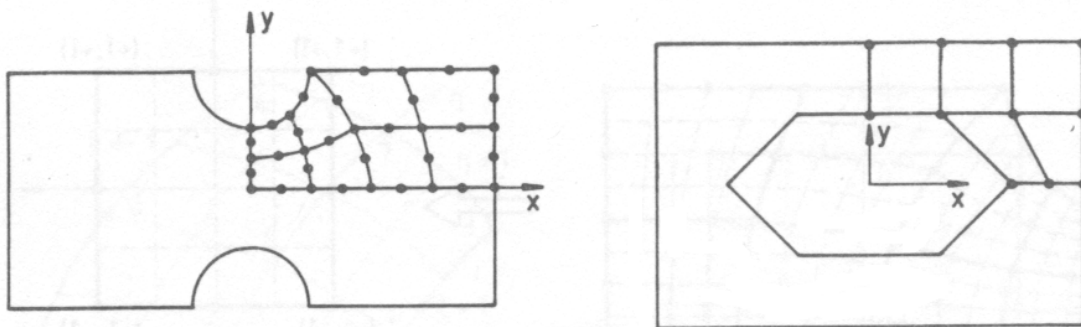


Abbildung 3.26: Modelle mit krummlinigen, schiefwinkligen FE

Auf den Rändern angrenzender FE muss C^0 -Stetigkeit (identische Verformungen) herrschen. Das ist nur möglich, wenn die Ränder Koordinatenlinien lokaler FE-Koordinaten sind. Um diese Forderung für allgemein berandete Viereck-FE zu erfüllen, wird die Geometrie des Originalbereiches des FE in den Bildbereich eines Einheitsquadrates abgebildet.

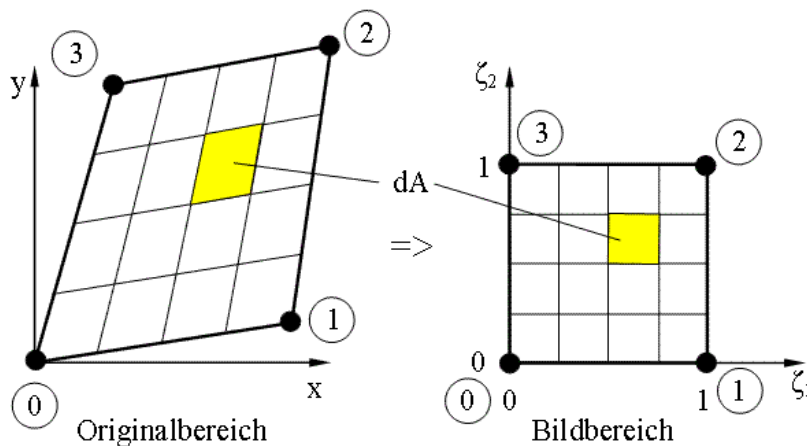


Abbildung 3.27: FE, Original- und Bildbereich

Für die Abbildungsfunktionen der Geometrie werden Ansätze nach (3.4.32) gewählt. Die Abbildung muss eindeutig sein, d.h. jedem Koordinatenpaar x, y im Originalbereich ist eindeutig ein Koordinatenpaar ζ_1, ζ_2 im Bildbereich zugeordnet, ist aber i.a. nicht eineindeutig, d.h. nicht analytisch umkehrbar.

$$\mathbf{x}(\zeta_k) = \sum_{i=0}^n \mathbf{g}_i(\zeta_k) x_i = \underline{\mathbf{g}}^T \underline{\mathbf{x}}, \quad i - \text{Geometrie-Knoten-Nummer des FE} \quad (3.4.32)$$

$$\mathbf{y}(\zeta_k) = \sum_{i=0}^n \mathbf{g}_i(\zeta_k) y_i = \underline{\mathbf{g}}^T \underline{\mathbf{y}}, \quad \zeta_k = \zeta_1, \zeta_2$$

Man muss (3.4.32) nicht zwingend als Abbildung des Original- in den Bildbereich interpretieren. Es ist mathematisch lediglich eine Parameterdarstellung für $\mathbf{y}(\mathbf{x})$.

Die Verschiebungsansätze werden im Bildbereich formuliert.

$$u_x(\zeta_k) = \sum_{j=0}^m h_j(\zeta_k) u_j = \underline{\mathbf{h}}^T \underline{\mathbf{u}}_x, \quad j - \text{Knoten-Nummer des FE} \quad (3.4.33)$$

$$u_y(\zeta_k) = \sum_{j=0}^m h_j(\zeta_k) v_j = \underline{\mathbf{h}}^T \underline{\mathbf{u}}_y$$

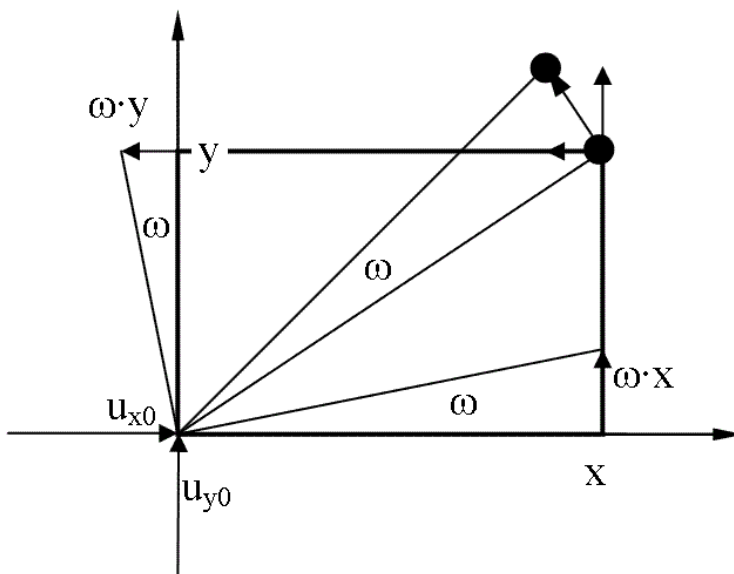


Abbildung 3.28: Starrkörperbewegungen

Aus Abbildung 3.28 ergibt sich bei einer Starrkörperbewegung

$$u_x = u_{x0} - \omega \cdot y, \quad |\omega| \ll 1 \quad (3.4.34)$$

$$u_y = u_{y0} + \omega \cdot x$$

Wenn man für die Verschiebungen vollständige Polynome 1.Ordnung ansetzt, ergibt sich ein konstanter Verzerrungszustand und (3.4.34) ist außerdem erfüllt.

$n+1$ Anzahl der Knoten zur Geometriebeschreibung des FE

$m+1$ Anzahl der Knoten für die Verformungsansätze des FE

Notwendige Bedingungen an ein FE:

- Starrkörperbewegungen (beliebige Verschiebung, kleine Verdrehung) ergeben keine Verzerrungen
- Ein über das FE konstanter Verzerrungszustand muss sich abbilden lassen.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a_0 + a_1 x + a_2 y \\ u_y &= b_0 + b_1 x + b_2 y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{x,x} = a_1 \\ \varepsilon_{yy} = u_{y,y} = b_2 \\ \gamma_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} = a_2 + b_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{konstanter} \\ \text{Verzerrungszustand} \end{array} \quad (3.4.35)$$

Starrkörperbewegung:

$$a_0 = u_{x0}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\omega$$

$$b_0 = u_{y0}, \quad b_1 = \omega, \quad b_2 = 0$$

Die Verschiebungsansätze (3.4.33) und die Geometriebeschreibung (3.4.32) eingesetzt in (3.4.35) für u_x (analog für u_y)

$$\sum_{j=0}^m [h_j(\zeta_k) \cdot (a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j)] = a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n g_i(\zeta_k) x_i + a_2 \sum_{i=0}^n g_i(\zeta_k) y_i \quad (3.4.36)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$1) \quad a_0 : \sum_{j=0}^m [h_j(\zeta_k)] = 1 \quad (3.4.37)$$

$$2) \quad a_1 : \sum_{j=0}^m [h_j(\zeta_k) \cdot x_j] = \sum_{i=0}^n [g_i(\zeta_k) \cdot x_i]$$

$$3) \quad a_2 : \sum_{j=0}^m [h_j(\zeta_k) \cdot y_j] = \sum_{i=0}^n [g_i(\zeta_k) \cdot y_i]$$

Bedingung 1) ist immer erfüllt, wenn die Formfunktionen $h_j(\zeta_k)$ der Verformungsansätze Lagrangesche Interpolationspolynome sind

- isoparametrische Ansätze: $m=n$, $h_i=g_i \Rightarrow$ 2) und 3) immer erfüllt
- subparametrische Ansätze: $n < m \Rightarrow$ 2) und 3) erfüllt, wenn $g_i(\zeta_k)$, $i=0 \dots n$, sich als Linearkombination der $h_j(\zeta_k)$, $j=0 \dots m$, ausdrücken lassen
- superparametrische Ansätze: $n > m \Rightarrow$ 2) und 3) i.a. nicht erfüllt. Deshalb sind FE mit superparametrischen Ansätzen i.a. abzulehnen.

Diese Aussagen gelten natürlich auch für den 1D-Fall der Stab-FE aus 3.1. Das 2-Knoten-Stabelement ist isoparametrisch

$$x(\mu) = \sum_{i=0}^1 g_i(\mu) \cdot x_i \quad (3.4.38)$$

$$u(\mu) = \sum_{j=0}^1 h_j(\mu) \cdot u_j$$

$$h_0(\mu) = g_0(\mu) = 1 - \mu, \quad h_1(\mu) = g_1(\mu) = \mu$$

und das 3-Knoten-Stabelement ist subparametrisch, denn die $g_i(\zeta_k)$ ($i=0,1$) lassen sich aus Linearkombination der $h_j(\zeta_k)$ ($j=0,1,2$) ausdrücken

$$x(\mu) = \sum_{i=0}^1 g_i(\mu) \cdot x_i \quad (3.4.39)$$

$$u(\mu) = \sum_{j=0}^2 h_j(\mu) \cdot u_j$$

$$h_0(\mu) = 2 \cdot (1-\mu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \mu\right), \quad h_1(\mu) = 4 \cdot \mu \cdot (1-\mu), \quad h_2(\mu) = -2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{2} - \mu\right)$$

$$\underline{h}(\mu) = \begin{pmatrix} h_0(\mu) \\ h_1(\mu) \\ h_2(\mu) \end{pmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} \cdot \underline{h}(\mu) = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0(\mu) \\ g_1(\mu) \end{pmatrix}$$

Die Steifigkeitsmatrix wird im Bildbereich berechnet

$$\underline{K} = \int_A [\underline{DN}(\zeta_k)]^T \underline{C} [\underline{DN}(\zeta_k)] \cdot dA(\zeta_k) \quad (3.4.40)$$

Dazu ist es notwendig die Matrix der Differentialoperatoren $\underline{D}(\)$, das Differential dA der Fläche und für die RB das Differential ds des Randes in den Bildbereich zu transformieren.

$$\underline{D}(\) = \begin{bmatrix} (\)_{,x} & 0 \\ 0 & (\)_{,y} \\ (\)_{,y} & (\)_{,x} \end{bmatrix}, \quad (\)_{,x} = \frac{\partial(\)}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \zeta_{k,x} \frac{\partial(\)}{\partial \zeta_k} \quad (3.4.41)$$

$$(\)_{,y} = \frac{\partial(\)}{\partial y} = \sum_{k=1}^2 \zeta_{k,y} \frac{\partial(\)}{\partial \zeta_k}$$

Die partiellen Ableitungen $\zeta_{k,x}$ und $\zeta_{k,y}$ sind i.a. nicht bekannt, da (3.4.32) i.a. nicht analytisch umkehrbar ist.

$$\begin{aligned} (\)_{,\zeta_1} &= (\)_{,x} x_{,\zeta_1} + (\)_{,y} y_{,\zeta_1} \\ (\)_{,\zeta_2} &= (\)_{,x} x_{,\zeta_2} + (\)_{,y} y_{,\zeta_2} \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

Mittels der aus (3.4.42) folgenden Jacobi-Matrix $\underline{J}(\zeta_k)$ in (3.4.43), deren Elemente aus (3.4.32) bekannt sind, lassen sich die notwendigen Ableitungen in (3.4.41) berechnen.

$$\begin{pmatrix} ()_{,\zeta_1} \\ ()_{,\zeta_2} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{J}}(\zeta_k) \begin{pmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{J}}(\zeta_k) = \begin{bmatrix} x_{,\zeta_1} & y_{,\zeta_1} \\ x_{,\zeta_2} & y_{,\zeta_2} \end{bmatrix} \quad (3.4.43)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{J}}^{-1}(\zeta_k) \begin{pmatrix} ()_{,\zeta_1} \\ ()_{,\zeta_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{J}}^{-1}(\zeta_k) = \frac{1}{|\underline{\mathbf{J}}(\zeta_k)|} \begin{bmatrix} y_{,\zeta_2} & -y_{,\zeta_1} \\ -x_{,\zeta_2} & x_{,\zeta_1} \end{bmatrix}, \quad |\underline{\mathbf{J}}(\zeta_k)| = x_{,\zeta_1} y_{,\zeta_2} - x_{,\zeta_2} y_{,\zeta_1}$$

$$()_{,x} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{J}}(\zeta_k)|} [y_{,\zeta_2} ()_{,\zeta_1} - y_{,\zeta_1} ()_{,\zeta_2}]$$

$$()_{,y} = \frac{1}{|\underline{\mathbf{J}}(\zeta_k)|} [-x_{,\zeta_2} ()_{,\zeta_1} + x_{,\zeta_1} ()_{,\zeta_2}]$$

Die Vektoren der Koordinaten-Differentiale spannen nach Abbildung 3.29 im Originalbereich das Parallelogramm des Flächenelementes $dA(\zeta_k)$ auf.

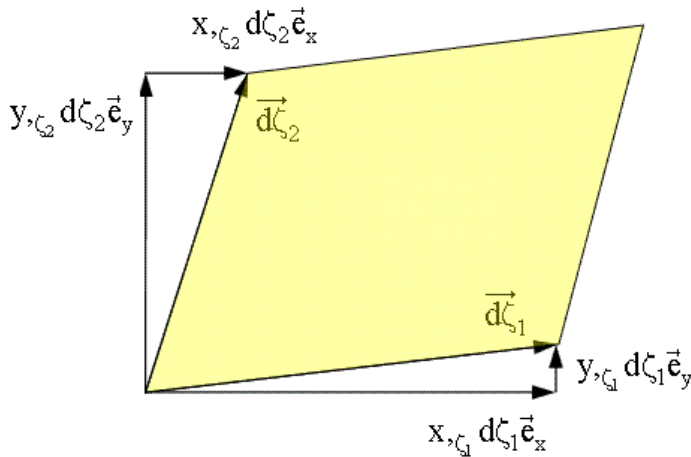


Abbildung 3.29: Flächenelement $dA(\zeta_k)$

Dessen Größe ergibt sich aus (3.4.44) über den Betrag des Kreuzproduktes der Vektoren der Koordinaten-Differentiale.

$$dA(\zeta_k) \cdot \vec{e}_z = \vec{d\zeta_1} \times \vec{d\zeta_2}, \quad \vec{e}_m \text{ - kartesische Einheitsvektoren, } m=x,y,z \quad (3.4.44)$$

$$\vec{d\zeta_k} = x_{,\zeta_k} d\zeta_k \vec{e}_x + y_{,\zeta_k} d\zeta_k \vec{e}_y, \quad k=1,2$$

$$\text{mit } \vec{e}_{,x} \times \vec{e}_{,x} = \vec{e}_{,y} \times \vec{e}_{,y} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{,x} \times \vec{e}_{,y} = -\vec{e}_{,y} \times \vec{e}_{,x} = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow dA(\zeta_k) = |\underline{\mathbf{J}}(\zeta_k)| d\zeta_1 d\zeta_2$$

Der Rand eines FE liegt immer auf einer Koordinatenlinie $s(\zeta_1=\zeta, \zeta_2=\zeta_R)$ oder $s(\zeta_1=\zeta_R, \zeta_2=\zeta)$ mit $\zeta \in [0,1]$, $\zeta_R=0,1$. Aus Abbildung 3.29 ist abzulesen

$$ds(\zeta) = |\vec{d\zeta}| = \sqrt{(x_{,\zeta} d\zeta)^2 + (y_{,\zeta} d\zeta)^2} = \sqrt{(x_{,\zeta})^2 + (y_{,\zeta})^2} d\zeta \quad (3.4.45)$$

$\zeta = \zeta_1 \text{ oder } \zeta_2$

Mit diesen Transformationen ist die FE-Formulierung im Bildbereich

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{u} - \underline{p}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} \underline{f}_x \\ \underline{f}_y \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_x \\ \underline{u}_y \end{pmatrix}, \quad \underline{N}(\zeta_k) = \begin{bmatrix} \underline{h}^T(\zeta_k) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{h}^T(\zeta_k) \end{bmatrix} \quad (3.4.46)$$

$$\underline{K} = \int_0^1 \int_0^1 [\underline{DN}(\zeta_k)]^T \underline{C} [\underline{DN}(\zeta_k)] |\underline{J}(\zeta_k)| d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$\underline{p} = \int_0^1 \int_0^1 \underline{N}^T(\zeta_k) \begin{pmatrix} \underline{p}_x \\ \underline{p}_y \end{pmatrix} |\underline{J}(\zeta_k)| d\zeta_1 d\zeta_2$$

$$+ \sum_{R=0}^3 \int_0^1 [\underline{N}^T(\zeta_k)]_R \begin{pmatrix} \underline{q}_x \\ \underline{q}_y \end{pmatrix} \left(\sqrt{(x_{,\zeta})^2 + (y_{,\zeta})^2} \right)_R d\zeta$$

Für die Randintegrale mit den Randbelastungen \underline{q}_x und \underline{q}_y [N/m] gilt

R =	
0	$\zeta = \zeta_1 \quad \zeta_2 = 0$
1	$\zeta = \zeta_2 \quad \zeta_1 = 1$
2	$\zeta = \zeta_1 \quad \zeta_2 = 1$
3	$\zeta = \zeta_2 \quad \zeta_1 = 0$

(3.4.47)

In (3.4.46) sind die Ansatzfreiwerte in \underline{u} nach x- und y-Richtung sortiert. Das ist vorteilhaft zur Darstellung der Matrix der Formfunktionen \underline{N} und zur numerischen Integration. Vor dem Einbau der Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K} in die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems ist es sinnvoll noch durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen eine Umordnung nach Knotennummern durchzuführen.

3.4.6 4-Knoten-Schiefwinkliges-Scheiben-FE

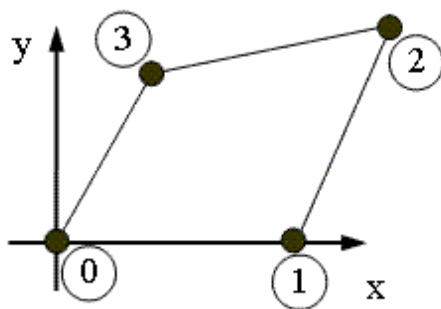


Abbildung 3.30: 4K-Element

Es wird die Steifigkeitsmatrix für ein allgemeines, isoparametrisches 4-Knoten-Scheibenelement nach Abbildung 3.30 hergeleitet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt der Knoten 0 im Ursprung des lokalen kartesischen x,y -Systems und der Knoten 1 auf der x -Achse.

Die Formfunktionen in (3.4.48) sind Produkte aus linearen Lagrangeschen Interpolationspolynomen. Diese sind (im Bildbereich) identisch mit denen aus 3.4.3 für das 4-Knoten-Rechteck-FE

$$\begin{aligned}
f_0(\zeta) &= 1 - \zeta, \quad f_1(\zeta) = \zeta \\
h_0(\zeta_k) &= f_0(\zeta_1) \cdot f_0(\zeta_2) = (1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) \\
h_1(\zeta_k) &= f_1(\zeta_1) \cdot f_0(\zeta_2) = \zeta_1(1 - \zeta_2) \\
h_2(\zeta_k) &= f_1(\zeta_1) \cdot f_1(\zeta_2) = \zeta_1\zeta_2 \\
h_3(\zeta_k) &= f_0(\zeta_1) \cdot f_1(\zeta_2) = (1 - \zeta_1)\zeta_2
\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Mit diesen Formfunktionen ergeben sich die Parameterdarstellung der Geometrie und die Verschiebungsansätze (3.4.49)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(\zeta_k) &= \underline{\mathbf{h}}(\zeta_k) \cdot (\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3)^T, \quad \underline{\mathbf{h}}(\zeta_k) = (\mathbf{h}_0 \quad \mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3)^T \\
\mathbf{y}(\zeta_k) &= \underline{\mathbf{h}}(\zeta_k) \cdot (\mathbf{y}_0 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{y}_3)^T \\
\underline{\mathbf{u}}(\zeta_k) &= \begin{bmatrix} u_x(\zeta_k) \\ u_y(\zeta_k) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{N}}(\zeta_k) \cdot \underline{\mathbf{v}} \\
\underline{\mathbf{N}}(\zeta_k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 & 0 & \mathbf{h}_1 & 0 & \mathbf{h}_2 & 0 & \mathbf{h}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_0 & 0 & \mathbf{h}_1 & 0 & \mathbf{h}_2 & 0 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} \\
\underline{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} & v_{x3} & v_{y3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.49}$$

Mit $x_0=y_0=y_1=0$ wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(\zeta_k) &= \zeta_1(1 - \zeta_2)\mathbf{x}_1 + \zeta_1\zeta_2\mathbf{x}_2 + (1 - \zeta_1)\zeta_2\mathbf{x}_3 \\
\mathbf{y}(\zeta_k) &= \zeta_1\zeta_2\mathbf{y}_2 + (1 - \zeta_1)\zeta_2\mathbf{y}_3 \\
x_{,\zeta_1}(\zeta_k) &= (1 - \zeta_2)\mathbf{x}_1 + \zeta_2\mathbf{x}_2 - \zeta_2\mathbf{x}_3 \\
y_{,\zeta_1}(\zeta_k) &= \zeta_2\mathbf{y}_2 - \zeta_2\mathbf{y}_3 \\
x_{,\zeta_2}(\zeta_k) &= -\zeta_1\mathbf{x}_1 + \zeta_1\mathbf{x}_2 + (1 - \zeta_1)\mathbf{x}_3 \\
y_{,\zeta_2}(\zeta_k) &= \zeta_1\mathbf{y}_2 + (1 - \zeta_1)\mathbf{y}_3 \\
|J(\zeta_k)| &= x_{,\zeta_1} y_{,\zeta_2} - x_{,\zeta_2} y_{,\zeta_1} = x_1 y_3 + x_1(y_2 - y_3)\zeta_1 + [y_3(x_2 - x_1) - x_3 y_2]\zeta_2
\end{aligned} \tag{3.4.50}$$

Mit (3.4.50) können die partiellen Ableitungen nach \mathbf{x} und \mathbf{y} in der Matrix der Differentialoperatoren $\underline{\mathbf{D}}(\)$ entsprechend (3.4.43) gebildet werden. Spätestens ab hier ist es sinnvoll die weitere Rechnung ausschließlich numerisch durchzuführen.

Beispiel: Mit $\mathbf{x}_k = (0 \quad 1 \quad 1.2 \quad 0.4)^T$, $\mathbf{y}_k = (0 \quad 0 \quad 0.9 \quad 0.7)^T$, $E=2$, $\nu=0.3$, $h=1$ wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Integriert wurde mit 3x3 Stützstellen (siehe 3.6). Eine Integration mit 4x4 Stützstellen ergab keine Abweichungen bei den angegebenen Ziffern.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.746 & 0.159 & -0.482 & 0.092 & -0.227 & -0.278 & -0.038 & 0.027 \\ 0.159 & 0.723 & 0.146 & 0.186 & -0.278 & -0.115 & -0.028 & -0.794 \\ -0.482 & 0.146 & 1.174 & -0.588 & 0.115 & -0.063 & -0.807 & 0.504 \\ 0.092 & 0.186 & -0.588 & 1.522 & -7.575 \times 10^{-3} & -0.616 & 0.504 & -1.092 \\ -0.227 & -0.278 & 0.115 & -7.575 \times 10^{-3} & 0.762 & 0.155 & -0.65 & 0.13 \\ -0.278 & -0.115 & -0.063 & -0.616 & 0.155 & 0.741 & 0.185 & -0.011 \\ -0.038 & -0.028 & -0.807 & 0.504 & -0.65 & 0.185 & 1.495 & -0.662 \\ 0.027 & -0.794 & 0.504 & -1.092 & 0.13 & -0.011 & -0.662 & 1.897 \end{pmatrix} \quad (3.4.51)$$

Die Überprüfung der Starrkörperbewegung mit beliebigen Verschiebungen v_{xst} , v_{yst} und einer beliebigen Verdrehung ω_{st} ergibt als notwendige Bedingung den Nullvektor.

$$\underline{u}_x = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T v_{xst} \quad (3.4.52)$$

$$\underline{u}_y = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)^T v_{yst}$$

$$\underline{u}_\omega = (-y_0 \ x_0 \ -y_1 \ x_1 \ -y_2 \ x_2 \ -y_3 \ x_3)^T \omega_{st}$$

$$\mathbf{K} \cdot \underline{u}_{st} = \underline{0}, \quad \underline{u}_{st} = \underline{u}_x + \underline{u}_y + \underline{u}_\omega$$

Außerdem ist mit Vorgabe von entsprechenden Knoten-Geometrie-Koordinaten überprüft worden, dass der Spezialfall des 4-Knoten-Rechteck-FE aus 3.4.3 enthalten ist.

3.4.7 9-Knoten-Scheiben-FE

In Abbildung 3.31 ist ein 9-Knoten-Element skizziert. Die Formfunktionen in (3.4.53)

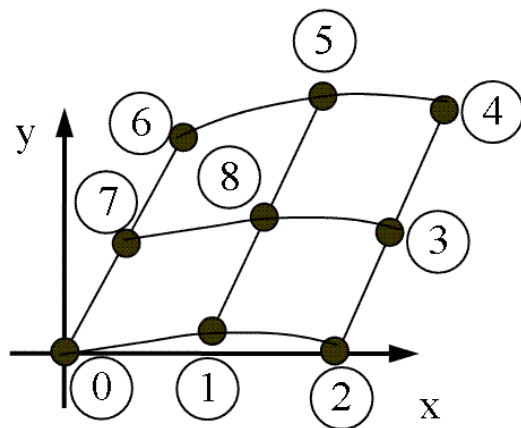


Abbildung 3.31: 9K-Viereck-FE

sind (analog zu (3.4.48)) Produkte aus quadratischen Lagrangeschen Interpolationspolynomen (3.1.6). Für die Parameter wird hier $\zeta_1 = \lambda$, $\zeta_2 = \mu$ gesetzt. Die Matrix $\underline{N}(\lambda, \mu)$ aus (3.4.53) gilt jeweils für $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$, $u_x(\lambda, \mu)$, $u_y(\lambda, \mu)$, z.B. $x(\lambda, \mu) = \underline{N}(\lambda, \mu) \underline{x}$.

In Abbildung 3.32 sind die Formfunktionen für die Knoten 0, 1 und 8 und eine Linearkombination davon dargestellt. Die weiteren Schritte zur FE-Formulierung für dieses FE sind völlig analog zu 3.4.5. Die resultierende Steifigkeitsmatrix ist von der Größe 18×18 und kann hier nicht mehr sinnvoll dargestellt werden.

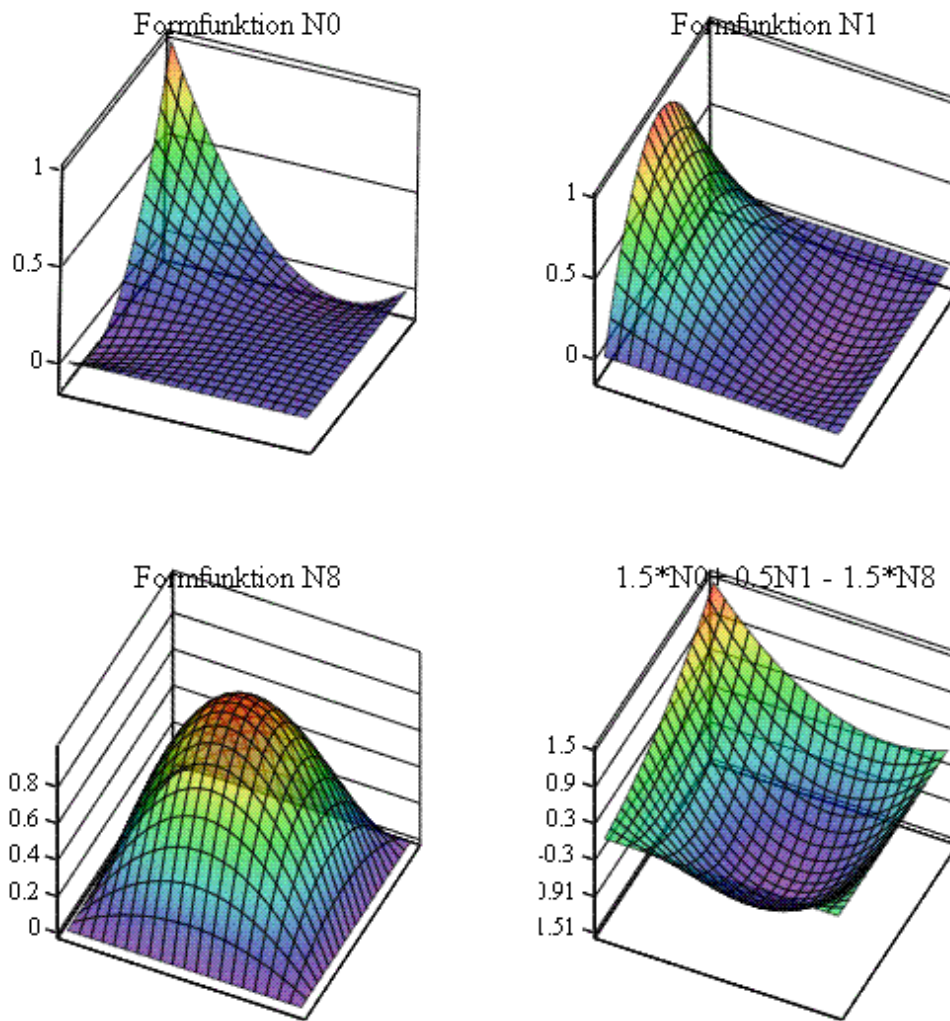


Abbildung 3.32: Formfunktionen 9K-FE

$$\mathbf{N}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} g_0(\lambda) \cdot g_0(\mu) \\ g_1(\lambda) \cdot g_0(\mu) \\ g_2(\lambda) \cdot g_0(\mu) \\ g_2(\lambda) \cdot g_1(\mu) \\ g_2(\lambda) \cdot g_2(\mu) \\ g_1(\lambda) \cdot g_2(\mu) \\ g_0(\lambda) \cdot g_2(\mu) \\ g_0(\lambda) \cdot g_1(\mu) \\ g_1(\lambda) \cdot g_1(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 - 6 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda^2 - 6 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + 9 \cdot \lambda \cdot \mu - 3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu^2 - 3 \cdot \mu + 1 \\ -8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 + 12 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 4 \cdot \lambda^2 + 8 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 12 \cdot \lambda \cdot \mu + 4 \cdot \lambda \\ 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 - 6 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + 3 \cdot \lambda \cdot \mu - \lambda \\ -8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 + 8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 4 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \mu \\ 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 - 2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + \lambda \cdot \mu \\ -8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 + 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 8 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \mu \\ 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 - 2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 6 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + 3 \cdot \lambda \cdot \mu + 2 \cdot \mu^2 - \mu \\ -8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 + 8 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 12 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 12 \cdot \lambda \cdot \mu - 4 \cdot \mu^2 + 4 \cdot \mu \\ 16 \cdot \lambda^2 \cdot \mu^2 - 16 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 16 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + 16 \cdot \lambda \cdot \mu \end{pmatrix} \quad (3.4.53)$$

3.4.8 3-Knoten Dreieckelement

In Abbildung 3.33 ist ein 3-Knoten-Dreieck-FE skizziert. Ein Dreieck im Originalbereich lässt sich nicht eindeutig auf ein Einheitsquadrat im Bildbereich abbilden. Deshalb werden spezielle Dreieckskordinaten ζ_k , $k=1,2,3$, gewählt. Die 3 Koordinaten sind nicht unabhängig voneinander (In der Ebene gibt es genau 2, nicht parallele, linear unabhängige Richtungen.) Deshalb gilt in (3.4.54) die Nebenbedingung 1) aus (3.4.37).

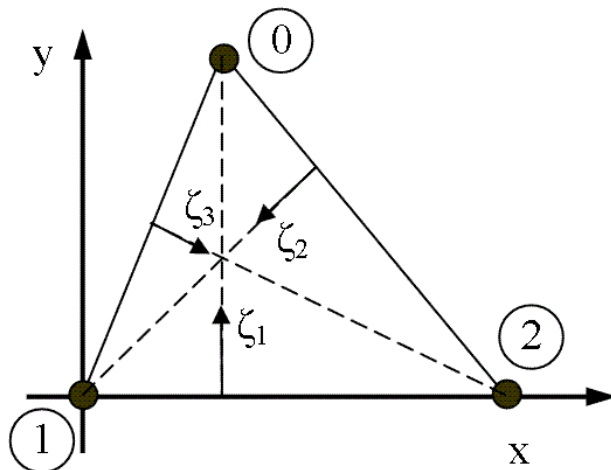


Abbildung 3.33: 3K-Dreieck-FE

$$x(\zeta_k) = \sum_{i=0}^2 g_i(\zeta_k) \cdot x_i = \underline{g}^T \underline{x}, \quad y(\zeta_k) = \sum_{i=0}^2 g_i(\zeta_k) \cdot y_i = \underline{g}^T \underline{y} \quad (3.4.54)$$

$$u_x(\zeta_k) = \sum_{i=0}^2 h_i(\zeta_k) \cdot u_{xi} = \underline{h}^T \underline{u}_x, \quad u_y(\zeta_k) = \sum_{i=0}^2 h_i(\zeta_k) \cdot u_{yi} = \underline{h}^T \underline{u}_y$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{isoparametrisch} \Rightarrow g_i(\zeta_k) = h_i(\zeta_k) \\ \text{Nebenbedingung: } \sum_{i=0}^2 h_i(\zeta_k) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_i(\zeta_k) = \zeta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1 \end{array} \right.$$

Die Formfunktionen $h_i(\zeta_k)$ haben jeweils an je einem Knoten den Wert 1 und an den beiden anderen Knoten den Wert 0. Die Koordinatentripel $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ der Koordinaten der Knoten 0 bis 2 sind $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Die Bedingungen aus (3.4.54) ergeben ein Gleichungssystem für die Koordinatenfunktionen ζ_k . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt der Knoten 1 im Ursprung des lokalen kartesischen x,y -Systems und der Knoten 2 auf der x -Achse.

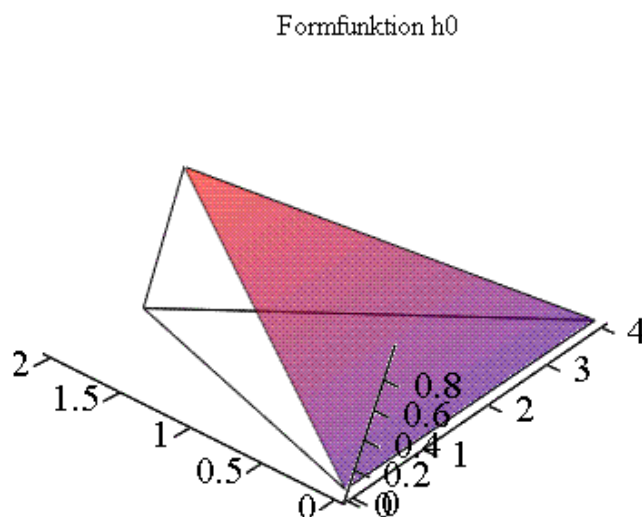


Abbildung 3.34: Formfunktion 3K-FE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_1=y_1=y_2=0} \begin{cases} \zeta_1 = \frac{y}{y_0} \\ \zeta_2 = 1 - \frac{x}{x_2} - \left(1 - \frac{x_0}{x_2}\right) \frac{y}{y_0} \\ \zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 = \frac{x}{x_2} - \frac{x_0}{x_2} \frac{y}{y_0} \end{cases} \quad (3.4.55)$$

Die zum Knoten k-1 gehörige Formfunktion ζ_k ist jeweils eine Ebenengleichung, deren Schnittgerade mit der x,y-Ebene auf der Koordinatenlinie $\zeta_k=0$ liegt auf der sich auch die anderen beiden Knoten befinden. Abbildung 3.34 zeigt die zum Knoten 0 gehörige Formfunktion ζ_1 .

Transformation der Matrix der Differentialoperatoren $\underline{D}(\)$, des Differentials dA der Fläche und der Differentiale ds der Ränder:

Wie in (3.4.34) werden die partiellen Ableitungen in der Matrix $\underline{D}(\)$ der Differentialoperatoren wieder über die Invertierung der Jakobi-Matrix bereitgestellt. Hier wird (willkürlich) $\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2$ als abhängige Koordinate gewählt

$$\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 \quad (3.4.56)$$

$$\begin{aligned} dx(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= \left(x_{,\zeta_1} + x_{,\zeta_3} \frac{\delta \zeta_3}{\delta \zeta_1} \right) d\zeta_1 + \left(x_{,\zeta_2} + x_{,\zeta_3} \frac{\delta \zeta_3}{\delta \zeta_2} \right) d\zeta_2 \\ &= (x_{,\zeta_1} - x_{,\zeta_3}) d\zeta_1 + (x_{,\zeta_2} - x_{,\zeta_3}) d\zeta_2 \end{aligned}$$

$$\frac{dx(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{d\zeta_1} = x_{,\zeta_1} - x_{,\zeta_3} \quad \text{für} \quad d\zeta_2 = 0$$

$$\text{analog: } dy(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (y_{,\zeta_1} - y_{,\zeta_3}) d\zeta_1 + (y_{,\zeta_2} - y_{,\zeta_3}) d\zeta_2$$

Mit (3.4.54), (3.4.56) und $x_1=y_1=y_2=0$ wird

$$\begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,\zeta_1} = \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,x} (x_{,\zeta_1} - x_{,\zeta_3}) + \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,y} (y_{,\zeta_1} - y_{,\zeta_3}) \quad (3.4.57)$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,\zeta_2} = \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,x} (x_{,\zeta_2} - x_{,\zeta_3}) + \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,y} (y_{,\zeta_2} - y_{,\zeta_3})$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,\zeta_1} \\ \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,\zeta_2} \end{pmatrix} = \underline{J}(\zeta_k) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,x} \\ \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}_{,y} \end{pmatrix}$$

$$\underline{J}(\zeta_k) = \begin{bmatrix} x_{,\zeta_1} - x_{,\zeta_3} & y_{,\zeta_1} - y_{,\zeta_3} \\ x_{,\zeta_2} - x_{,\zeta_3} & y_{,\zeta_2} - y_{,\zeta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - x_2 & y_0 - y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - x_2 & y_0 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{J}| = x_2 y_0 = 2A, \quad A - \text{Dreiecksfläche}$$

und damit die partiellen Ableitungen nach x und y und das Differential dA der FE-Fläche

$$\begin{pmatrix} ()_{,x} \\ ()_{,y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{pmatrix} ()_{,\zeta_1} \\ ()_{,\zeta_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\underline{\underline{J}}|} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_2 - y_0 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ()_{,\zeta_1} \\ ()_{,\zeta_2} \end{pmatrix} \quad (3.4.58)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ()_{,x} = -\frac{1}{x_2} ()_{,\zeta_2} \\ ()_{,y} = -\frac{1}{y_0} ()_{,\zeta_1} + \frac{x_0 - x_2}{x_2 y_0} ()_{,\zeta_2} \end{cases}$$

$$dA = |\underline{\underline{J}}| = x_2 y_0 d\zeta_1 d\zeta_2$$

Die Integration einer Funktion $f(\zeta_1, \zeta_2)$ über die Dreiecksfläche des FE erfolgt entsprechend Abbildung 3.35 nach (3.4.59).

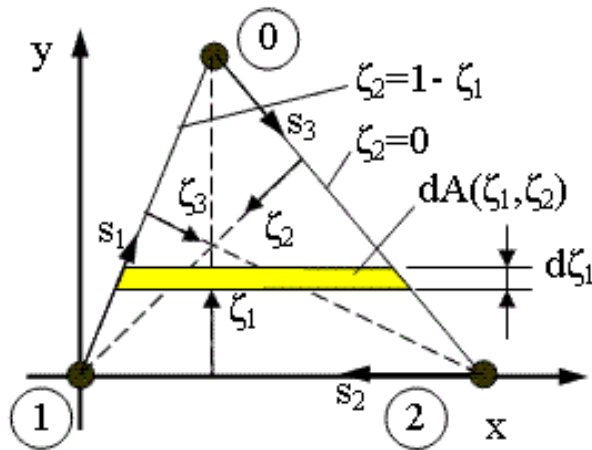


Abbildung 3.35: 3K-Dreieck-FE, dA

$$\int_A f(\zeta_1, \zeta_2) dA = \int_{\zeta_1=0}^1 \left[\int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} f(\zeta_1, \zeta_2) |\underline{\underline{J}}| d\zeta_2 \right] d\zeta_1 \quad (3.4.59)$$

Die Differentiale ds_k der Ränder k mit den Randkoordinaten s_k , $k=1,2,3$, sind in (3.4.60)

$$ds_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot d\zeta_1 \quad (3.4.60)$$

$$ds_2 = x_2 \cdot d\zeta_2$$

$$ds_3 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \cdot d\zeta_3$$

Beispiel: Die Formfunktionen sind nach (3.4.54) linear in den Koordinaten ζ_k (Produkte $\zeta_k \zeta_l$ treten nicht auf). Mit $\mathbf{x}_k = (1 \ 0 \ 4)^T$, $\mathbf{y}_k = (2 \ 0 \ 0)^T$, $E=2$, $\nu=0.3$, $h=0.5$ wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} .

$$\underline{\mathbf{K}}^* = (\underline{\mathbf{DN}})^T \underline{\mathbf{C}} (\underline{\mathbf{DN}}) = \text{konst.} \quad (3.4.61)$$

$$\Rightarrow \int_A dA = |\underline{\mathbf{J}}| \int_{\zeta_1=0}^1 \left[\int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} d\zeta_2 \right] d\zeta_1 = \frac{1}{2} |\underline{\mathbf{J}}| = \frac{x_2 y_0}{2} = A$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \int_A \underline{\mathbf{K}}^* dA = A \cdot \underline{\mathbf{K}}^*$$

Diese wird numerisch berechnet.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.3846 & 0 & -0.2885 & -0.1923 & -0.0962 & 0.1923 \\ 0 & 1.0989 & -0.1648 & -0.8242 & 0.1648 & -0.2747 \\ -0.2885 & -0.1648 & 0.4911 & 0.2679 & -0.2026 & -0.103 \\ -0.1923 & -0.8242 & 0.2679 & 0.7143 & -0.0755 & 0.1099 \\ -0.0962 & 0.1648 & -0.2026 & -0.0755 & 0.2988 & -0.0893 \\ 0.1923 & -0.2747 & -0.103 & 0.1099 & -0.0893 & 0.1648 \end{pmatrix} \quad (3.4.62)$$

Die Überprüfung der Starrkörperbewegung mit beliebigen Verschiebungen \mathbf{v}_{xst} , \mathbf{v}_{yst} und einer beliebigen (kleinen) Verdrehung ω_{st} ergibt als notwendige Bedingung den Nullvektor.

$$\underline{\mathbf{u}}_x = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T \mathbf{v}_{\text{xst}} \quad (3.4.63)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_y = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)^T \mathbf{v}_{\text{yst}}$$

$$\underline{\mathbf{u}}_\omega = (-y_0 \ x_0 \ -y_1 \ x_1 \ -y_2 \ x_2)^T \omega_{\text{st}}$$

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{\text{st}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \underline{\mathbf{u}}_{\text{st}} = \underline{\mathbf{u}}_x + \underline{\mathbf{u}}_y + \underline{\mathbf{u}}_\omega$$

3.5 Randpunktelemente

Das 3-Knoten-Stab-FE aus 3.1.2 und das 9-Knoten-Scheiben-FE aus 3.4.7 haben jeweils einen Mittenknoten in Stab- bzw. Flächenmitte. Die Formfunktionen dieser Knoten haben nur Auswirkungen im Gebiet des FE. In der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems gibt es keine Kopplung zu Knoten außerhalb des FE. Die Mittenknoten vergrößern aber die Anzahl der Unbekannten und gehen voll in die Bandbreite des Gesamtgleichungssystems ein (Während ein im Gebiet eines Scheiben-Modells liegender Eckknoten i.a. zu vier Viereckelementen gehört und demzufolge nur „zu einem Viertel“ in die Zahl der Unbekannten und in die Bandbreite eingeht.). Deshalb ist es sinnvoll, derartige Mittenknoten im FE zu eliminieren. Damit kann erhebliche Einsparung an Speicherplatz und Rechenzeit erzielt werden.

3.5.1 Modifizierung der Formfunktionen

Man kann nicht einfach die Formfunktionen der Mittenknoten und damit diese Knoten „weglassen“. Dann wäre die Bedingung 1) in (3.4.37) nicht erfüllt, das FE würde die Starrkörperbedingungen und den konstanten Verzerrungszustand nicht enthalten und wäre demzufolge unbrauchbar. Die Formfunktion des Mittenknotens muss vollständig (Summe aller Faktoren ist 1) auf die Randknoten aufgeteilt werden. Das geschieht zweckmäßiger Weise durch eliminieren des Gliedes mit dem höchsten Polynomgrad in allen Ansatzfunktionen. Wenn die FE-Formulierung des vollständigen FE schon bekannt ist, kann man dieses Ziel durch Multiplikation mit einer entsprechenden Transformationsmatrix \underline{T} erreichen. Am Beispiel des 3-Knoten-Stab-FE

$$\underline{u}(\mu) = \sum_{j=0}^2 \underline{g}_j(\mu) \cdot u_j = \underline{g}^T \underline{u}, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 2\mu^2 - 3\mu + 1 \\ -4\mu^2 + 4\mu \\ 2\mu^2 - \mu \end{pmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{u} - \underline{p}, \quad \underline{T} \cdot \underline{g} = \begin{pmatrix} 1 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{– das sind die Ansatzfunktionen des 2K-FE}$$

$$\underline{K} = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \frac{EA}{15L} (\beta \cdot L)^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{p} = \frac{qL}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{T}^T = \frac{EA}{L} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(\beta \cdot L)^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \underline{T} \cdot \underline{p} = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die FE-Formulierung (3.1.7) führt mit der Matrix \underline{T} auf die von (3.1.5). Damit wird das 3K-FE auf das 2K-FE zurückgeführt und bringt demzufolge diesem gegenüber keine Verbesserung. Ein derartig erzeugtes Randpunktelement ist generell schlechter (steifer) als das vollständige Element.

Analoges Vorgehen führt mit der Elimination des Gliedes $(\lambda \cdot \mu)^2$ der Formfunktionen des 9K-FE (3.4.53) durch vollständige Aufteilung der Formfunktion des Mittenknotens auf die Formfunktionen (3.5.2) des 8K-FE

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} -2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 + 5 \cdot \lambda \cdot \mu - 3 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu^2 - 3 \cdot \mu + 1 \\ 4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 4 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \mu + 4 \cdot \lambda \\ -2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - \lambda \cdot \mu - \lambda \\ -4 \cdot \mu \cdot (\mu - 1) \cdot \lambda \\ 2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 3 \cdot \lambda \cdot \mu \\ -4 \cdot \lambda^2 \cdot \mu + 4 \cdot \lambda \cdot \mu \\ 2 \cdot \lambda^2 \cdot \mu - 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - \lambda \cdot \mu + 2 \cdot \mu^2 - \mu \\ 4 \cdot \lambda \cdot \mu^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \mu - 4 \cdot \mu^2 + 4 \cdot \mu \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

Diese sind in Abbildung 3.36 (im Vergleich zu Abbildung 3.32) dargestellt. Die Formfunktionen der Seitenmittenknoten sind über die Seite quadratisch und orthogonal dazu nur noch linear. Durch analoges Vorgehen kann auch z.B. zusätzlich ein Seitenmittenknoten eliminiert werden. Damit können Übergangselemente für den Übergang von 4K-FE auf 8K-FE erzeugt werden.

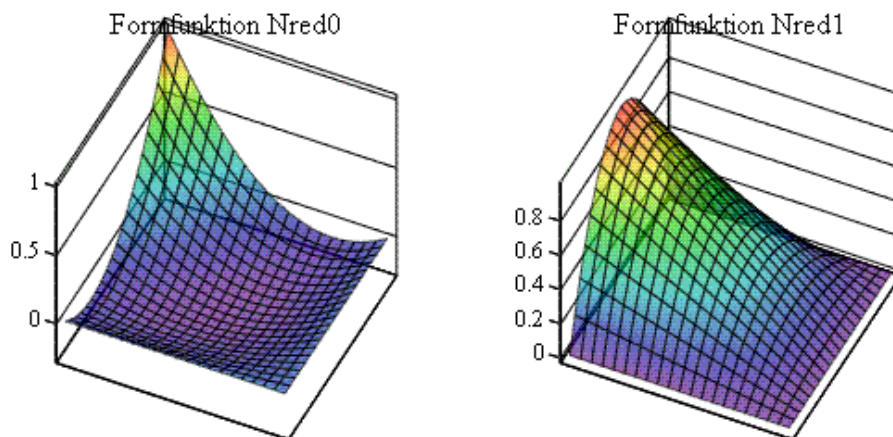


Abbildung 3.36: Formfunktionen für 8K-Randpunkt-FE

3.5.2 Statische Kondensation

Bei der statischen Kondensation werden die Mittenknoten durch Teilinversion der Steifigkeitsmatrix eliminiert. Dadurch wird die Qualität des Elementes vollständig beibehalten. In (3.5.3) sind die Vektoren \underline{f} und \underline{u} so geordnet, dass in \underline{f}_1 , \underline{u}_1 und \underline{p}_1 die Größen der Randknoten und in \underline{f}_2 , \underline{u}_2 und \underline{p}_2 die Größen der zu eliminierenden Mittenknoten zusammengefasst sind.

$$\underline{f} = \underline{K} \cdot \underline{u} - \underline{p}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{pmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \end{pmatrix} \quad (3.5.3)$$

Durch Teilinversion der Matrix \underline{K} wird daraus mit \underline{K}_{22}^{-1}

$$\underline{f}_2 = \underline{K}_{21}\underline{u}_1 + \underline{K}_{22}\underline{u}_2 - \underline{p}_2 \Rightarrow \underline{u}_2 = \underline{K}_{22}^{-1}(\underline{f}_2 + \underline{p}_2 - \underline{K}_{21}\underline{u}_1) \quad (3.5.4)$$

$$\underline{f}_1 = \underline{K}_{11}\underline{u}_1 + \underline{K}_{12}\underline{u}_2 - \underline{p}_1 = \underline{K}_{11}\underline{u}_1 + \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}(\underline{f}_2 + \underline{p}_2 - \underline{K}_{21}\underline{u}_1) - \underline{p}_1$$

$$\underline{y} = \underline{K}_{sKv} \cdot \underline{x} - \underline{p}_{sKv}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_{sKv} = \begin{pmatrix} \underline{p}_1 - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{p}_2 \\ -\underline{K}_{22}^{-1}\underline{p}_2 \end{pmatrix},$$

$$\underline{K}_{sKv} = \begin{pmatrix} \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21} & -\underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1} \\ -\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21} & -\underline{K}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ -\underline{f}_2 \end{pmatrix}$$

Aus (3.5.4) ergibt sich die FE-Formulierung für das statisch kondensierte Element

$$\underline{f}_{sK} = \underline{K}_{sK}\underline{u}_1 - \underline{p}_{sK} \quad (3.5.5)$$

$$\underline{f}_{sK} = (\underline{f}_1 - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{f}_2), \quad \underline{K}_{sK} = (\underline{K}_{11} - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21}), \quad \underline{p}_{sK} = (\underline{p}_1 - \underline{K}_{12}\underline{K}_{22}^{-1}\underline{p}_2)$$

$$\underline{u}_2 = (-\underline{K}_{22}^{-1}\underline{K}_{21})\underline{u}_1 + \underline{K}_{22}^{-1}(\underline{f}_2 + \underline{p}_2)$$

Für \underline{u}_2 können keine (wesentlichen) RB vorgegeben werden.

Beispiel: 3-Knoten-Stab-FE

Am Mittenknoten 1 wird keine Kraft eingeleitet ($f_1=0$). Die Steifigkeitsmatrix \underline{K}_3 und der Vektor der äquivalenten Knotenlasten \underline{p}_3 aus (3.1.7) sind in (3.5.6) aufgeführt.

$$\underline{K}_3 = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 + \frac{2}{5}b & -8 + \frac{1}{5}b & 1 - \frac{1}{10}b \\ -8 + \frac{1}{5}b & 16 + \frac{8}{5}b & -8 + \frac{1}{5}b \\ 1 - \frac{1}{10}b & -8 + \frac{1}{5}b & 7 + \frac{2}{5}b \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_3 = \frac{qL}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = (\beta \cdot L)^2 \quad (3.5.6)$$

Zuerst wird mit der Matrix \underline{T} umsortiert, so dass die Größen f_1 , u_1 und p_1 entsprechend (3.5.3) am Ende der Vektoren \underline{f} , \underline{u} und \underline{p} stehen.

$$\underline{K} = \underline{T} \underline{K}_3 \underline{T}^T = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 + \frac{2}{5}b & 1 - \frac{1}{10}b & -8 + \frac{1}{5}b \\ 1 - \frac{1}{10}b & 7 + \frac{2}{5}b & -8 + \frac{1}{5}b \\ -8 + \frac{1}{5}b & -8 + \frac{1}{5}b & 16 + \frac{8}{5}b \end{pmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5.7)$$

$$\underline{p} = \underline{T} \underline{p}_3 = \frac{qL}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die zu (3.5.5) analoge Lösung der statisch kondensierten Steifigkeitsmatrix \underline{K}_{sK} und des statisch kondensierten Vektors der äquivalenten Knotenlasten \underline{p}_{sK} des 3-Knoten-Stab-FE sind in (3.5.8)

$$\underline{K}_{sK} = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 + \frac{2}{5}b - b_1 & 1 - \frac{1}{10}b - b_1 \\ 1 - \frac{1}{10}b - b_1 & 7 + \frac{2}{5}b - b_1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \frac{\left(-8 + \frac{1}{5}b\right)^2}{16 + \frac{8}{5}b} \quad (3.5.8)$$

$$\underline{p}_{sK} = \frac{qL}{6} (1 - 4q_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \frac{-8 + \frac{1}{5}b}{16 + \frac{8}{5}b}$$

Für $b=0$ (keine elastische Stützung) ist das die Lösung für das 2-Knoten-Stab-FE. Dieses stellt dafür schon die exakte Lösung dar, lässt sich demzufolge nicht „verbessern“.

In 3.1.3 sind Lösungen für das 2-Knoten-Stab-FE und das 3-Knoten-Stab-FE der exakten Lösung vergleichend gegenübergestellt. Gemeinsam ist die Anzahl der Unbekannten des jeweiligen

Modells (5 Unbekannte). Mit 5 Unbekannten können aber auch 4 statisch kondensierte 2-Knoten-FE verwendet werden. Die zugehörige Lösung (u_{3sK}) in Abbildung 3.37 ist praktisch nicht mehr von der exakten Lösung zu unterscheiden (Abweichungen in der 4.Stelle).

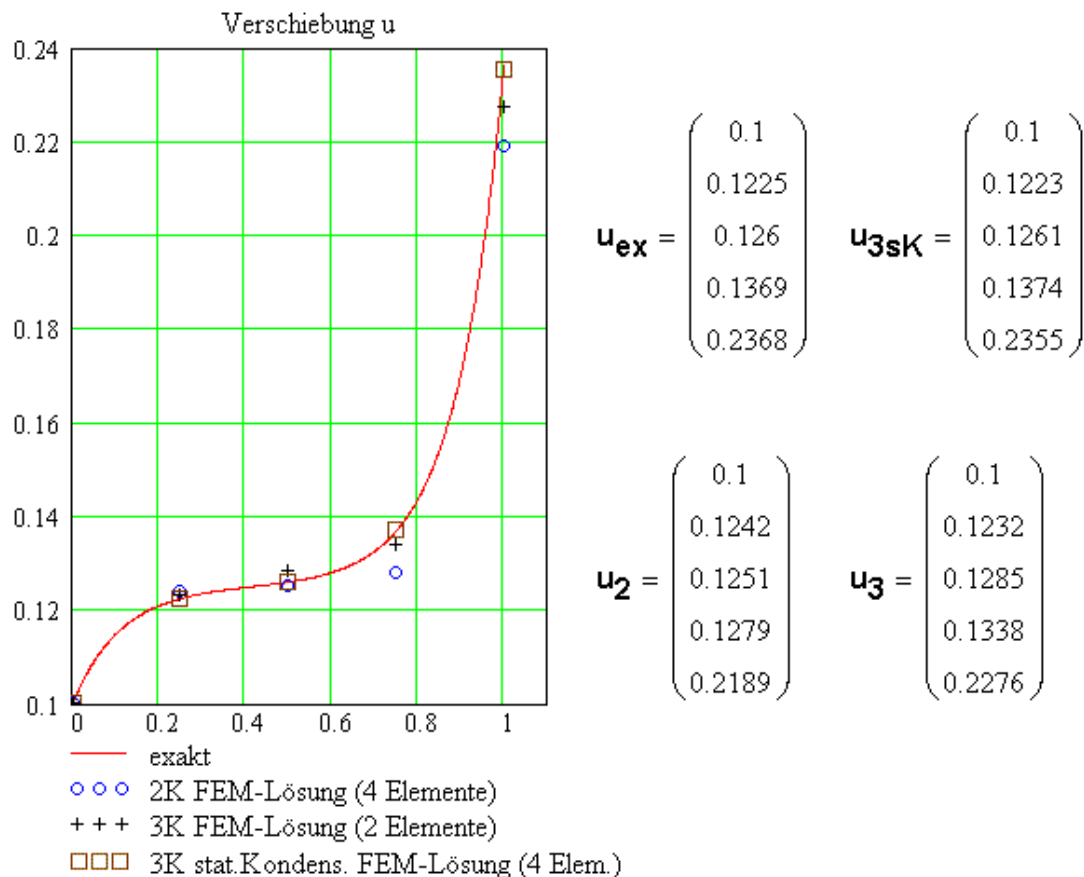


Abbildung 3.37: Vergleich 2K-, 3K- und 2K-kondensierte- Stab-FE

Diese Lösung ist identisch der Lösung mit 4 (nicht kondensierten) 3-Knoten-Stab-FE. Dieses System hat dann aber 9 (statt 5) Unbekannte. Der numerische Aufwand zur Lösung des zugehörigen Gleichungssystems ist damit um ein vielfaches höher.

3.6 Numerische Integration

Das Integral in (3.4.30) zur Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix ist problemlos analytisch zu lösen, da der Integrand ein Polynom in ξ_1 und ξ_2 ist. Im Allgemeinen müssen die Werte der entsprechenden Integrale in (3.4.46) durch numerische Integration ermittelt werden.

Alle Mittelwertformeln zur numerischen Integration ersetzen das Integral über eine Funktion durch eine Summe (mit a_i) gewichteter Funktionswerte dieser Funktion:

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i \cdot f(x_i) + \text{Rest} \quad (3.6.1)$$

Hier sei ein festes Intervall $[0,1]$ vorgegeben. Jedes andere, endliche Intervall $[b,c]$ lässt sich durch Änderung der Skalierung und Verschiebung auf dieses Intervall zurückführen.

$$\begin{aligned} x_1 &\in [0,1], \quad x_2 \in [b,c] \\ x_2 &= (1-x_1)b + x_1c = b + (c-b)x_1 \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

In den nachfolgenden Integrationsformeln sind die zu integrierenden Funktionen vollständige Polynome vom Grad n . Stützstellen x_i und Gewichte a_i bestimmt man so, dass diese Polynome exakt integriert werden. Die Näherung bei der Integration einer beliebigen Funktion $f(x)$ besteht darin, dass diese Funktion durch ein zu integrierendes Polynom punktweise angenähert wird (an den Stützstellen gleichgesetzt). Daraus resultiert der Integrationsfehler (Rest ungleich Null), wenn die zu integrierende Funktion kein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n ist.

Gibt man die Stützstellen x_i für $n=1$ mit 0 und 1 vor, ergeben sich die Gewichte a_i

$$\begin{aligned} n=1: \quad f(x) &= c_0 + c_1x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \\ I &= \int_0^1 f(x) dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 = a_0f(0) + a_1f(1) = a_0c_0 + a_1(c_0 + c_1) \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} c_0: \quad 1 &= a_0 + a_1 \\ c_1: \quad \frac{1}{2} &= a_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_0 = a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)]$$

und für $n=2$

$$\begin{aligned} n=2: \quad f(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 \\ I &= \int_0^1 f(x) dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \sum_{i=0}^2 a_i (c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} c_0: \quad 1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ c_1: \quad \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}a_1 + a_2 \\ c_2: \quad \frac{1}{3} &= \frac{1}{4}a_1 + a_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_2 = \frac{1}{6} \\ a_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{erfüllt auch: } \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx = \sum_{i=0}^2 a_i x_i^3 \Rightarrow \text{genau bis } x^3$$

$$I = \sum_{i=0}^2 a_i f(x_i) = \frac{1}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right]$$

Die Funktionswerte $f(x_i)$ müssen oft aufwendig berechnet werden. Deshalb besteht das Ziel darin, das Integral I in (3.6.1) mit wenigen Funktionswerten bei hoher Genauigkeit zu ermitteln. Das gelingt dadurch, dass sowohl die Gewichte a_i , als auch die Stützstellen x_i variabel zugelassen werden. Mit diesen $2(n+1)$ Bedingungen lässt sich ein vollständiges Polynom bis zum Grad $2n+1$ exakt integrieren (Rest=0). Die Gewichte und die Stützstellen werden aus den entsprechenden Koeffizientenvergleichen bestimmt. Für $n=0$ ergibt sich:

$$n = 0: \quad f(x) = c_0 + c_1 x \quad (3.6.5)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = c_0 + \frac{1}{2} c_1 = a_0 (c_0 + c_1 x_0)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} c_0: \quad 1 = a_0 \\ c_1: \quad \frac{1}{2} = a_0 x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$I = \sum_{i=0}^0 a_i f(x_i) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

und entsprechend für $n=1$

$$n = 1: \quad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (3.6.6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= c_0 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{3} c_2 + \frac{1}{4} c_3 = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) \\ &= a_0 (c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^3) + a_1 (c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left. \begin{array}{l} c_0: \quad 1 = a_0 + a_1 \\ c_1: \quad \frac{1}{2} = a_0 x_0 + a_1 x_1 \\ c_2: \quad \frac{1}{3} = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 \\ c_3: \quad \frac{1}{4} = a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_1 = \frac{1}{2} \\ x_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ x_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array} \right.$$

$$I = \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + f\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \right]$$

In Tabelle 3.1 sind die Stützstellen x_i im Intervall $[0,1]$ und die entsprechenden Gewichte g_i bis $n+1=9$ zusammengestellt

Anzahl Stützstellen $n+1$	Stützstellen x_i	Gewichte a_i
1	$x_0=0.5$	$a_0=1$
2	$x_1=0.78867513$ $x_0=1-x_1$	$a_1=0.5$ $a_0=a_1$
3	$x_2=0.88729833$ $x_1=0.5$ $x_0=1-x_2$	$a_2=0.27777778$ $a_1=0.44444444$ $a_0=a_2$
4	$x_3=0.93056816$ $x_2=0.6699905$ $x_1=1-x_2$ $x_0=1-x_3$	$a_3=0.1739274$ $a_2=0.32607258$ $a_1=a_2$ $a_0=a_3$
5	$x_4=0.9530899$ $x_3=0.76923466$ $x_2=0.5$ $x_1=1-x_3$ $x_0=1-x_4$	$a_4=0.11846344$ $a_3=0.23931434$ $a_2=0.28444444$ $a_1=a_3$ $a_0=a_4$
6	$x_5=0.96623476$ $x_4=0.830604693$ $x_3=0.61930959$ $x_2=1-x_3$ $x_1=1-x_4$ $x_0=1-x_5$	$a_5=0.08566225$ $a_4=0.1803808$ $a_3=0.23395697$ $a_2=a_3$ $a_1=a_4$ $a_0=a_5$
7	$x_6=0.97455396$ $x_5=0.87076559$ $x_4=0.70292258$ $x_3=0.5$ $x_2=1-x_4$ $x_1=1-x_5$ $x_0=1-x_6$	$a_6=0.06474248$ $a_5=0.13985270$ $a_4=0.19091503$ $a_3=0.2089796$ $a_2=a_4$ $a_1=a_5$ $a_0=a_6$
8	$x_7=0.98014493$ $x_6=0.89833324$ $x_5=0.76276621$ $x_4=0.59171732$ $x_3=1-x_4$ $x_2=1-x_5$ $x_1=1-x_6$ $x_0=1-x_7$	$a_7=0.05061427$ $a_6=0.11119052$ $a_5=0.15685332$ $a_4=0.1813419$ $a_3=a_4$ $a_2=a_5$ $a_1=a_6$ $a_0=a_7$
9	$x_8=0.98408012$ $x_7=0.91801555$ $x_6=0.80668572$ $x_5=0.66212671$ $x_4=0.5$ $x_3=1-x_5$ $x_2=1-x_6$ $x_1=1-x_7$ $x_0=1-x_8$	$a_8=0.04063719$ $a_7=0.09032408$ $a_6=0.13030535$ $a_5=0.1561735$ $a_4=0.16511968$ $a_3=a_5$ $a_2=a_6$ $a_1=a_7$ $a_0=a_8$

Tabelle 3.1: GAUSS-Stützstellen und –Gewichte

Siehe hierzu zur Herleitung und zugehörigen Beispielen auch.³

Zur numerischen Integrationen mit $k=n+1$ Stützstellen wird der Integrand durch ein Näherungspolynom der Ordnung $2k-1=2n+1$ angenähert. Aus dieser Näherung resultiert der Fehler. Das Näherungspolynom wird exakt integriert.

Bei den Doppelintegralen in (3.4.46) wird das Integral durch eine Doppelsumme ersetzt. Das entspricht der Produktschrittsumme zweier Polynome in ζ_1 und ζ_2 der Ordnung $2n+1$.

$$\underline{K}^*(\zeta_k) = [\underline{DN}(\zeta_k)]^T \underline{C} [\underline{DN}(\zeta_k)] |J(\zeta_k)| \quad (3.6.7)$$

$$\underline{K} = \int_0^1 \int_0^1 \underline{K}^*(\zeta_k) d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i \cdot a_j \cdot \underline{K}^*(\zeta_i, \zeta_j) + \text{Rest}$$

Wegen $|J|$ im Nenner bei $\underline{D}(\)$ aus (3.4.43) sind die Elemente von $\underline{K}^*(\zeta_k)$ keine Polynome und die notwendige Anzahl von Integrationsstützstellen für das Integral in (3.6.7) ist z.B. über Konvergenzuntersuchung mit steigendem n zu ermitteln.

Die Gleichungssysteme in (3.6.3), (3.6.4) sind linear, während die in (3.6.5), (3.6.6) nichtlinear sind. Die Stützstellen x_i sind aber im Intervall $[-1,1]$ die Nullstellen der Legendreschen Polynome und diese lassen sich über eine Rekursionsformel berechnen. Dadurch ergibt sich wieder ein lineares Gleichungssystem für die Gewichte a_i .

Beispiel zur numerischen Integration: Die analytisch integrierte Steifigkeitsmatrix \underline{K} für das 3-Knoten-Stabelement mit den quadratischen Formfunktionen g_i aus 3.1.2 ist (3.6.8)

$$\underline{K} = EA \left(\underline{N} + \beta^2 \underline{M} \right), \quad N_{i,j}^*(\mu) = g_i'(\mu) \cdot g_j'(\mu), \quad M_{i,j}^*(\mu) = g_i(\mu) \cdot g_j(\mu) \quad (3.6.8)$$

$$N_{i,j} = L \cdot \int_0^1 N_{i,j}^*(\mu) d\mu, \quad M_{i,j} = L \cdot \int_0^1 M_{i,j}^*(\mu) d\mu, \quad i, j = 0, 1, 2$$

$$\underline{N} = \frac{1}{3L} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{M} = \frac{L}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den symmetrischen Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{N}^*(\mu) &= \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} (4\mu - 3)^2 & 4(4\mu - 3)(1 - 2\mu) & (4\mu - 3)(4\mu - 1) \\ & 16(1 - 2\mu)^2 & 4(1 - 2\mu)(4\mu - 1) \\ \text{sym.} & & (4\mu - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.9) \\ \underline{M}^*(\mu) &= \begin{bmatrix} 4(1 - \mu)^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 & 8(1 - \mu)^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \mu & -4(1 - \mu) \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \mu \\ & 16\mu^2 (1 - \mu)^2 & -8(1 - \mu) \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \mu^2 \\ \text{sym.} & & 4 \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 \mu^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die numerische Integration mit 2 bzw. 3 Stützstellen (genau bis Polynom 3. bzw. 5. Grades) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{N} &= L \sum_{i=0}^1 [a_i \cdot \underline{N}^*(\mu_i)] = \frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (3.6.10) \\ \underline{M} &= L \sum_{i=0}^2 [a_i \cdot \underline{M}^*(\mu_i)] = \frac{L}{45} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 24 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \\ 1 \\ 1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Vergleich von (3.6.8) mit (3.6.10) bestätigt, dass die numerischen Integrationen für den entsprechenden Polynomgrad exakt sind.

Die numerische Integration der Matrix \underline{M}^* in (3.6.11) mit nur 2 Stützstellen ergibt noch maximale Fehler von über 50%. Die Elemente von \underline{M}^* sind Polynome 4. Grades, mit 2 Stützstellen wird aber nur ein Polynom 3. Grades exakt integriert.

$$\underline{M}_{n1} = L \sum_{i=0}^1 [a_i \cdot \underline{M}^*(\mu_i)] = \frac{L}{45} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -\frac{5}{2} \\ 5 & 20 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (3.6.11)$$

4 Ergänzungen, spezielle Probleme der FEM

Die in 3 dargestellten Methoden sind geeignet zur Lösung statischer Probleme (ohne Beschleunigungen und den daraus resultierenden Trägheitslasten also Trägheitskräften und -momenten) und für kleine Verformungen und kleine Verzerrungen.

4.1 Dynamische Probleme

Es werden ausschließlich harmonische, ungedämpfte Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω betrachtet. Für „Beispiel Zugstab“ gilt $c=0$ (ungedämpft). Harmonische Abhängigkeit von der Zeit t ergibt mit einem Produktansatz für die Verschiebung

$$\tilde{u}(x,t) = u(x) \cdot h(t), \quad \text{z.B.: } h(t) = \cos \omega t \quad (4.1.1)$$

$$\ddot{\tilde{u}}(x,t) = -\omega^2 \cdot u(x) \cdot h(t), \quad \ddot{h}(t) = \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -\omega^2 h(t)$$

$$\tilde{f}(x,t) = f(x) \cdot h(t), \quad \tilde{p}(x,t) = p(x) \cdot h(t)$$

Nach (1.6) wird β^2 ersetzt durch $-\frac{\rho}{E}\omega^2$. Damit wird aus (3.1.5) für die Amplituden der Schwingung des 2-Knoten-Stabelementes e

$$\beta^2 \rightarrow -\frac{\rho}{E}\omega^2 \quad (4.1.2)$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \left(\underline{\underline{K}}^e - \omega^2 \underline{\underline{M}}^e \right) \cdot \underline{\underline{u}}^e - \underline{\underline{p}}^e$$

$$\underline{\underline{f}}^e = \begin{pmatrix} f_0^e \\ f_1^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_0^e \\ F_1^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{u}}^e = \begin{pmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{p}}^e = \frac{1}{2} L q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Über das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials entsprechend 6.6 ergibt sich (4.1.3) aus (6.6.8) für ein FE (ohne Kopindex e) völlig gleich zu (4.1.2)

$$\pi \cdot h^2(t) = \text{Min.} \Rightarrow \quad (4.1.3)$$

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} - \underline{p}^T \underline{u} - \underline{f}^T \underline{u} = \text{Min.}$$

$$\underline{K} = EA \int \underline{g}'_u \cdot \underline{g}'_u{}^T dx, \quad \underline{M} = \rho A \int \underline{g}_u \cdot \underline{g}_u{}^T dx$$

$$\underline{p} = q \underline{g}_u{}^T, \quad \underline{f} = F_b \underline{g}_u{}^T(x=b) - F_a \underline{g}_u{}^T(x=a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{u}} = (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} - \underline{p} - \underline{f} = \underline{0}$$

Für mehrdimensionale Kontinuumselemente wird aus (3.4.23) in völliger Analogie für ein FE

$$(4.1.4)$$

Die Assemblierung eines Gesamtmodells aus einzelnen FE erfolgt analog zu z.B. 3.1.6 und ergibt für das Gesamtsystem

$$\underline{f} = (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{v} - \underline{p} \quad (4.1.5)$$

\underline{M} ist die zu den Trägheitslasten gehörende Massenmatrix. In (4.1.5) sind die Gleichungen für harmonische Erregung mit den Amplituden \underline{f} und \underline{p} zur vorgegebenen Kreisfrequenz ω oder mit $\underline{f} = \underline{0}$ und $\underline{p} = \underline{0}$ für das Eigenwertproblem

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \text{Det}(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0 \quad (4.1.6)$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } \omega_i^2, \quad \text{Eigenvektoren } \underline{v}_i$$

mit den diskreten Eigenwerten ω_i^2 und Eigenvektoren \underline{v}_i . Das Eigenwertproblem ist ein homogenes Problem. D.h., auch die zu (4.1.6) gehörigen RB sind homogen.

Die Steifigkeitsmatrix \underline{K} ergibt sich aus der Integration der Quadrate der Gradienten der Formfunktionen und die Massenmatrix \underline{M} aus der Integration der Quadrate der Formfunktionen selbst. Deshalb muß (wie in (3.6.8) bis (3.6.11) gezeigt) die Massenmatrix bei der numerischen Integration mit höherer Stützstellenzahl und damit mit höherem Aufwand integriert werden.

Deshalb wird oft mit einer reduzierten Massenmatrix $\underline{M}_{\text{red}}$ gerechnet. Die Gesamtmasse m jedes Elementes wird als Punktmassen $m_K = m/n_e$ auf die n_e Knoten des Elementes verteilt und die daraus resultierenden Trägheitslasten zu den Knotenlasten \underline{f} addiert. Zur Berechnung von $\underline{M}_{\text{red}}$ ist keine Integration erforderlich.

$$\rho = 0 \Rightarrow \underline{M} = \underline{0} \quad (4.1.7)$$

$$\underline{f}_{\text{red}} = \underline{f} + m_K \omega^2 \underline{v}, \quad m = n_e \cdot m_K$$

$$\underline{f}_{\text{red}} = \underline{K} \cdot \underline{v} - \underline{p} \Rightarrow \underline{f} = (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}_{\text{red}}) \underline{v} - \underline{p}, \quad \underline{M}_{\text{red}} = m_K \underline{I}$$

In (4.1.7) enthält \underline{y} ausschließlich Verschiebungen. \underline{I} ist eine Diagonalmatrix, eine Einheitsmatrix. Bei Strukturelementen mit Verdrehungsfreiheitsgraden stehen an den entsprechenden Stellen in \underline{I} Nullen, weil die Drehträgheiten der Punktmassen Null sind. Auch die reduzierte Massenmatrix des aus den einzelnen FE assemblierten Gesamtsystems ist eine Diagonalmatrix. Daraus entstehen zusätzliche Vorteile bei der Lösung des (4.1.6) entsprechenden Eigenwertproblems mit $\underline{M}_{\text{red}}$ statt \underline{M} .

Beispiel: Eigenkreisfrequenzen ω_i für einen Fachwerkstab mit den dimensionslosen Parametern Steifigkeit $EA/L=1$ und Masse $\rho AL=1$. Der Stab ist nicht gelagert.

	Eigenkreisfrequenz ω_i mit vollständiger Massenmatrix		Eigenkreisfrequenz ω_i mit reduzierter Massenmatrix	
Anz.FE	ω_2	ω_3	ω_2	ω_3
1	3.4641		2	
2	3.4641	6.9282	2.8284	4
3	3.2863	7.3485	3	5.1962
4	3.2228	6.9282	3.0615	5.6569
5	3.1935	6.6999	3.0902	5.8779
6	3.1776	6.5727	3.1058	6
10	3.1545	6.387	3.1287	6.1803
20	3.1448	6.3091	3.1384	6.2574
100	3.1417	6.2842	3.1415	6.2822
exakt	$\pi=3.1416$	$2\pi=6.2832$	$\pi=3.1416$	$2\pi=6.2832$

Tabelle 4.1: Stab, Eigenkreisfrequenzen m. vollst. u. red. Massenmatrix

Bei dynamischen Problemen ist es nicht notwendig, die Starrkörperbewegungen zu behindern. Die zu den Starrkörperbewegungen gehörigen Eigenkreisfrequenzen ω_i des Systems sind Null, da die Innere Energie bei starrer Bewegung Null ist (im Beispiel ist $\omega_1=0$). Es existieren im Beispiel Anz.FE+1 diskrete Eigenkreisfrequenzen ω_i . Die Genauigkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren nimmt mit steigender Ordnung ab (ω_{i+1} ist ungenauer als ω_i). Oft werden nur die unteren Eigenwerte benötigt.

Die Eigenkreisfrequenzen des Einzelementes ändern sich bei Verwendung von $\underline{M}_{\text{red}}$ statt \underline{M} beträchtlich (vgl. für Anz.FE=1 in Tabelle 4.1), sind aber i.a. beide nicht exakt. Mit Erhöhung für Anz.FE konvergieren beide Lösungen von oben (zu steifes System) oder von unten (zu weiches System) gegen die exakte Lösung.

4.2 Große Verformungen (1D: ebener schubweicher Balken)

Bei der Formulierung von Problemen der Kontinuumsmechanik kann man in drei Problemklassen einteilen:

- Theorie 1.Ordnung: die Verformungen sind sehr klein gegenüber den Abmessungen des Kontinuums (Gleichgewicht am unverformten Kontinuum), das Materialgesetz ist linear \Rightarrow lineare Theorie

- Theorie 2.Ordnung: die Verformungen sind sehr klein gegenüber den Abmessungen des Kontinuums (aber Gleichgewicht am verformten Kontinuum) , das Materialgesetz ist linear \Rightarrow lineare Theorie (lineare Verzweigungsprobleme, z.B. für die Berechnung von Knicklasten bei druckbeanspruchten Stäben oder Beullasten bei druckbeanspruchten Scheiben)
- Theorie 3.Ordnung: die Verformungen sind beliebig groß (Gleichgewicht am verformten Kontinuum) und/oder das Materialgesetz ist nichtlinear \Rightarrow nichtlineare Theorie.

Die o.a. Aussagen über die Arten der Gleichgewichtsbedingungen treffen für die klassischen Formulierungen der Grundgleichungen zu und gelten sinngemäß für Energie- und Variationsformulierungen.

Hier wird die Theorie 3.Ordnung betrachtet, ausschließlich für große Verformungen (Verschiebungen und Verdrehungen) bei kleinen Verzerrungen (lineares Materialgesetz). Gebietsbelastung (Streckenlast) wird nicht berücksichtigt. Abbildung 4.1 definiert Geometrie, Verformungen und zugehörige Schnittgrößen am differentiellen Element ds der Schwerpunktslinie eines schwach gekrümmten ($|z|_{\max}/r_1 \ll 1$), ebenen Balkens.

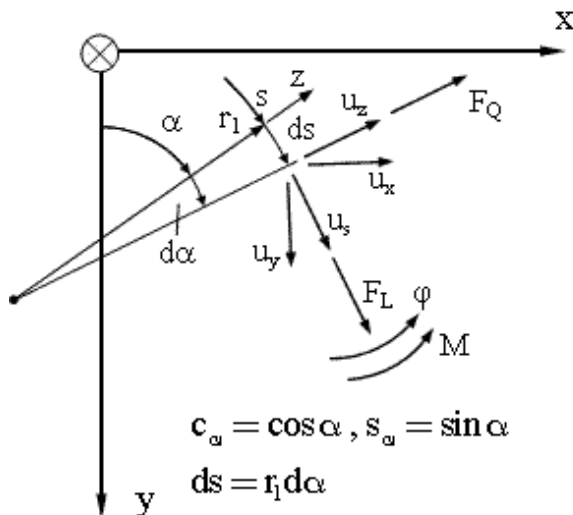


Abbildung 4.1: *Balkenelement, Definitionen*

element ds der Schwerpunktslinie eines schwach gekrümmten ($|z|_{\max}/r_1 \ll 1$), ebenen Balkens.

- s - Bogenkoordinate
- z - Koordinate der Querschnittsfläche
- r_1 - Krümmungsradius
- u_s, u_z - körperfeste Verschiebungen
- u_x, u_y - raumfeste Verschiebungen
- φ - Verdrehung
- F_L, F_Q - Längs-, Querkraft
- M - Biegemoment

Es wird das in 6.7 beschriebene Variationsprinzip in Zuwuchsformulierung verwendet.

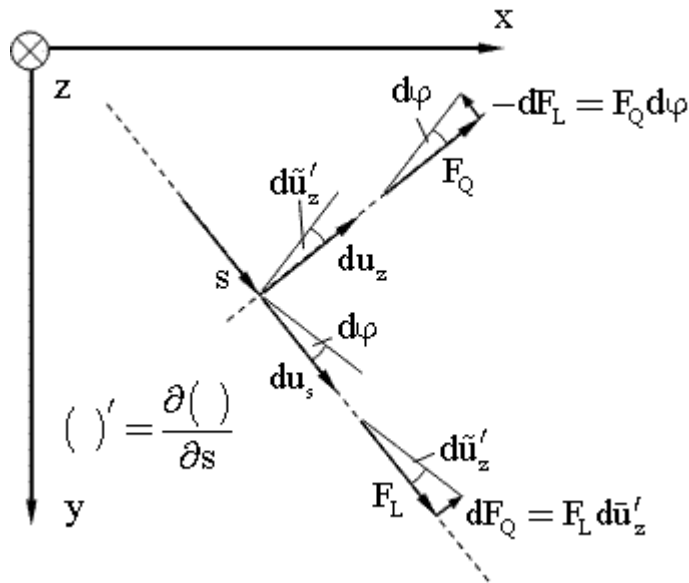


Abbildung 4.2: Drehglieder

Alle Gleichungen sind in physikalischen Koordinaten. Abbildung 4.2 definiert die Inkremente der körperfesten Verschiebungen und „Drehglieder“ der Schnittkräfte aus dem geometrisch nichtlinearen Glied. Das Drehglied der Längskraft F_L entsteht durch Drehung mit dem Inkrement $d\tilde{u}'_z$ und das der Querkraft F_Q mit $d\phi$. Diese Glieder resultieren ausschließlich aus den vor dem Aufbringen des jeweiligen Lastinkrements schon vorhandenen Schnittkräften. Dazu kommen noch die Inkremente, die sich aus dem Aufbringen des Lastinkrements ergeben.

Schon bei dieser 1D Struktur ist das (6.7.3) entsprechende geometrisch nichtlineare Glied in (4.2.3) mit den „Drehgliedern“ aus Abbildung 4.2 nicht vollständig anschaulich herzuleiten. Es fehlen $-F_Q du'_s \delta(d\phi)$ in (4.2.3) und analog dazu hier vernachlässigte Glieder für die Längskraft F_L und das Biegemoment M aus $\frac{1}{2} \sigma \dot{\epsilon}_L^2$.

Für die Inkremente der Verzerrungen gilt entsprechend (6.8.5)

$$\begin{aligned} d\epsilon_L &= d\tilde{u}'_s - d\phi' z, & d\tilde{u}'_s &= du'_x c_\alpha + du'_y s_\alpha \\ d\epsilon_D &= d\tilde{u}'_z, & d\tilde{u}'_z &= du'_x s_\alpha - du'_y c_\alpha \\ d\gamma_L &= d\tilde{u}'_z - d\phi \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

und entsprechend (6.7.3) wird für den Balken

$$\begin{aligned} \int \delta \tilde{U} dV &= 0 \Rightarrow \int \tilde{U} dV = \text{Min.}, & d() &= \frac{\partial()}{\partial t} dt = () \dot{} dt \\ \delta \tilde{U} &= \dot{\sigma} \delta \dot{\epsilon}_L + \dot{\tau} \delta \dot{\gamma}_L + \frac{1}{2} \left[\sigma \delta (\dot{\epsilon}_L^2 + \dot{\epsilon}_D^2) + \tau \delta (-\dot{\epsilon}_L \dot{\phi} - \dot{\phi} \dot{\epsilon}_L) \right] \\ \dot{\sigma} &= E \dot{\epsilon}_L, & \dot{\tau} &= G \dot{\gamma}_L \\ \tilde{U} &= \frac{1}{2} \left[(E + \sigma) \dot{\epsilon}_L^2 + G \dot{\gamma}_L^2 + \sigma \dot{\epsilon}_D^2 - \tau (\dot{\epsilon}_L \dot{\phi} + \dot{\phi} \dot{\epsilon}_L) \right], & E + \sigma &= (1 + \epsilon) E \approx E \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Integration über die Querschnittsfläche A ergibt

$$dV = dA ds, \quad \int dA = A, \quad \int z dA = 0, \quad \int z^2 dA = I \quad (4.2.3)$$

$$\int \sigma dA = F_L, \quad \int \tau dA = \kappa_s F_Q, \quad \kappa_s - \text{Schubfaktor} \left(\frac{5}{6} \text{ für Rechteckquerschn.} \right)$$

$$\int \delta U ds = 0 \Rightarrow \int U ds = \text{Min.}, \quad \dot{\gamma} = \dot{u}'_z - \dot{\varphi}, \quad \delta(\dot{\varphi} \dot{u}'_s) = \delta \dot{\varphi} \dot{u}'_s + \dot{\varphi} \delta \dot{u}'_s$$

$$\delta U = EA \dot{u}'_s \delta \dot{u}'_s + EI \dot{\varphi}' \delta \dot{\varphi}' + GA \kappa_s \dot{\gamma} \delta \dot{\gamma} + F_L \dot{u}'_z \delta \dot{u}'_z - F_Q \kappa_s \delta(\dot{\varphi} \dot{u}'_s)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[EA (\dot{u}'_s)^2 + EI \dot{\varphi}'^2 + GA \kappa_s \dot{\gamma}^2 \right] + \frac{1}{2} \left[F_L (\dot{u}'_z)^2 - F_Q \kappa_s (\dot{\varphi} \dot{u}'_s + \dot{u}'_s \dot{\varphi}) \right]$$

Aus (4.2.3) ergibt sich der Spezialfall für den (Fachwerk-)Stab, wenn man die Glieder mit $\dot{\varphi}'$ aus dem Krümmungsänderungsincrement, mit $\dot{\gamma}$ aus dem Winkeländerungsincrement und mit der Querkraft F_Q streicht. Zusätzlich ist das (i.a. vernachlässigbar kleine) Glied mit $(\dot{u}'_s)^2$ bei der Längskraft F_L entsprechend (4.2.2) aufgenommen, weil sich damit die Gleichungen vereinfachen. (Hat nur Bedeutung für die analytische Formulierung)

$$U = \frac{1}{2} EA (\dot{u}'_s)^2 + \frac{1}{2} F_L \left[(\dot{u}'_s)^2 + (\dot{u}'_z)^2 \right], \quad (\dot{u}'_s)^2 + (\dot{u}'_z)^2 = (\dot{u}'_x)^2 + (\dot{u}'_y)^2 \quad (4.2.4)$$

Wählt man für die Ortsabhängigkeit der Verschiebungsincremente $du_x(s,t)$ und $du_y(s,t)$ eines Inkrementes dt lineare Lagrangesche Polynome (3.1.1), ergibt sich analog (3.1.19)

$$\underline{d\mathbf{f}}^e(t) = \underline{\mathbf{K}}^e(t) \cdot \underline{d\mathbf{u}}^e(t), \quad \underline{d\mathbf{f}}^e = \begin{pmatrix} \underline{df}_{x0}^e \\ \underline{df}_{y0}^e \\ \underline{df}_{x1}^e \\ \underline{df}_{y1}^e \end{pmatrix}, \quad \underline{d\mathbf{u}}^e = \begin{pmatrix} \underline{du}_{x0}^e \\ \underline{du}_{y0}^e \\ \underline{du}_{x1}^e \\ \underline{du}_{y1}^e \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{K}}^e = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{jj}^e & \underline{\mathbf{K}}_{jk}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{kj}^e & \underline{\mathbf{K}}_{kk}^e \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

$$\underline{\mathbf{K}}_{jj}^e = \underline{\mathbf{K}}_{kk}^e = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 + \varepsilon & s_\alpha c_\alpha \\ s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{K}}_{jk}^e = \underline{\mathbf{K}}_{kj}^e = -\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 + \varepsilon & s_\alpha c_\alpha \\ s_\alpha c_\alpha & s_\alpha^2 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$s_\alpha = \sin \alpha_e, \quad c_\alpha = \cos \alpha_e, \quad \varepsilon = \frac{F_L}{EA}$$

die FE-Formulierung für die Inkremente des (Fachwerk-)Stabes e (mit großen Verformungen).

4.2.1 Lösungsmethoden am Beispiel biegestarrer Druckstab

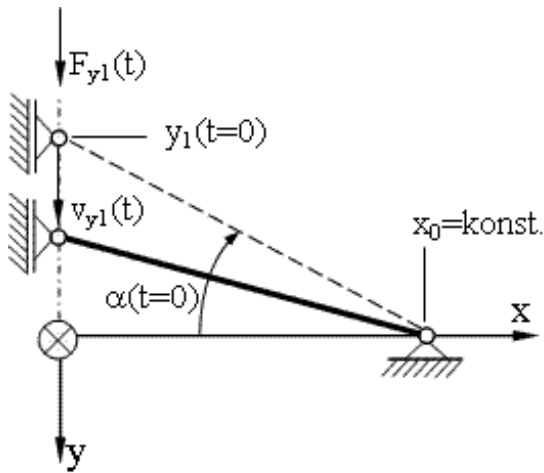


Abbildung 4.3 zeigt das Berechnungsmodell. Es besteht aus nur einem FE entsprechend (4.2.5). Die globalen Knotennummern sind 1 und 2. Der Anfangsknoten 1 wird mit der Kraft F_{y1} belastet und kann sich in Richtung y frei verschieben. Der Endknoten 2 ist gelenkig gelagert.

Die dimensionslosen Modellparameter sind:

Elastizitätsmodul $E=10^3$, Querschnittsfläche $A=0.1$, Anfangslänge $L_0=L(t=0)=10$, Anfangswinkel $\alpha_0=\alpha(t=0)=20^\circ$.

Abbildung 4.3: Stab nichtlinear

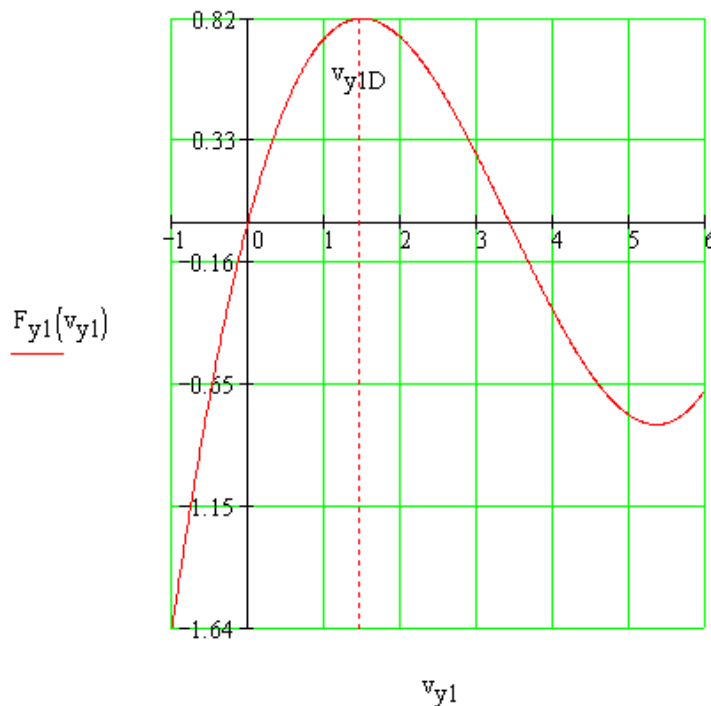
Das System hat den Freiheitsgrad 1. Die zugehörige FE-Gleichung für die Inkremente wird zu

$$dF_{y1}(t) = \frac{EA}{L(t)} [s_\alpha^2(t) + \varepsilon(t)] dv_{y1}(t) \quad (4.2.1.1)$$

Die exakte analytische Lösung ist in (4.2.1.2) und das zugehörige Last-Verschiebungs-Diagramm in Abbildung 4.4. dargestellt.

$$F_{y1}(v_{y1}) = EA \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v_{y1}}{L_0} \sin \alpha_0 + \left(\frac{v_{y1}}{L_0} \right)^2}} - 1 \right) \left(\sin \alpha_0 - \frac{v_{y1}}{L_0} \right) \quad (4.2.1.2)$$

Es handelt sich um ein Durchschlagproblem. Im Nachfolgenden werden für dieses Modell verschiedene Lösungsmethoden der FEM vergleichend gegenübergestellt.



Durchschlagpunkt bei:

$$F_{y1}(v_{y1D}) = 0.8187 \quad v_{y1D} = 1.4865$$

$$\alpha_D = 11.6282^\circ$$

Abbildung 4.4: Stab nichtlinear, exakte Lösung

stimmen. Die Steifigkeitsmatrix muß für jeden Lastschritt neu aufgebaut werden. Konvergiert bei starker Nichtlinearität nur bei großer Lastschrittzahl gegen die exakte Lösung.

- Vorteil: Ergibt Zwischenergebnisse für den gesamten Belastungsvorgang (für jeden Lastschritt).
- 2. iterative Methode mit konstanter Steifigkeitsmatrix: Die Steifigkeitsmatrix wird nur einmal berechnet. Es wird die volle Last F_{y1} in einem Schritt aufgebracht, mit $F_L(t=0)=EA\varepsilon(t=0)=0$. Damit ergibt sich die lineare Lösung (Theorie 1.Ordnung). Die Geometrie y_1 und die Dehnung ε werden mit den sich ergebenden Verformungen aktualisiert. Zu dieser Geometrie (und der zugehörigen Längskraft $F_L=EA\varepsilon$) steht aber nur ein Teil der äußeren Last F_{y1} im Gleichgewicht, die GGB ist also nicht erfüllt. Der nicht im Gleichgewicht stehende Teil von F_{y1} (Restkraft) wird nun erneut aufgebracht. Diese Vorgehensweise wird solange wiederholt, bis die Restkraft oder der Verschiebungszuwachs in einem Iterationsschritt unter eine vorgegebene Genauigkeitsforderung fallen.
- Vorteil: Steifigkeitsmatrix muß nur einmal aufgebaut werden. Konvergiert immer gegen die exakte Lösung.
- Nachteil: Ergibt keine Zwischenergebnisse für die Belastung (keine Lastschritte). Relativ große Zahl von Iterationsschritten notwendig.

1. inkrementelle Methode: Die Last wird in mehreren Lastschritten aufgebracht. Die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}(t)$ wird mit der Geometrie $y_1(t)=y_1(t-dt)+dv_{y1}(t-dt)$ und der Längskraft $F_L(t)=F_L(t-dt)+dF_L(t-dt)$, $dF_L(t-dt)=EA d\varepsilon(t-dt)$ aufgebaut, die am Ende des vorigen Lastschrittes gültig sind. Damit wird das Problem stückweise linearisiert.

- Nachteile: Die Größe geeigneter Lastinkremente dF_L ist nur schwer vorauszubestimmen.

3. iterative Methode mit variabler Steifigkeitsmatrix: wie 2., aber es wird jeder Iterationsschritt mit der aktuellen (Tangenten-)Steifigkeitsmatrix berechnet.
 - Nachteil gegenüber 2.: Steifigkeitsmatrix muß für jeden Iterationsschritt neu aufgebaut werden.
 - Vorteil gegenüber 2.: Geringere Zahl von Iterationsschritten notwendig.
4. gemischte Methode mit konstanter Steifigkeitsmatrix: Die Last wird wie in 1. in Lastschritten aufgebracht. In jedem Lastschritt wird, wie in 2. (mit für den Lastschritt konstanter Steifigkeitsmatrix => die Steifigkeitsmatrix wird für jeden Lastschritt nur einmal berechnet) solange iteriert, bis die GGB erfüllt ist.
5. gemischte Methode mit variabler Steifigkeitsmatrix: wie 4., aber es wird in jedem Lastschritt mit variabler Steifigkeitsmatrix iteriert.

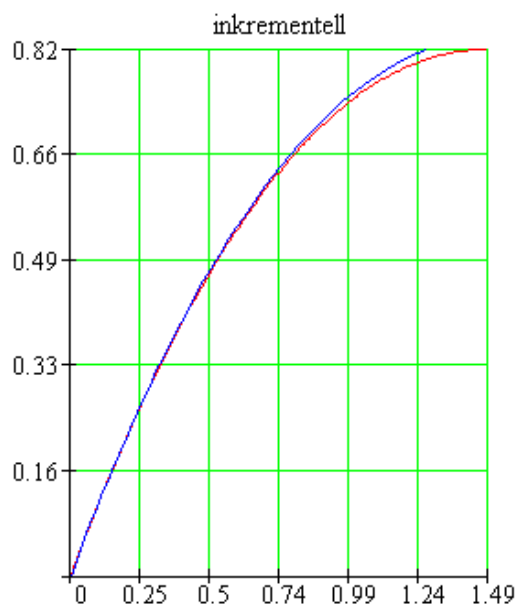


Abbildung 4.5: inkrementelle Methode

Abbildung 4.5 zeigt die Lösung nach der inkrementellen Methode. Die Last F_{y1_end} wurde in 50 gleich großen Inkrementen aufgebracht. Mit zunehmender Zahl an Inkrementen konvergiert die Lösung gegen die exakte Lösung.

Die gemischten Methoden (inkrementelles Aufbringen der Last, iterative Methode innerhalb jedes Lastschrittes) verbinden die Vorteile der inkrementellen und der iterativen Methoden und vermindern deren Nachteile.

Nachfolgend ist das Beispiel aus Abbildung 4.3 mit jeder der o.a. Methoden gelöst worden. Der Endwert der vorgegebenen Last ist $F_{y1_end}=0.82$. Dieser Wert ist schon oberhalb der exakten Durchschlagslast von $F_{y1}(v_{y1D})=0.8187$. Ab dieser Last wird die exakte Lösung instabil (, der Stab schlägt durch).

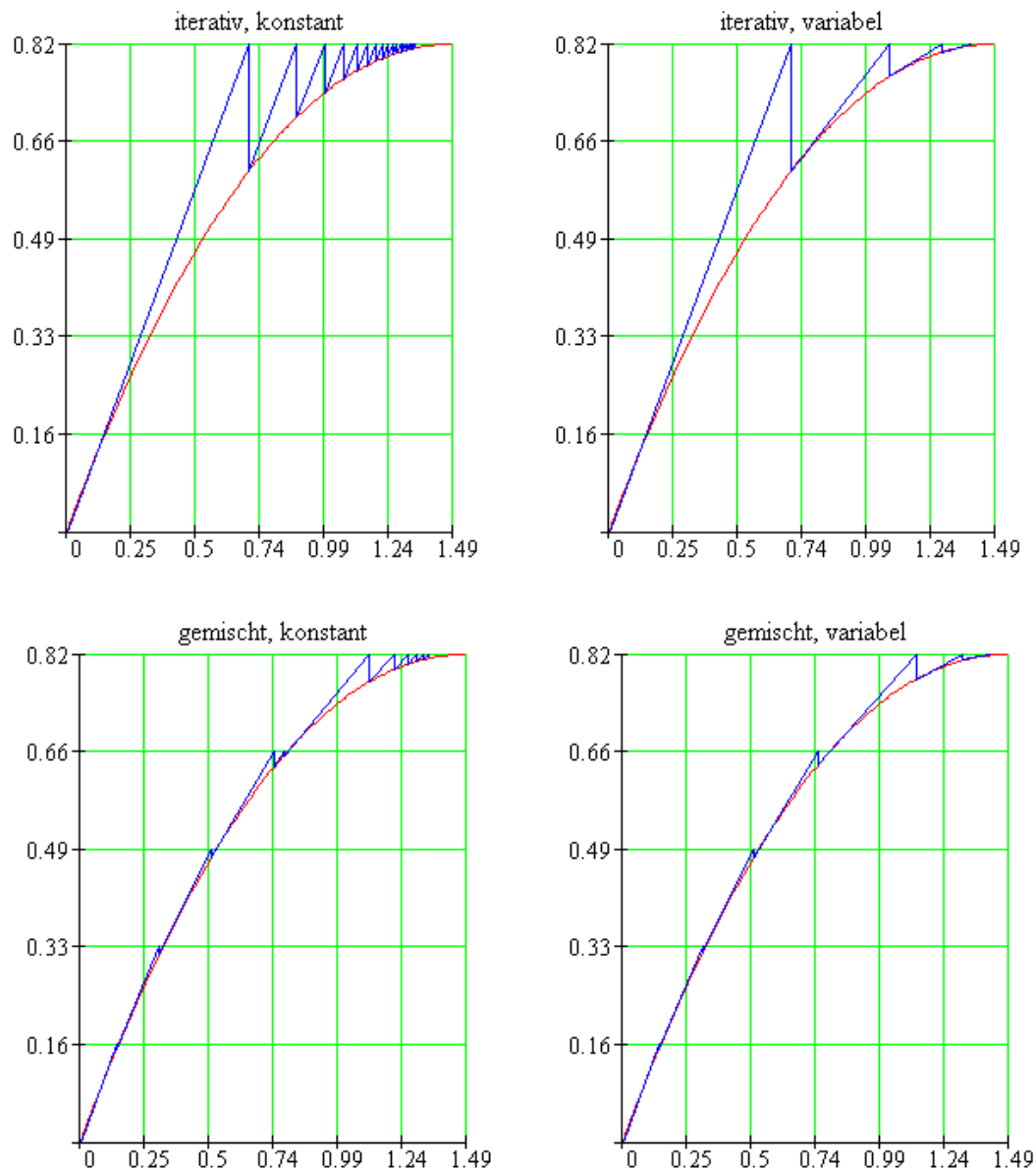


Abbildung 4.6: *iterative und gemischte Methoden*

Die Iterationen in Abbildung 4.6 wurden in jedem Lastschritt abgebrochen, wenn die Restkraft des Lastschrittes geringer ist als 1% der vorgegebenen Endkraft $F_{y1_end}=0.82$. Wegen des geringen Gradienten der exakten Lösung im Bereich der Endkraft ist die Verformung noch entsprechend ungenau. Die zu Abbildung 4.5 und Abbildung 4.6 gehörigen Zahlenwerte sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Die Anzahlen der durchgeführten Iterationen lassen sich in Abbildung 4.6 wegen der geringen Auflösung nicht eindeutig erkennen. Mit jeder der 5 vorgestellten Methoden kann die exakte Lösung (für praktische Erfordernisse) beliebig genau angenähert werden, wobei die inkrementelle Methode wegen des dafür erforderlichen hohen numerischen Aufwandes nur für kleine Systeme verwendet werden sollte.

	Anzahl Lastschritte	Anzahl Iterationen	$F_{y1 \max}$	$V_{y1 \max}$
inkrementell	50	0	0.8200	1.2712
iterativ, konstant	1	18	0.8120	1.3424
iterativ, va- riabel	1	4	0.8159	1.3936
gemischt, konstant	5	14	0.8120	1.3423
gemischt, variabel	5	11	0.8168	1.4088
exakt			0.8187	1.4865

Tabelle 4.2: Zahlenwerte zu den verschiedenen Methoden

4.2.2 schubweicher, gekrümmter Balken

In 3.3 wurde die Steifigkeitsmatrix für ein gerades schubstarres Balkenelement mit Hermiteschen Polynomen (3.3.4) (spezielle Polynome 3.Ordnung) als Ansatzfunktionen hergeleitet. Hier wird ein FE-Element entsprechend (4.2.3) (siehe hierzu auch 6.7 und 6.8) für einen gekrümmten, schubweichen Balken verwendet. Dieses enthält als Spezialfall das (bewährte) schubstarre Element aus 3.3. Für die Geometrie $x(\mu)$, $y(\mu)$ und für die Verschiebungssinkremente $dv_x(\mu)$, $dv_y(\mu)$ ($0 \leq \mu \leq 1$) werden isoparametrische Ansätze mit Lagrangeschen Polynomen 3.Ordnung mit den 4 Knoten bei $\mu=0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ und für das Inkrement der Verdrehung $d\phi(\mu)$ Lagrangesche Polynome 2.Ordnung mit den 3 Knoten bei $\mu=0, \frac{1}{2}, 1$ gewählt. Damit ist auch die Bernoulli-Hypothese des schubstarren Balkens mit $dy_L=0$ aus (4.2.1) als Spezialfall enthalten. Das FE hat den Freiheitsgrad 11, jeweils 4 Verschiebungssinkremente in x- und y-Richtung und 3 Verdrehungssinkremente in ϕ Richtung. Die insgesamt 4 Verschiebungssinkremente an den inneren Knoten $\mu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ und das Verdrehungssinkrement am inneren Knoten $\mu = \frac{1}{2}$ werden durch statische Kondensation entsprechend 3.5.2 eliminiert. Das dadurch entstehende FE hat ebenfalls den Freiheitsgrad 6 wie das FE aus 3.3.

4.2.3 Beispiel: Nachbeulverhalten eines Druckstabes

Mit dem in 4.2.2 beschriebenen FE wurde das elastische Nachbeulverhalten eines Druckstabes mit Rechteckquerschnitt $A=bh$ simuliert, Abb. 4.7. Die dimensionslosen Modellparameter sind: Länge $L=75$, Höhe $h=2$, Elastizitätsmodul $E=2 \cdot 10^5$, kritische

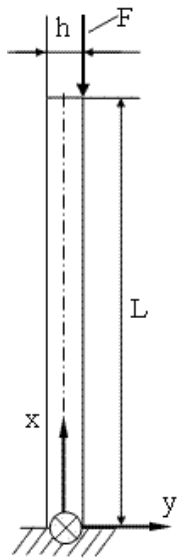


Abb. 4.7:
Druckstab

Eulerlast $\frac{F_{kr}}{b} = \frac{EI\pi^2}{b(2L)^2} = 58.487$, maximale Kraft $F_{max}=1.1F_{kr}$, Ex-

zentrizität der Lasteinleitung $= \frac{h}{2}$, Diskretisierung mit 30 FE der

Länge 2.5. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.8 dargestellt, links die verformte Geometrie der Schwerpunktlinie bei $F=F_{max}$ und rechts die Lastschritte (entspricht der Kraft F) über der zugehörigen Verschiebung v_y des Flächenschwerpunktes des Querschnittes mit der Lasteinleitung. Die Verschiebung dieses Punktes in Richtung y ist $v_{ymax}=42.588$. Es wurde die inkrementelle Methode verwendet, um die Last-Verformungskurve (ohne Iterationen) zu erhalten. Dabei wurde die Kraft F_{max} in 1200 gleichen Inkrementen aufgebracht. Da dafür keine exakte analytische Lösung existiert, wurde das gleiche Problem zum Vergleich mit dem FE-System ANSYS mit gleicher Anzahl FE gerechnet (Element BEAM3, gemischte Methode, $v_{ymax}=42.384$). Der Unterschied beider Rechnungen ist 0.5%. Bei 2400 gleichen Lastinkrementen ist der Unterschied noch 0.3%.

Mit kleiner werdender Exzentrizität (oder anderer Imperfektionen, wie z.B. Vorkrümmung des Stabes oder Materialinhomogenitäten) nähert sich die Kurve im Last-Verformungs-Diagramm dem Verzweigungspunkt der kritischen Eulerlast an. Das Gleichgewicht des Eulerstabes im Verzweigungspunkt ist stabil, da die Verformungszunahme mit einer Lastzunahme verbunden ist. Bei Voraussetzung linearer Material-elastizität sind noch Tragreserven vorhanden.

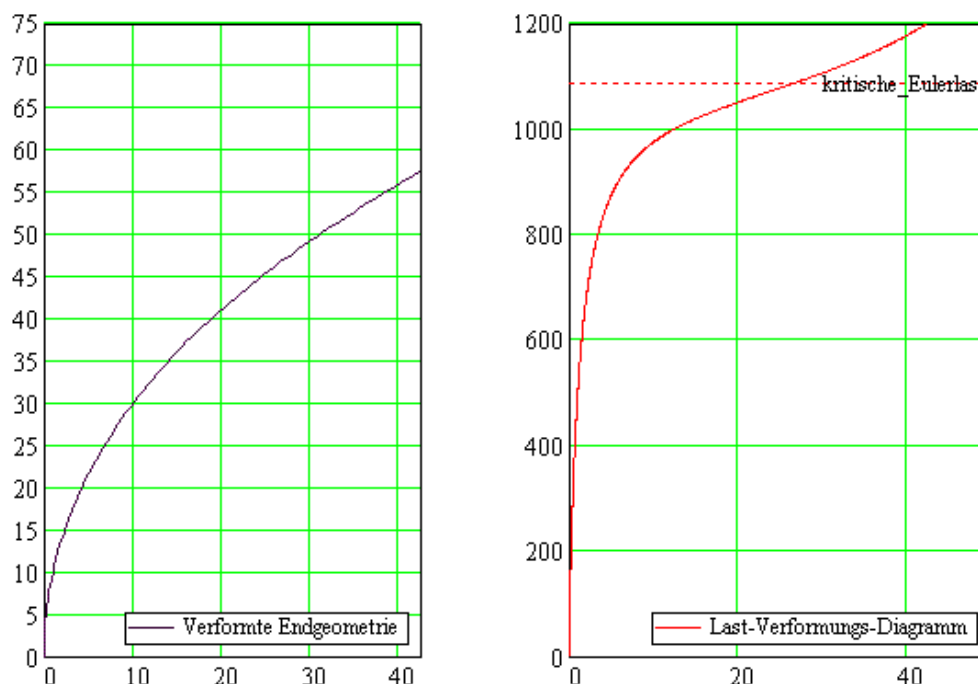


Abbildung 4.8: Druckstab, Nachbeulverhalten

5 Methode der Randelemente (REM)

Grundlage der REM ist 2.3, die Inverse Form der Methode der gewichteten Residuen mit der Dgl (6.11.1). Das Ziel ist, die Dimension des Feldproblems um Eins zu reduzieren. Aus einem nD -Feldproblem wird bei Anwendung der REM ein $(n-1)D$ -Feldproblem ($n=1,2,3$). Damit kann für viele Probleme („kleiner“ $(n-1)D$ -Rand bei „großem“ nD -Gebiet) der Diskretisierungsaufwand erheblich gesenkt werden. Beim 3D-Volumenproblem muss nur die 2D-Oberfläche und beim 2D-Flächenproblem nur die 1D-Randkontur diskretisiert werden. Beim 1D-Problem liefert die REM die exakte Lösung, da auf den 0D-Randpunkten keine Diskretisierung erforderlich ist. In 2.3 ist schon das 1D-„Beispiel Zugstab“ mit der REM gelöst worden. Allerdings bleiben in dem Gleichungssystem (2.3.9) noch nD -Gebietsintegrale ($n=1$), falls das Gebiet nicht quellenfrei ($p=0$) ist. In diesem Fall muss also i.a., um diese Gebietsintegrale auswerten zu können, doch eine Gebietsdiskretisierung durchgeführt werden und ein Teil des Vorteiles der REM gegenüber der FEM geht verloren.

Die Steifigkeitsmatrix der FEM ist symmetrisch und hat i.a. eine Bandstruktur (Vorteil). Die Systemmatrix der REM ist nicht symmetrisch und voll besetzt (Nachteil).

Das Ergebnis der näherungsweisen Lösung der RWA mit der REM sind die diskreten Werte der Ansatzfunktionen auf dem Rand des Gebietes. Wenn auch Werte der Feldgrößen im Gebiet benötigt werden, ist zur Berechnung dieser Werte aus den Randwerten auch eine (nachfolgende) Diskretisierung des Gebietes notwendig.

Bei der REM muss immer eine Fundamentallösung der Dgl der RWA vorhanden sein.

Vorteilhaft lässt sich die REM auch für Außenraumprobleme, d.h. für Probleme mit nicht begrenztem Gebiet („unendliches Gebiet“ oder „halbunendliches Gebiet“) anwenden, wenn die Fundamentallösung ins Unendliche auf Null abklingt, wie z.B. die Lösungen aus 6.11.2, 6.11.4 und 6.11.7. Dann wird nur der „endliche“ Rand (falls vorhanden) diskretisiert. Bei der FEM muss bei derartigen Problemen ein „hinreichend“ großes Gebiet diskretisiert werden. „Hinreichend“ bedeutet, dass die Randstörungen durch die RB auf diesem „hinreichend“ entfernten Rand auf das interessierende Gebiet mit dem „endlichen“ Rand praktisch keine Auswirkungen haben.

Die nachfolgend vorgestellten 1D-REM-Formulierungen haben keine praktische Bedeutung. Dafür existieren exakte Lösungen der zugehörigen RWA ohne den „Umweg“ über die inverse Form der Methode der gewichteten Residuen. Zum allgemeinen Verständnis der REM sind sie aber durchaus geeignet.

5.1 Zugstab

Es ist die spezielle RWA für einen Zugstab (oberer Teil von Abbildung 5.1) zu lösen. An den Rändern x_R sind entweder u_R oder F_R vorgegeben ($R=a,b$). Die Fundamentallösung für den Zugstab ohne elastische Stützung ist in 6.11.1.

Im Folgenden wird diese nochmals anschaulich am zugehörigen physikalischen Modell hergeleitet.

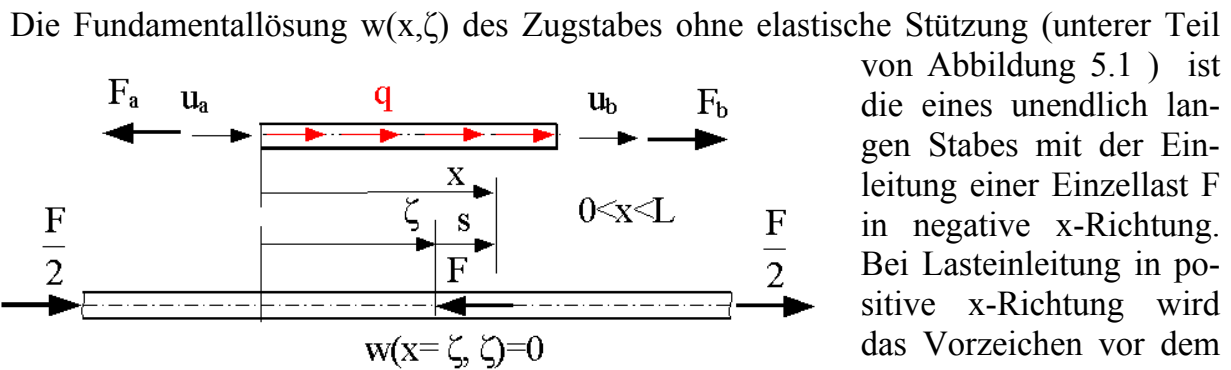


Abbildung 5.1: Zugstab, Modell für die REM

$$EA \cdot \Delta \tilde{w}(x, \zeta) = EA \cdot \tilde{w}''(x, \zeta) = -q(r), \quad (5.1.1)$$

$$\text{mit: } r = |s|, \quad s = x - \zeta, \quad F = - \int_{-\infty}^{\infty} q(r) ds, \quad q(r) = \begin{cases} -\infty & \text{für } r = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_L(x, \zeta) = EA \cdot \tilde{w}'(x, \zeta)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{RB für } s=0: \quad \tilde{w}(x = \zeta, \zeta) &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_L(x = \zeta, \zeta - \varepsilon) &= -\frac{F}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_L(x = \zeta, \zeta + \varepsilon) &= \frac{F}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{w}(x, \zeta) = \frac{F}{2EA} \cdot |s|, \quad [\tilde{w}] = m$$

$$\text{normiert mit } F \Rightarrow w^*(x, \zeta) = \frac{1}{F} \tilde{w}(x, \zeta) = \frac{1}{2EA} \cdot |s|, \quad [w^*] = \frac{m}{N}$$

Durch Multiplikation der Fundamentallösung $w^*(x, \zeta)$ mit EA ergibt sich die Fundamentallösung $w(x, \zeta)$ aus (6.11.1.3). Diese hat folgende Eigenschaften:

$$w(x, \zeta) = EA w^*(x, \zeta) = \frac{1}{2} \cdot |s|, \quad w'(x, \zeta) = \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(s), \quad [w] = m \quad (5.1.2)$$

$$\Delta w(x, \zeta) = \delta(r), \quad \delta(r) - \text{Dirac-Impuls} \left[m^{-1} \right]$$

$$\Delta w(x, \zeta) ds = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \zeta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Delta w(x, \zeta) ds = 1$$

Das Integral aus (5.1.2) enthält die Normierungsbedingung für den Dirac-Impuls.

Über die Inverse Form der Methode der gewichteten Residuen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int (EA \cdot \Delta u) w^* dx &= - \int q w^* dx, & x_a < x < x_b & \quad (5.1.3) \\
 &= EA \left[u' w^* - u w^{*'} \right]_{x_a}^{x_b} + \int (EA \cdot \Delta w^*) u dx = - \int q w^* dx \\
 \int (EA \cdot \Delta w^*(x, \zeta)) u(x) dx &= \int \delta(x - \zeta) \cdot u(x) dx = u(\zeta) \\
 u(\zeta) &= - \int q w^*(x, \zeta) dx - EA \left[u'(x) w^*(x, \zeta) - u(x) w^{*'}(x, \zeta) \right]_{x_a}^{x_b}
 \end{aligned}$$

Es werden noch die Längskräfte und die Längsverschiebungen an den Rändern eingeführt:

$$\begin{aligned}
 u_R &= u(x_R), & F_{LR} &= EA u'(x_R), & R &= a, b & \quad (5.1.4) \\
 w_R^*(\zeta) &= w^*(x_R, \zeta), & F_{LR}^*(\zeta) &= EA w^{*'}(x_R, \zeta), & [w_R^*] &= \frac{m}{N}, & [F_{LR}^*] &= 1
 \end{aligned}$$

Die beiden noch unbekannten Randwerte u_R oder F_{LR} jeweils einer am Rand $x_R = x_a$ und einer am Rand $x_R = x_b$ werden durch die Lage des Quellpunktes im unendlich langen Stab jeweils auf $\zeta = \zeta_a$ oder $\zeta = \zeta_b$ aus den 2 Gleichungen (5.1.5) bestimmt.

$$\begin{aligned}
 \zeta_a &= x_a + \varepsilon, & \zeta_b &= x_b - \varepsilon, & \varepsilon \rightarrow 0 &\Rightarrow u(\zeta_R) \approx u_R & \quad (5.1.5) \\
 \underline{0} &= \underline{H} - \underline{M}_a \tilde{y}(x_a) + \underline{M}_b \tilde{y}(x_b), & \tilde{y}(x_R) &= (u_R \quad F_{LR})^T \\
 \underline{M}_a &= \begin{bmatrix} F_{La}^*(\zeta_a) + 1 & -w_a^*(\zeta_a) \\ F_{La}^*(\zeta_b) & -w_a^*(\zeta_b) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{L}{EA} \end{bmatrix} \\
 \underline{M}_b &= \begin{bmatrix} F_{Lb}^*(\zeta_a) & -w_b^*(\zeta_a) \\ F_{Lb}^*(\zeta_b) - 1 & -w_b^*(\zeta_b) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{EA} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & \underline{H} &= - \begin{bmatrix} \int q w^*(x, \zeta_a) dx \\ \int q w^*(x, \zeta_b) dx \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Fundamentallösung w^* ist in den Quellpunkten unstetig und hat den Wert Null. Die Längskraft F_L^* ist dort singulär. Deshalb werden die Punkte zur Berechnung der Randwerte für x_a und x_b mit $\varepsilon \rightarrow 0$ randnah ins Gebiet geschoben. Das entspricht dem links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von F_L^* auf den Rändern x_a und x_b .

Das Gleichungssystem (5.1.5) gilt allgemein, also auch für entsprechende RWA mit anderen RB. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzt man $x_a = 0$, $x_b = L$. Wenn man (5.1.3) mit der Kraft F multipliziert ergibt sich der Satz von Maxwell-Betti aus 6.4

$$\int q \tilde{w}(x, \zeta) dx + F_{Lb} \tilde{w}_b(\zeta) - F_{La} \tilde{w}_a(\zeta) = -F(\zeta) u(\zeta) + \tilde{F}_{Lb}(\zeta) u_b - \tilde{F}_{La}(\zeta) u_a \quad (5.1.6)$$

Das „Beispiel Zugstab“ ist mit der entsprechenden Fundamentallösung mit elastischer Stützung aus 6.11.2 in 2.3.

5.2 Biegebalken

5.2.1 mit elastischer Bettung

Analog zu Abbildung 5.1 gibt es das endliche Gebiet des Biegebalkens der speziellen RWA für die Durchbiegung $w(x)$ und das unendliche Gebiet des Biegebalkens der Fundamentallösung aus (6.11.4.2) für $w^*(x, \zeta)$.

Die Dgl für den Biegebalken mit elastischer Bettung, der Biegesteifigkeit EI [Nm^2], der Durchbiegung w [m], der Steifigkeit der elastischen Stützung c [N/m^2] und der Streckenlast q [N/m] und die zugehörige Inverse Form sind

$$\text{Dgl: } EI \cdot w'''' + c \cdot w - q = 0, \quad ()' = \frac{d()}{dx}, \quad x_a < x < x_b \quad (5.2.1)$$

$$\text{Gewichtetes Residuum: } \int (EI \cdot w'''' + c \cdot w - q) w^* dx = 0$$

Inverse Form mit Fundamentallösung : $w^*(x, \zeta)$

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \int \delta(x - \zeta) w(x) dx = \int \left(EI \cdot w(x, \zeta)'''' + c \cdot w^*(x, \zeta) \right) w(x) \cdot dx \\ &= \int q \cdot w^* dx + EI \left(-w'''' w^* + w''' w^{*'} - w'' w^{*''} + w' w^{*'''} \right) \Big|_{x=x_a}^{x=x_b} \end{aligned}$$

Führt man die Verdrehung $\varphi(x)$, das Biegemoment $M(x)$ die Querkraft $F_q(x)$ und analog dazu die entsprechenden Größen der Fundamentallösung $\varphi^*(x, \zeta)$, $M^*(x, \zeta)$ und $F_q^*(x, \zeta)$ ein

$$\varphi(x) = w'(x), \quad \varphi^*(x, \zeta) = w^{*'}(x, \zeta), \quad (5.2.2)$$

$$M(x) = -EI w''(x), \quad M^*(x, \zeta) = -EI w^{*''}(x, \zeta)$$

$$F_q(x) = -EI w'''(x), \quad F_q^*(x, \zeta) = -EI w^{*'''}(x, \zeta)$$

werden aus der inversen Form von (5.2.1) die Durchbiegung $w(\zeta)$, und die Verdrehung $\varphi(\zeta)$, an der Stelle $x=\zeta$ in der Form (5.2.3)

$$w(\zeta) = \int q \cdot w^* dx + \quad (5.2.3)$$

$$+ \left(F_q w^* - M \varphi^* + \varphi M^* - w F_q^* \right) \Big|_{x=x_a}^{x=x_b} - \left(F_q w^* - M \varphi^* + \varphi M^* - w F_q^* \right) \Big|_{x=x_a}$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} = w_{,\zeta} = \int q \cdot w_{,\zeta}^* dx +$$

$$+ \left(F_q w_{,\zeta}^* - M \varphi_{,\zeta}^* + \varphi M_{,\zeta}^* - w F_{q,\zeta}^* \right) \Big|_{x=x_b} - \left(F_q w_{,\zeta}^* - M \varphi_{,\zeta}^* + \varphi M_{,\zeta}^* - w F_{q,\zeta}^* \right) \Big|_{x=x_a}$$

Alle Größen mit * sind aus der Fundamentallösung (6.11.4.2) bekannt. Die RB aus (6.11.4.2) für den Dirac-Impuls ist hier eine für den Querkraftsprung mit dem Wert F

$$\text{RB: } F_q^* = -EI \cdot w^{*'''}, \quad \frac{4\alpha^4 EI}{c} = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt[4]{\frac{c}{4EI}}, \quad [\alpha] = \frac{1}{m} \quad (5.2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_q^*(-\varepsilon) &= \frac{F}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_q^*(+\varepsilon) &= -\frac{F}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_3 = \frac{F}{8\alpha^3 \cdot EI} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} F, \quad [w_3] = m$$

Damit wird die Fundamentallösung w^* mit $c_\alpha = \cos(\alpha|s|)$, $s_\alpha = \sin(\alpha|s|)$ und der Normierung mit der beliebigen Kraft F

$$w^*(x, \zeta) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} e^{-\alpha|s|} \cdot (c_\alpha + s_\alpha), \quad [w^*] = \frac{m}{N} \quad (5.2.5)$$

$$\varphi^*(x, \zeta) = w^{*'}(x, \zeta) = -\frac{\alpha^2}{c} \text{sign}(s) \cdot e^{-\alpha|s|} \cdot s_\alpha, \quad [\varphi^*] = \frac{1}{N}$$

$$M^*(x, \zeta) = -EI w^{*''}(x, \zeta) = -EI \frac{\alpha^3}{c} e^{-\alpha|s|} \cdot (s_\alpha - c_\alpha), \quad [M^*] = m$$

$$F_q^*(x, \zeta) = -EI w^{*'''}(x, \zeta) = -2EI \frac{\alpha^4}{c} \text{sign}(s) \cdot e^{-\alpha|s|} \cdot c_\alpha, \quad [F_q^*] = 1$$

Vier der acht Randwerte aus den RB der RWA: $(F_q \text{ oder } w)_R$ und $(M \text{ oder } \varphi)_R$, $R=x_a, x_b$ sind bekannt und vier unbekannt. Deshalb werden die Gleichungen (5.2.3) analog zu (2.3.7) für die im Gebiet randnahen Punkte der Einleitung des Dirac-Impulses in den unendlich langen Balken $\zeta=\zeta_a$ und $\zeta=\zeta_b$ formuliert.

Die singulären Quellpunkte ζ_i , $i=a, b$ dürfen nicht genau auf dem Rand liegen und werden mit der kleinen Größe $\varepsilon \rightarrow 0$ sehr randnah ins Gebiet (auf dem unendlich langen Balken) geschoben. Natürlich kann man stattdessen auch die entsprechenden links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Funktionen (5.2.6) bilden.

$$\zeta_a = x_a + \varepsilon, \quad \zeta_b = x_b - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll L, \quad x_a = 0, \quad x_b = L, \quad i = a, b \quad (5.2.6)$$

$$\underline{y}^*(x, \zeta) = \begin{pmatrix} -F_q^*(x, \zeta) & M^*(x, \zeta) & w^*(x, \zeta) & -\varphi^*(x, \zeta) \end{pmatrix}^T, \quad \underline{y}_{,\zeta}^*(x, \zeta) = \frac{\partial \underline{y}^*(x, \zeta)}{\partial \zeta}$$

$$\underline{\tilde{y}}(x) = \begin{pmatrix} w(x) & \varphi(x) & F_q(x) & M(x) \end{pmatrix}^T$$

$$w(x_i) \approx w(\zeta_i) = \int q(x) w^*(x, \zeta_i) dx + \left(\underline{\tilde{y}}^T(x) \cdot \underline{y}^*(x, \zeta_i) \right) \Big|_{x=x_a}^{x=x_b}$$

$$\varphi(x_i) \approx \varphi(\zeta_i) = \int q(x) w_{,\zeta}^*(x, \zeta_i) dx + \left(\underline{\tilde{y}}^T(x) \cdot \underline{y}_{,\zeta}^*(x, \zeta_i) \right) \Big|_{x=x_a}^{x=x_b}$$

Das sind vier Gleichungen, je 2 für $x=x_a$ und $x=x_b$ zur Berechnung der vier noch unbekannten Randwerte der RWA. Daraus lässt sich ein (2.3.9) analoges Gleichungssystem aufstellen.

Aus (5.2.6) kann durch Umsortierung das Gleichungssystem

$$\underline{H} - \underline{M}_R(x_a) \cdot \underline{\tilde{y}}(x_a) + \underline{M}_R(x_b) \cdot \underline{\tilde{y}}(x_b) = \underline{0} \quad (5.2.7)$$

mit

$$\underline{M}_R(x) = \begin{bmatrix} -F_q^*(x, \zeta_a) + I_a & M^*(x, \zeta_a) & w^*(x, \zeta_a) & -\varphi^*(x, \zeta_a) \\ -F_q^*(x, \zeta_b) - I_b & M^*(x, \zeta_b) & w^*(x, \zeta_b) & -\varphi^*(x, \zeta_b) \\ -F_{q,\zeta}^*(x, \zeta_a) & M_{,\zeta}^*(x, \zeta_a) + I_a & w_{,\zeta}^*(x, \zeta_a) & -\varphi_{,\zeta}^*(x, \zeta_a) \\ -F_{q,\zeta}^*(x, \zeta_b) & M_{,\zeta}^*(x, \zeta_b) - I_b & w_{,\zeta}^*(x, \zeta_b) & -\varphi_{,\zeta}^*(x, \zeta_b) \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

$$I_a = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_a \\ 0 & \text{für } x = x_b \end{cases}, \quad I_b = \begin{cases} 0 & \text{für } x = x_a \\ 1 & \text{für } x = x_b \end{cases}$$

$$\underline{H} = \left[\int q \cdot w^*(x, \zeta_a) dx \quad \int q \cdot w^*(x, \zeta_b) dx \quad \int q \cdot w_{,\zeta}^*(x, \zeta_a) dx \quad \int q \cdot w_{,\zeta}^*(x, \zeta_b) dx \right]^T$$

für die vier noch unbekannten Randwerte formuliert werden.

Es gibt eine effektive Möglichkeit, dieses Gleichungssystem (5.2.7) für beliebige RB der RWA mittels einer Übertragungsmatrix $\underline{\ddot{U}}$ zu lösen. Die Formulierung (5.2.9) ergibt sich aus (5.2.7) durch Erweitern des Vektors $\underline{\tilde{y}}(x)$ um eine Komponente „1“, Umstellung des daraus resultierenden Gleichungssystems und Einführung der RB mit den Matrizen \underline{R}_a und \underline{R}_b . Der Vektor \underline{v} enthält die zwei am Anfangsrand x_a unbekannten Randwerte.

$$\underline{B} \cdot \underline{y}(x_b) - \underline{A} \cdot \underline{y}(x_a) = \underline{0} \quad (5.2.9)$$

$$\underline{y}(x_b) = \underline{\ddot{U}} \cdot \underline{y}(x_a), \quad \underline{y}(x) = \left[\underline{\tilde{y}}(x)^T \quad 1 \right]^T = \left[w(x) \quad \varphi(x) \quad F_q(x) \quad M(x) \quad 1 \right]^T$$

$$\underline{\ddot{U}} = \underline{B}^{-1} \underline{A}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{M}_R(x_b) & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{M}_R(x_a) & -\underline{H} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{RB: } \underline{y}(x_a) = \underline{R}_a \cdot \underline{v}, \quad \underline{v} = [v_1 \quad v_2 \quad 1]^T$$

$$\underline{R}_b \cdot \underline{y}(x_b) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{G} \cdot \underline{v} = \underline{b} \Rightarrow \underline{v} = \underline{G}^{-1} \underline{b} \quad \text{mit} \quad \underline{G} = \underline{R}_b \underline{\ddot{U}} \underline{R}_a, \quad \underline{b} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Damit sind die Vektoren der Randwerte vollständig bekannt:

$$\underline{y}(x_a) = \underline{R}_a \cdot \underline{v}, \quad \underline{y}(x_b) = \underline{\ddot{U}} \cdot \underline{y}(x_a)$$

Beispiel Biegebalken (alle physikalischen Größen in mm und N) mit $q=10$, $E=2 \cdot 10^5$, $h=1$, $EI=h^4/12$, $c=10^{-3}E$, $L=10$, $a=0$, $b=L$, $\varepsilon=10^{-5}L$

RB:

- $x=x_a$: $w(x_a)=0.1$, $\varphi(x_a)=0$, (Koordinaten des Vektors der unbekannten Randgrößen \underline{v} : $v_1=M(x_a)$, $v_2=F_q(x_a)$)
- $x=x_b$: $w(x_b)=0$, $\varphi(x_b)=0.05$

Exakte analytische Lösung

$$w_A(x) = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) + \frac{q}{c} \quad (5.2.10)$$

$$C_1 = 0.06588, \quad C_2 = 0.110423, \quad C_3 = -0.01588, \quad C_4 = -0.02246$$

Lösung mit REM

$$\mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\ddot{\mathbf{U}}| = 1 \quad (5.2.11)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -3.6463 & 0.3959 & -8.5928 \times 10^{-3} & -2.0235 \times 10^{-3} & 0.2323 \\ -1.7186 & -3.6459 & -2.0237 \times 10^{-3} & -2.3664 \times 10^{-5} & 0.0859 \\ 78.5905 & 6.7456 \times 10^3 & -3.6466 & -1.7184 & -3.9331 \\ 6.7463 \times 10^3 & 2.8645 \times 10^4 & 0.3944 & -3.6463 & -337.3153 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -8.5928 \times 10^{-3} & -2.0235 \times 10^{-3} & -0.1323 \\ -2.0237 \times 10^{-3} & -2.3664 \times 10^{-5} & -0.1359 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -69.8744 \\ 231.3285 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_a := \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{y}_a^T = (0.1 \quad 0 \quad -69.8744 \quad 231.3285 \quad 1)$$

$$\mathbf{y}_b := \ddot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{y}_a \quad \mathbf{y}_b^T = (0 \quad 0.05 \quad -138.7827 \quad -533.7397 \quad 1)$$

Die Lösungsdiagramme der Durchbiegung, der Verdrehung und des Biegemomentes für diskrete ζ_i (Quellpunkte im Gebiet) in (5.2.3), (5.2.2) sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

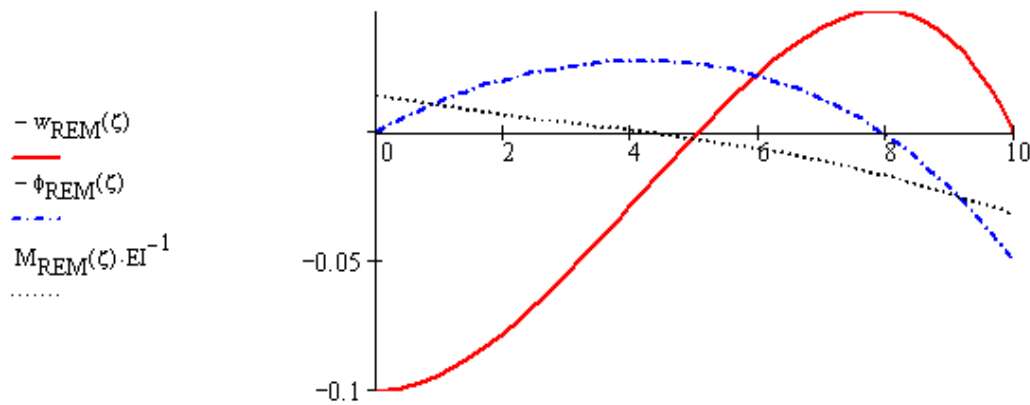


Abbildung 5.2: REM-Balkenlösung

Ein Vergleich mit der exakten analytischen Lösung ergibt erwartungsgemäß keinen Unterschied, die REM Lösung ist beim 1D-Problem exakt (bis auf die Näherungen $w(x_i) \approx w(\xi_i)$ und $\varphi(x_i) \approx \varphi(\xi_i)$, $i=a, b$ in (5.2.6)).

Durch entsprechende Veränderungen der RB-Matrizen \underline{R}_a und \underline{R}_b können ohne weitere Änderungen beliebige andere (zulässige) RB erfüllt werden.

5.2.2 ohne elastische Bettung

Die Dgl der RWA ist in (5.2.12). Es muss statt der Fundamentallösung (6.11.4.2)

$$\text{Dgl: } EI \cdot w'''' - q = 0, \quad \left(\quad \right)' = \frac{d(\quad)}{dx}, \quad x_a < x < x_b \quad (5.2.12)$$

lediglich die durch die Biegesteifigkeit EI dividierte Fundamentallösung (6.11.3.1) verwendet werden.

5.3 RWA mit Poisson-Dgl $\Delta u + b = 0$ (2D)

Konservative Vektorfelder (s. Abschnitt 6.1) sind zur Beschreibung einiger physikalischer Gesetzmäßigkeiten sehr hilfreich. Konservative Vektorfelder haben folgende Eigenschaften (in 2D kartesischen Koordinaten)

$$1.) \quad \text{rot } \vec{w} = (w_{2,1} - w_{1,2}) \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (5.3.1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{w} = \overrightarrow{\text{grad}} u = u_{,1} \vec{e}_1 + u_{,2} \vec{e}_2$$

$$\text{rot } \vec{w} = \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} u) = (u_{,21} - u_{,12}) \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$2.) \quad du = \vec{w} \cdot d\vec{s} = (u_{,1} \vec{e}_1 + u_{,2} \vec{e}_2) \cdot (dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2) = u_{,1} dx_1 + u_{,2} dx_2$$

$$3.) \quad \int_0^1 \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 du = u_1 - u_0$$

$$4.) \quad \oint_R \vec{w} \cdot d\vec{s} = 0$$

- 1.) Ein Gradientenfeld $\vec{w} = \overrightarrow{\text{grad}} u$ ist stets wirbelfrei $\text{rot } \vec{w} = \vec{0}$, bzw. ein wirbelfreies Vektorfeld $\text{rot } \vec{w} = \vec{0}$ ist stets Gradient eines skalaren Feldes $\vec{w} = \overrightarrow{\text{grad}} u$.
- 2.) Das Skalarprodukt $du = \vec{w} \cdot d\vec{s}$ ist ein totales Differential.
- 3.) Das Integral $\int_0^1 \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 du = u_1 - u_0$ auf einem Weg von 0 nach 1, der vollständig im konservativen Vektorfeld liegt, ist demzufolge wegunabhängig.
- 4.) Das Umlaufintegral $\oint_R \vec{w} \cdot d\vec{s} = 0$ auf einem geschlossenen Weg, der vollständig im konservativen Vektorfeld liegt, ist aus gleichem Grunde Null.

Im konservativen Vektorfeld $\vec{w} = -\overrightarrow{\text{grad}} u$ soll entsprechend (6.1.5) das Skalarfeld der Quelldichte $\text{div } \vec{w} = b$ vorgegeben sein. Das Minuszeichen bei der Definition des Vektorfeldes ist nur aus Gründen der Kompatibilität mit Darstellungen in verschiedenen Lehrbüchern definiert worden: Die Feldlinien stehen senkrecht auf den Niveaulinien $u = \text{konst.}$ und der Betrag der Feldstärkevektoren (Tangentenvektoren an die Feldlinien) sind dem Betrag des Gradienten proportional und zeigen in Richtung negativer Gradienten. Damit ergibt sich mit $\Delta u = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} u) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = u_{,11} + u_{,22} = -b$ die Poisson-Dgl

$$\Delta u = -b \quad (5.3.2)$$

Für verschwindende Quelldichte im gesamten Gebiet ($b=0$) wird diese Dgl Laplace-Dgl genannt.

Auf dem Rand $R=R_u+R_v$ sind entweder u_R oder v_R vorgegeben (mit v entsprechend (5.3.3), (6.1.4))

$$\text{mit } v = u_{,n} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2 \quad (5.3.3)$$

RB $u - u_R = 0$ auf Rand R_u (wesentliche RB)

$v - v_R = 0$ auf Rand R_v (natürliche RB)

Im allgemeineren Fall sind in den RB die wesentlichen und die natürlichen RB gekoppelt, wie das z.B. bei elastischen Stützungen in der Festkörpermechanik vorkommt.

$$\alpha u + \beta v - \gamma = 0 \quad (5.3.4)$$

In (5.3.4) sind für $\alpha=0$ oder $\beta=0$ die Spezialfälle (5.3.3) enthalten.

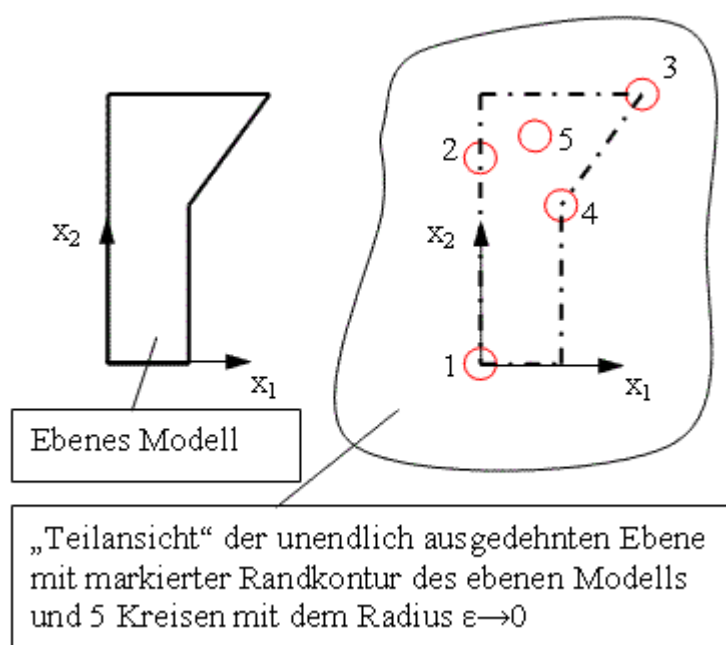
Problemstellungen die auf RWA mit Poisson-Dgl führen sind in ⁴ erläutert. Das sind speziell

- Zugstab ohne elastische Stützung (1D),
- stationäre Wärmeleitung,
- elektrostatisches Potential,
- vorgespannte Membran mit Flächenlast und
- Torsionsproblem ohne Wölbbehinderung.

Mit (5.3.2) (und mit (6.1.11) für $v=w$) wird

$$\begin{aligned} u(|\vec{r}|=0) &= - \iint_G u \Delta w \, dG = \iint_G u \cdot \frac{\delta(\vec{r})}{2\pi r} \, dG \quad \text{mit} \quad \Delta w(\vec{r}) = -\frac{\delta(\vec{r})}{2\pi r} \quad (5.3.5) \\ &= \iint_G b w \, dG + \oint_R (w u_{,n} - u w_{,n}) \, ds \end{aligned}$$

Die Methode ist anschaulich mit Abbildung 5.3 zu erklären. Es gibt 2 Systeme, links



das Modell der speziellen RWA für u (System 1, Gebiet G) und rechts die unendlich ausgedehnte Ebene der Fundamentallösung w (System 2, Gebiet G_∞). Auf das System 2 ist das Bild des Systems 1 projiziert (markierte Randkontur).

Um den Funktionswert $u(x_1, x_2)$ zu berechnen, wird in G_∞ an der Stelle $\zeta_1=x_1, \zeta_2=x_2$ (dort ist $r=0$), ein Dirac-Impuls eingeleitet.

Eine andere, Modellvorstellung ist: In G_∞ wird nur an einer Stelle P ein Dirac-Impuls eingeleitet. Die Projektion erfolgt nacheinander derart das der Punkt des Bildbereiches $\zeta_1=x_1, \zeta_2=x_2$, an dem der Dirac-Impuls eingeleitet werden soll, jeweils genau auf P liegt.

Abbildung 5.3: REM, Modell und Bildebene

Die Fundamentallösung w ist bekannt und damit auch die Feldgrößen w und $w_{,n}$ auf dem Rand des Bildbereiches in G_∞ . Diese werden in (5.3.5) für die Randintegrale benötigt.

Die aus (5.3.5) folgenden Integrationen werden für jeden diskreten Punkt $\zeta_1=x_1, \zeta_2=x_2$ einmal ausgeführt. Das ist jedes Mal die Anwendung des Satzes von Maxwell-Betti aus 6.4. Dazu kann man sich den Bildbereich nach Einleitung des jeweiligen Dirac-Impulses aus der unendlichen Ebene herausgeschnitten denken, mit der Eintragung der Schnittreaktionen auf dem Rand.

Die Dgl der Fundamentallösung w ist

$$\Delta w(\vec{r}) = -\frac{\delta(\vec{r})}{2\pi r} \quad (5.3.6)$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{\zeta}, \quad r_1 = x_1 - \zeta_1, \quad r_2 = x_2 - \zeta_2$$

\vec{x} – Ortsvektor zum Feldpunkt im Gebiet G oder auf dem Rand R

$\vec{\zeta}$ – Ortsvektor zum Quellpunkt im Gebiet G oder auf dem Rand R

\vec{r} – Vektor vom Quellpunkt zum Feldpunkt

(Diese Vektoren sind nicht in G , sondern im Bild von G auf G^∞ definiert!)

Die Vektoren in (5.3.6) sind im Bild von System 1 auf System 2 entsprechend Abbildung 5.3 definiert (s. auch Beispiel in Abbildung 5.5).

Die Funktion $w(x,y)$ ist die Fundamentallösung im unendlichen Gebiet G_∞ (System 2) und $u(x,y)$ die Lösung der speziellen RWA im Gebiet G (System 1).

Mit der zugehörigen Fundamentallösung (6.11.5.3) des Problems wird aus (5.3.5)

$$u(|\vec{r}|=0) = u(\vec{x} = \vec{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} \left[\iint_G -b \ln r \, dG - \oint_R \left(\ln r \cdot u_{,n} - u \frac{r_1 n_1 + r_2 n_2}{r^2} \right) ds \right] \quad (5.3.7)$$

Der singuläre Punkt $r=0$ also $x_1=\zeta_1$ und $x_2=\zeta_2$ darf bei (5.3.7) nicht auf dem Rand R des Bildbereiches liegen (sondern im Gebiet des Bildbereiches von G auf G_∞).

Die Gleichung (5.3.7) gilt allgemein (also auch für den Rand R) in der Form

$$c(\vec{\zeta}) \cdot u(\vec{x} = \vec{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} \left[\iint_G -b \ln r \, dG - \oint_R \left(\ln r \cdot u_{,n} - u \frac{r_1 n_1 + r_2 n_2}{r^2} \right) ds \right] \quad (5.3.8)$$

$$\text{Randfaktor } c(\vec{\zeta}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} & \text{für } \vec{\zeta} \in R \\ 1 & \text{wenn } \vec{\zeta} \notin R, \in G \\ 0 & \text{für } \vec{\zeta} \notin R, \notin G \end{cases}$$

Der Winkel α ist hierbei der Innenwinkel den der Rand R im Randpunkt $\vec{\zeta} \in R$ hat.^{5, 6} Wenn der Quellpunkt auf einem geraden Rand des Bildes liegt ist $\alpha=\pi$ und damit $c=1/2$.

Der Randfaktor c ist anschaulich mit Abbildung 5.3 zu erklären. An den mit den 5 Kreisen (Radius $\varepsilon \rightarrow 0$) markierten Punkten wird jeweils ein Dirac-Impuls ins System 2 eingeleitet. Am vollständig im Bildbereich (des Systems 1) liegenden Punkt 5 ($\alpha=2\pi$) ist der vollständige Impuls aus Abbildung 6.9 im Bildbereich und in den anderen nur im Anteil $\alpha/2\pi$, wobei α den jeweiligen Innenwinkel des Bildbereiches am Punkt der

Impuls-Einleitung angibt. Es sind im Beispiel $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 < \pi/2$, $\pi < \alpha_4 < 3\pi/2$, $\alpha_5 = 2\pi$ (liegt nicht auf dem Rand). Für außerhalb des Bildbereiches liegende Punkte (gibt es hier nicht) ist der Anteil des Impulses für den Bildbereich Null (entspricht $\alpha=0$). Der Anteil des Impulses von Punkten auf dem Rand ist $\alpha/2\pi$ für den Bildbereich und $1 - \alpha/2\pi$ für den außerhalb liegenden Teil des Kreises. Deshalb ist in (5.3.8) $c = \alpha/2\pi$, wenn der Punkt im System 2 auf dem Rand des Bildes von System 1 liegt.

5.3.1 2D-REM – Formulierung

Die Funktion u (im System 1) an der Stelle $x_1 = \zeta_1$, $x_2 = \zeta_2$ ist mit (5.3.7) bzw. (5.3.8) dann bekannt, wenn auf dem Rand R die Funktionen u und $v = u_n$ bekannt sind. Dann können die Integrale auf der rechten Seite gelöst werden. Nun ist aber auf dem Rand $R = R_u + R_v$ auf R_u die Feldgröße u vorgegeben ($v = u_n$ ist unbekannt) und auf R_v die Feldgröße $v = u_n$ (u ist unbekannt). Die dazu konjugierten Größen sind noch unbekannt. Zur Berechnung der noch unbekannten Randfunktionen wird der Rand in n_e -Randelemente (RE) der Länge L_e diskretisiert ($e = 1, 2, \dots, n_e$) und es werden Ansatzfunktionen gewählt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_e &= \sum_{k=1}^{k_e} u_e^k f_e^k(s_e), \quad 0 < s_e < L_e \\ \hat{v}_e &= \sum_{k=1}^{k_e} v_e^k f_e^k(s_e) \end{aligned} \quad (5.3.1.1)$$

Des leichteren Verständnisses und der einfacheren Darstellung wegen, werden $k_e = 1$ und $f_e^1 = 1$ gesetzt. Die Ansatzfunktionen sind damit in jedem RE konstant $\hat{u}_e = u_e$, $\hat{v}_e = v_e$. Es wird die Kollokationsmethode verwendet: Die Lösung soll die RB nur in vorgegebenen (Kollokations-)Punkten erfüllen. Pro RE gibt es einen Kollokationspunkt. Dieser wird jeweils in die Mitte des RE gelegt. Es werden aus (5.3.8) n_e Gleichungen formuliert.

$$\begin{aligned} \alpha_m = \pi \quad \Rightarrow \quad c(\vec{\zeta}_m) &= c_m = \frac{1}{2}, \quad k, m = 1, \dots, n_e \\ \left(\underline{H} + \frac{1}{2} \underline{I} \right) \underline{u} &= \underline{G} \cdot \underline{v} + \underline{b}, \quad \frac{1}{2} \underline{I} - \text{Randfaktoren } c_m \\ \underline{H}_{m,k} &= -\frac{L_k}{2\pi} \int_0^1 \frac{\vec{r}_m(\vec{x}_k) \cdot \vec{n}_k}{r_m^2(\vec{x}_k)} d\Gamma, \quad \underline{G}_{m,k} = -\frac{L_k}{2\pi} \int_0^1 \ln r_m(\vec{x}_k) d\Gamma \\ \underline{b}_m &= -\iint_A b \ln r_m(\vec{x}) dA, \quad \underline{I} - \text{Einheitsmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.1.2)$$

Hierbei sind

$$\vec{r}_m(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{\zeta}_m \quad (5.3.1.3)$$

$$\vec{x}_k(\Gamma) = \vec{r}_{k0} + \Gamma \cdot \vec{t}_k \quad - \text{Geradengleichung des RE } k, \quad |\vec{t}_k| = L_k$$

$$\vec{r}_{k0} \quad - \text{Ortsvektor zum Anfangspunkt des RE } k$$

$$\Gamma = \Gamma_m \quad - \text{Randparameter} \quad 0 \leq \Gamma \leq 1$$

$$\vec{\zeta}_m = \vec{x}_m \left(\Gamma = \frac{1}{2} \right) \quad - \begin{cases} \text{Ortsvektor zum Quellpunkt des RE } m \\ \text{im Bildbereich (System 2)} \end{cases}$$

Das Gebietsintegral in b_m kann für den Fall $\Delta b = 0$, also auch für $b = \text{konst.}$, in ein Randintegral überführt werden (siehe dazu ⁶⁾)

Auf jedem RE k ist entweder u_k oder v_k unbekannt. Durch entsprechendes Umsortieren in bekannte Größen (Vektor \underline{y}) und unbekannte Größen (Vektor \underline{x}) und Teilinversion wird das Gleichungssystem (5.3.1.2) in die Form

$$\underline{M} \cdot \underline{x} = \underline{N} \cdot \underline{y} + \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{N}^{-1} \underline{M} \cdot \underline{x} = \underline{N}^{-1} \underline{N} \cdot \underline{y} + \underline{N}^{-1} \underline{b} \quad (5.3.1.4)$$

$$\underline{A} = \underline{N}^{-1} \underline{M} \quad , \quad \underline{f} = \underline{y} + \underline{N}^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{f} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{f}$$

gebracht und gelöst.

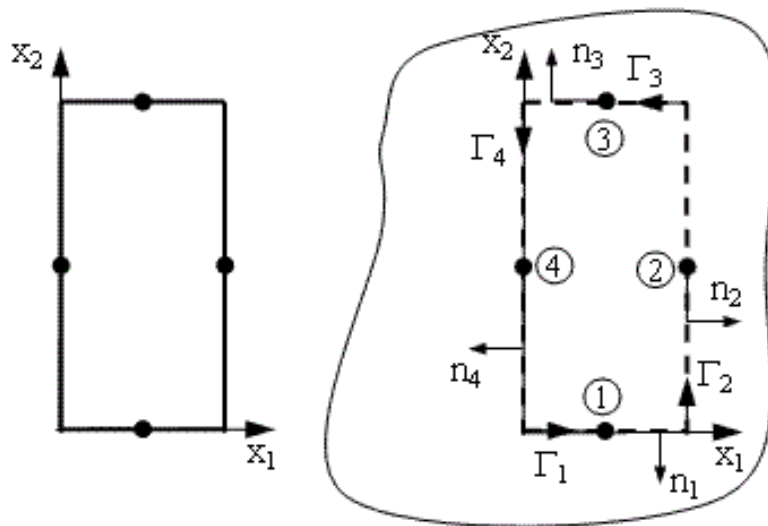
Die Feldgröße $u(x_1, x_2)$ kann nach der Lösung entsprechend (5.3.1.4) (einschließlich R) mit (5.3.8) für ein diskretes Gitter im Gebiet G berechnet werden.

Für $v(x_1, x_2) = u_n = u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2$ müssen die partiellen Ableitungen $u_{,1}$ und $u_{,2}$ aus (5.3.1.2) gebildet werden, um die Koordinaten in x_1 und x_2 -Richtung berechnen zu können.

5.3.2 Beispiel

Dieses Beispiel hat (wegen der groben Diskretisierung) rein akademischen Charakter, ist vollständig ⁶ entnommen und kann dort ausführlicher nachgelesen werden.

Das Gebiet G ist ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2. Die kurze Seite hat die dimensionslose Länge 1 und die lange Seite die dimensionslose Länge 2.



Jede Seite wird mit nur einem RE diskretisiert. In Abbildung 5.4 ist das Modell mit seiner Projektion auf die Ebene G_∞ dargestellt. Die Knoten-Nummern i , die Randparameter Γ_i und die Außen-Normalen-Einheitsvektoren n_i , $i=1,2,3,4$, sind eingetragen.

Abbildung 5.4: REM-Modell, Rechteck

i	1	2	3	4
\vec{r}_{0i}^T	(0 0)	(1 0)	(1 2)	(0 2)
\vec{t}_i^T	(1 0)	(0 2)	(-1 0)	(0 -2)
$\vec{\zeta}_i^T$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	(1 1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$	(0 1)
\vec{n}_i^T	(0 -1)	(1 0)	(0 1)	(-1 0)
L_i	1	2	1	2

(5.3.2.1)

In (5.3.2.1) sind die Parameter des Modells zusammengestellt

- \vec{r}_{0i} – Ortsvektor zum Anfangspunkt des RE i
- \vec{t}_i – Randvektor, $|\vec{t}_i| = L_i$
- $\vec{\zeta}_i$ – Ortsvektor zum Quellpunkt des RE i im System 2 (Ist auch Kollokationspunkt im System 1)
- \vec{n}_i – Außen-Normalen-Einheitsvektor des RE i
- L_i – Länge des RE i

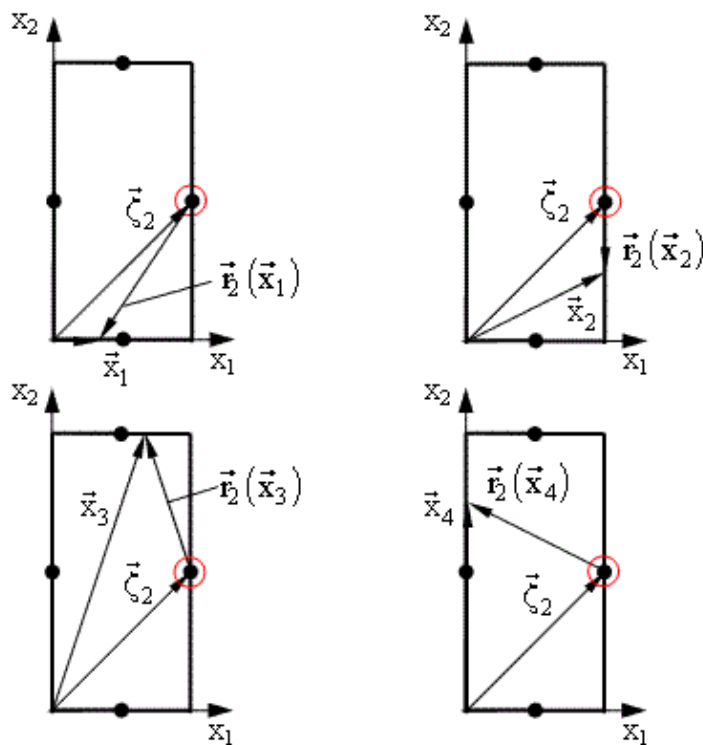


Abbildung 5.5: REM, Quellpunkt 2

den Ort der Singularität $r_2=0$ keine Integrationsstützstelle fällt, d.h. dass die Anzahl der Stützstellen geradzahlig ist oder besser, dass der Integrationsbereich an der Stelle der Singularität in 2 Teilbereiche geteilt wird.

Die Vektoren aus Abbildung 5.5 in kartesischen Koordinaten x_1, x_2 sind

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_1 &= \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{r}_2(\vec{x}_1) &= \vec{x}_1 - \vec{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma - 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & 0 \leq \Gamma \leq 1 & \quad (5.3.2.2) \\
 \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2\Gamma \end{pmatrix}, & \vec{r}_2(\vec{x}_2) &= \vec{x}_2 - \vec{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Gamma - 1 \end{pmatrix} \\
 \vec{x}_3 &= \begin{pmatrix} 1 - \Gamma \\ 2 \end{pmatrix}, & \vec{r}_2(\vec{x}_3) &= \vec{x}_3 - \vec{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} -\Gamma \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \vec{x}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 - \Gamma) \end{pmatrix}, & \vec{r}_2(\vec{x}_4) &= \vec{x}_4 - \vec{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - 2\Gamma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Als RB auf den Rändern 1 bis 4 sind vorgegeben $u_1=0, v_2=0, u_3=100, v_4=0$. Unbekannt sind die dazu konjugierten Größen v_1, u_2, v_3, u_4 . Die RB für u sind wesentliche RB und die für v natürliche RB.

In Abbildung 5.5 sind die Vektoren der 4 RE für den Quellpunkt im System 2 auf RE 2 mit $\vec{\zeta}_2 = (1 \ 1)^T$ dargestellt.

Bei der Integration über RE 2 treten uneigentliche Integrale auf. (Deren Werte sind in 6.9. berechnet.).

Deshalb muss bei der numerischen Integration über RE 2 mit z.B. der Gauß-Formel darauf geachtet werden, dass in RE 2 auf

Die Matrizen und Vektoren aus (5.3.1.4) ergeben sich zu

$$\mathbf{H} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.211 & -0.078 & -0.211 \\ -0.125 & 0.5 & -0.125 & -0.25 \\ -0.078 & -0.211 & 0.5 & -0.211 \\ -0.125 & -0.25 & -0.125 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.2695 & -0.0175 & -0.1119 & -0.0175 \\ -0.021 & 0.3183 & -0.021 & -0.042 \\ -0.1119 & -0.0175 & 0.2695 & -0.0175 \\ -0.021 & -0.042 & -0.021 & 0.3183 \end{pmatrix} \quad (5.3.2.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -0.2695 & -0.211 & 0.1119 & -0.211 \\ 0.021 & 0.5 & 0.021 & -0.25 \\ 0.1119 & -0.211 & -0.2695 & -0.211 \\ 0.021 & -0.25 & 0.021 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.0175 & 0.078 & -0.0175 \\ 0.125 & 0.3183 & 0.125 & -0.042 \\ 0.078 & -0.0175 & -0.5 & -0.0175 \\ 0.125 & -0.042 & 0.125 & 0.3183 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{M}$$

$$\mathbf{y}^T = (0 \ 0 \ 100 \ 0)$$

$$\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5249 & 0.5 & -0.135 & 0.5 \\ -0.1004 & 1.0407 & -0.1004 & -1.0407 \\ -0.135 & 0.5 & 0.5249 & 0.5 \\ -0.1004 & -1.0407 & -0.1004 & 1.0407 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T = (-75.7671 \ 50 \ 75.7671 \ 50)$$

Die Matrizen sind voll besetzt und nicht symmetrisch, dafür aber i.a. (kleiner Rand bei großem Gebiet) wesentlich kleiner als bei einer entsprechenden FE-Formulierung.

Der Vektor \underline{x} enthält die unbekannten Größen v_1, u_2, v_3, u_4 und der Vektor \underline{y} die vorgegebenen Randwerte $u_1=0, v_2=0, u_3=100, v_4=0$. Die Vorzeichen zu den Koordinaten v_1, v_3 ergeben sich aus den Skalarprodukten in (5.3.2.4).

Analytische Lösung

$$\text{Dgl} \quad \Delta u(x, y) = u_{,xx} + u_{,yy} = 0, \quad v(x, y) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = (u_{,x} \vec{e}_x + u_{,y} \vec{e}_y) \cdot \vec{n} \quad (5.3.2.4)$$

RB

$$1. \text{ Rand } y = 0: u(x, 0) = 0, \quad \vec{n} = -\vec{e}_y, \quad v(x, 0) = -u_{,y}(x, 0) = ?$$

$$2. \text{ Rand } x = 1: u(1, y) = ?, \quad \vec{n} = \vec{e}_x, \quad v(1, y) = u_{,x}(1, y) = 0$$

$$3. \text{ Rand } y = 2: u(x, 2) = 100, \quad \vec{n} = \vec{e}_y, \quad v(x, 2) = u_{,y}(x, 2) = ?$$

$$4. \text{ Rand } x = 0: u(0, y) = ?, \quad \vec{n} = -\vec{e}_x, \quad v(0, y) = -u_{,x}(0, y) = 0$$

Die allgemeine und die an die RB angepassten analytischen Lösungen sind

$$u(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy \quad (5.3.2.5)$$

$$\Rightarrow u = u(y) = 50y, \quad u_{,y} = 50, \quad v = v(y) = u_{,y} \vec{e}_y \cdot \vec{n}$$

$$v(0) = -50$$

$$v(2) = +50$$

Wegen der RB handelt es sich hier um ein 1D-Problem in y . Die Lösung in (5.3.2.3) ist für u schon exakt für v ist aber der Fehler noch ca. 50%.

Wenn für alle RE die Länge $\frac{1}{2}$ gewählt wird (insgesamt 12 RE) ergibt sich die numerische Lösung \mathbf{x} im Vergleich zur exakten \mathbf{x}_{ex} schon mit sehr guter Übereinstimmung.

$$\mathbf{x}_{\text{ex}}^T = (-50 \quad -50 \quad 12.5 \quad 37.5 \quad 62.5 \quad 87.5 \quad 50 \quad 50 \quad 87.5 \quad 62.5 \quad 37.5 \quad 12.5) \quad (5.3.2.6)$$

$$\mathbf{x}^T = (-52.05 \quad -52.05 \quad 11.84 \quad 37.29 \quad 62.71 \quad 88.16 \quad 52.05 \quad 52.05 \quad 88.16 \quad 62.71 \quad 37.29 \quad 11.84)$$

5.4 Physikalische Aufgabenstellungen mit Poisson-Dgl

In den Formeln dieses Abschnittes wird bei den 2D-Problemen die Gebietsbezeichnung G für die Fläche des Gebietes durch die übliche Bezeichnung A ersetzt.

5.4.1 Zugstab (1D)

Der Stab ist gerade und hat die Länge L . Seine (starre) Querschnittsfläche ist A . Die Querschnittsabmessungen sind klein gegenüber seiner Länge. Die Wirkungslinien aller Beanspruchungen liegen auf der Schwerpunktschse des Querschnittes, der $z=x_1$ Achse. Der Elastizitätsmodul ist E .

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{F_L}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot u_{,1} \\ \sigma_{,1} + f = 0 \\ f = \frac{q}{A} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{,11} = -\frac{q}{EA}, \quad v = EA \, u_{,1} = F_L \quad (5.4.1.1)$$

Hierbei sind:

- u - Längsverschiebung [m]
- σ - Normalspannung in z -Richtung [N/m^2]
- F_L - Längskraft [N]
- ε - Dehnung [1]
- f - Volumenkraft in z -Richtung [N/m^3]
- q - Streckenlast [N/m]

Das ist (5.3.2) für das 1D-Problem des Zugstabes

$$\Delta u = u_{,11} = -b, \quad b = \frac{q}{EA} \quad (5.4.1.2)$$

5.4.2 Stationäre Wärmeleitung

Die allgemeinen Wärmeleitungsgleichungen sind

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho \cdot c} \Delta T + \frac{\nu}{\rho \cdot c} \quad (5.4.2.1)$$

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T = -k \overrightarrow{\text{grad}} T = -k \begin{pmatrix} T_{,1} \\ T_{,2} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{Wärmeflußvektorfeld}$$

$$q_W = \vec{q} \cdot \vec{n} = -k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -k (T_{,1} n_1 + T_{,2} n_2)$$

Hierbei sind:

- T - absolute Temperatur [K]
- t - Zeit [s]
- k - Wärmeleitfähigkeit [W/(K m)]
- ρ - Dichte [kg/m³]
- c - spezifische Wärmekapazität [Ws/(kg K)]
- ν - Wärmequellldichte [W/m³]
- q_W - Wärmefluß senkrecht durch den Rand [W/m²]

Für den stationären Zustand ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) wird daraus (5.3.2). Mit

$$\Delta u = -b, \quad u = T, \quad b = \frac{\nu}{k} \quad (5.4.2.2)$$

5.4.3 Elektrostatisches Potential

Die Gleichungen für das elektrostatische Potential sind

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.4.3.1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad - \quad \text{Vektorfeld der Feldstärke}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad - \quad \text{Vektorfeld der Verschiebungsdichte}$$

$$Q = \iiint_V \rho \cdot dV = \iint_A \rho \cdot dA \quad - \quad \text{Ladung}$$

Hierbei sind:

- φ - elektrisches Potential [V]
- ρ - Ladungsdichte [A s/m³]

ϵ	-	Dielektrizitätskonstante [A s/(V m)]
E	-	Feldstärke [V/m] = [N/(A s)]
D	-	Verschiebungsdichte [A s/m ²] = [N/(V m)]
Q	-	Ladung [A s]

Für das stationäre elektrische Feld gilt entsprechend (5.3.1) auf beliebigen Integrationswegen im Gebiet A

$$U_{01} = \int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -(\varphi_1 - \varphi_0) \quad \text{— elektrische Spannung = Potentialdifferenz} \quad (5.4.3.2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Endliche Punktladungen Q im Gebiet A (unendliche Ladungsdichte ρ an einem Materiepunkt $dV = h \cdot dA \rightarrow 0$) sind dabei auch zugelassen. Das könnte im Modell ein elektrischer Leiter (Draht) der Länge h senkrecht zur x,y -Modellebene (parallel zur z -Achse) sein.

Aus (5.4.3.1) wird bei verschwindender Ladungsdichte ρ im Gebiet A (5.3.2) $\Delta u = -b$ mit

$$u = \varphi, \quad b = 0 \quad (5.4.3.3)$$

5.4.4 Vorgespannte Membran

Die Membran wird zuerst über ihrem Rand R , der die Fläche A begrenzt, in der x,y -Ebene aufgespannt. Sie hat die Dicke h . Die konstante Vorspannschnittkraft der Membran ist f [N/m]. Dann wird die Membran mit einer konstanten Flächenlast p [N/m²] senkrecht zu ihrer Ebene belastet. Die daraus resultierende Verschiebung in Richtung der Flächenlast p ist u . Die Gleichgewichtsbedingung (GGB) an einem verformten Element der Membran in Richtung p (Theorie 2.Ordnung: GGB am verformten System) ist

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = -\frac{p}{h} \quad (5.4.4.1)$$

mit den Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 und den Hauptspannungen σ_1 und σ_2 in den zugehörigen Krümmungsebenen (sind i.a. nicht die Ebenen $x=\text{konst.}$ oder $y=\text{konst.}$).

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite von (5.4.4.1) resultiert aus der Definition der positiven Richtung der Flächenlast p . Eine positive Flächenlast ergibt negative Spannungen, also Druckspannungen.

Die Richtungen 1 und 2 sind orthogonal. Die Membran ist schubspannungsfrei (bei beliebiger Orientierung des Koordinatensystems). Daraus folgt

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \quad (5.4.4.2)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{f}{h}$$

Für schwache Krümmungen ($h \ll \rho_1, \rho_2$) gilt mit (5.4.4.1) und (5.4.4.2)

$$\frac{1}{\rho_1} = u_{,11} \quad , \quad \frac{1}{\rho_2} = u_{,22} \quad (5.4.4.3)$$

$$f \cdot (u_{,11} + u_{,22}) = f \cdot \Delta u = f \cdot (u_{,xx} + u_{,yy}) = -p$$

Die Bilanzgleichung (5.4.4.1) ist auch hier die Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\vec{w} = -\frac{f}{h} \overrightarrow{\text{grad } u} = -\frac{f}{h} \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} \quad (5.4.4.4)$$

$$\text{div } \vec{w} = -\frac{f}{h} (u_{,11} + u_{,22}) = -\frac{f}{h} (u_{,xx} + u_{,yy}) = \frac{p}{h}$$

Das ist (5.3.2) $\Delta u = -b$ mit

$$b = \frac{p}{f} \quad (5.4.4.5)$$

Die Koordinate der Schnittkraftkomponente in Richtung der Flächenlast p ist

$$f_p = f \cdot v = f \cdot u_{,n} \quad (5.4.4.6)$$

Mit deren Integral über den gesamten Rand der Membran gilt die GGB

$$\oint_R f_p \, ds + p \cdot A = 0 \quad (5.4.4.7)$$

$$\Rightarrow \oint_R u_{,n} = -\frac{p}{f} \cdot A$$

Das ist aber auch (6.1.10)

$$\iint_A \Delta u \, dA = \oint_R u_{,n} \, ds = -b \cdot A, \quad b = \frac{p}{f} \quad (5.4.4.8)$$

5.4.5 Torsion

Es wird ein gerader, prismatischer Stab mit der Querschnittsfläche A betrachtet. Die Schwerpunktschwerachse des Stabes ist die z -Achse. Die Stabquerschnitte liegen in Ebenen $z=\text{konst.}$ (x,y -Ebenen). Der Verdrehwinkel infolge Torsionsbeanspruchung ist φ . Die Bogenkoordinate auf dem Rand von A ist s . Die Torsionsschubspannungen müssen die GGB in z -Richtung

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_z = 0, \quad f_z = \text{Kraft pro Volumeneinheit} \quad (5.4.5.1)$$

erfüllen. Mit Einführung der Spannungsfunktion u und

$$\sigma_{zz,z} + f_z = 0 \quad (5.4.5.2)$$

$$\tau_{xz} = 2G\vartheta u_{,y}, \quad \tau_{yz} = -2G\vartheta u_{,x}$$

$$\tau_{zn} = 2G\vartheta u_{,s}, \quad \tau_{zs} = -2G\vartheta u_{,n}$$

$$G = \text{Schubmodul} \left[\text{N/mm}^2 \right], \quad u = \text{Spannungsfunktion} \left[\text{m}^2 \right]$$

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \text{Verdrillung} \left[1/\text{m} \right]$$

ist die GGB (5.4.5.1) identisch erfüllt.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -\tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = 2G\vartheta \overrightarrow{\text{grad}} u = 2G\vartheta \begin{pmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{pmatrix} \quad (5.4.5.3)$$

$$\text{rot } \vec{w} = (w_{y,x} - w_{x,y}) \vec{e}_z = (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y}) \vec{e}_z = 2G\vartheta (u_{,yx} - u_{,xy}) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Das Problem ist mit (5.4.5.1) einfach statisch unbestimmt. Deshalb müssen mit (5.4.5.4) auch die Gleichungen der Verzerrungs-Verformungsbeziehungen und des Materialgesetzes berücksichtigt werden, um die Torsionsschubspannungen berechnen zu können. Diese Gleichungen

$$\gamma_{zx} = v_{z,x} + v_{x,z} = -(\omega_{,x} + y)\vartheta \quad (5.4.5.4)$$

$$\gamma_{zy} = v_{z,y} + v_{y,z} = -(\omega_{,y} - x)\vartheta$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\gamma_{zy}$$

führen mit (5.4.5.2) und

$$\text{div } \vec{w} = -\tau_{yz,x} + \tau_{xz,y} = 2G\vartheta \cdot (u_{,xx} + u_{,yy}) = 2G\vartheta \Delta u = -2G\vartheta \quad (5.4.5.5)$$

$$\omega = \text{Einheitsverwölbung} \left[\text{m}^2 \right]$$

$$b = 1$$

Auf (5.3.2) $\Delta u = -1$, die Dgl für die Spannungsfunktion u .

Die RB für die Spannungsfunktion u beim Torsionsproblem ergeben sich mit (5.4.5.2) aus der Bedingung verschwindender Schubspannungen auf dem Rand R an einer Schnittfläche $z=\text{konst.}$ in Richtung der Randnormalen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zn} ds &= \tau_{zx} dy - \tau_{zy} dx = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{ds} &= -\tau_{zy} dx + \tau_{zx} dy = 2G\vartheta (u_{,x} dx + u_{,y} dy) = 2G\vartheta du = 0 \\ \text{oder} \\ \tau_{nz} ds &= \tau_{zn} ds = 2G\vartheta u_{,s} ds = 2G\vartheta du = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_R = \text{konst.} \quad (5.4.5.6)$$

Auf einem in sich geschlossenen Rand R muß die Kontinuitätsbedingung für die Verschiebung v_z in Richtung der Stabachse z erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \oint_R dv_z &= \oint_R v_{z,s} ds = 0 \\ \gamma_{zs} &= v_{z,s} + v_{s,z} \Rightarrow v_{z,s} = \gamma_{zs} - v_{s,z} \\ v_s &= r_t \varphi, \quad v_{s,z} = r_t \varphi_{,z} = r_t \vartheta \\ G \oint_R v_{z,s} ds &= \oint_R \tau_{zs} ds - G\vartheta \oint_R r_t ds = 0 \\ \text{mit } \oint_R r_t ds &= 2A \\ \text{und } \tau_{zs} &= -2G\vartheta u_{,n} \\ \Rightarrow \oint_R u_{,n} ds &= \oint_R v ds = -A \end{aligned} \quad (5.4.5.7)$$

Die Größe $r_t(s)$ ist dabei der Abstand vom Koordinatenursprung im Schwerpunkt von A zur Tangente an den Rand im Punkt s . Gleichung (5.4.5.7) ist aber mit (6.1.10) die Integration der Dgl (5.3.2) $\Delta u = -b$ mit $b=1$

$$\iint_A \Delta u dA = \oint_R u_{,n} ds = - \iint_A dA = -A \quad (5.4.5.8)$$

Bei einem einfach zusammenhängenden Querschnitt ist (5.4.5.6) für jede Konstante u_R erfüllt und es wird zweckmäßig $u_R=0$ gesetzt.

Die Kontinuitätsbedingung (5.4.5.7) beim Torsionsproblem entspricht der GGB (5.4.4.7) bei der Membran.

Bei einem N -fach zusammenhängenden Querschnitt (Das ist ein Querschnitt mit einem Außenrand und $N-1$ Löchern.) muß (5.4.5.7) für jeden Rand R_i ($i=1,2,\dots,N$) gelten. Auf jedem der einfach zusammenhängenden Teilränder R_i gilt $u_{Ri}=\text{konst}_i$. Eine dieser N Konstanten kann willkürlich (z.B. mit Null) vorgegeben werden. Die anderen $N-1$ Konstanten werden dann entsprechend (5.4.5.7) aus der Integration über die $N-1$ Innenränder berechnet

$$\oint_{R_i} u_{,n} ds = \oint_{R_i} v ds = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.4.5.9)$$

Auf den Innenrändern wird im Uhrzeigersinn integriert (Diese Vereinbarung ist sinnvoll, aber nicht notwendig.). Die Vorzeichenumkehr in (5.4.5.9) gegenüber (5.4.5.7) ergibt sich, da auf den Innenrändern die Normaleneinheitsvektoren ins Innere der Löcher zeigen.

Man kann die Gesamtlösung u als Linearkombination von N linear unabhängigen Teillösungen berechnen:

$$u = \sum_{i=1}^N C_i u_i \quad (5.4.5.10)$$

$$\text{mit } \Delta u = \sum_{i=1}^N C_i \Delta u_i = -1 \quad \text{und} \quad \Delta u_i = -1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N C_i \Delta u_i = -\sum_{i=1}^N C_i = -1$$

$$\sum_{i=1}^N C_i = 1$$

Bei der numerischen Lösung einer Randwertaufgabe müssen sämtliche RB bekannt sein. Beim Torsionsproblem sind das auf allen Rändern RB für die Spannungsfunktion u . Deren konstante Randwerte sind (für $N > 1$) vorerst noch unbekannt und müssen über (5.4.5.9) und (5.4.5.10) bestimmt werden.

Eine Möglichkeit, die Randwertaufgabe mit vorgegebenen RB für u zu lösen bietet folgende Verfahrensweise: Für eine Lösung u_i gilt $u_R = 0$ auf allen N Rändern. Die anderen $N-1$ Lösungen sind auf jeweils nur einem der $N-1$ Innenränder ungleich Null (z.B. gleich Eins, jede der $N-1$ Lösungen auf einem unterschiedlichen Rand). Aus (5.4.5.10) und den $N-1$ Bedingungen (5.4.5.9) können dann nach der Lösung der N Randwertaufgaben, die sich nur durch die jeweiligen RB unterscheiden, die N Konstanten C_i berechnet werden. Bei der numerischen Formulierung dieser Problemstellung kann man zweckmäßig das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Randgrößen mit N rechten Seiten formulieren, da die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (5.3.1.4) für alle N Randwertprobleme gleich ist.

5.5 Beispiele mit Poisson-Dgl

Die Methode der Randelemente (REM) wurde numerisch in einem MathCad-Programm umgesetzt. Für die Geometrie ist ein zweifach zusammenhängendes Gebiet mit Rechteckberandung Innen ($B_I \times H_I$) und Außen ($B_A \times H_A$) implementiert, Abbildung

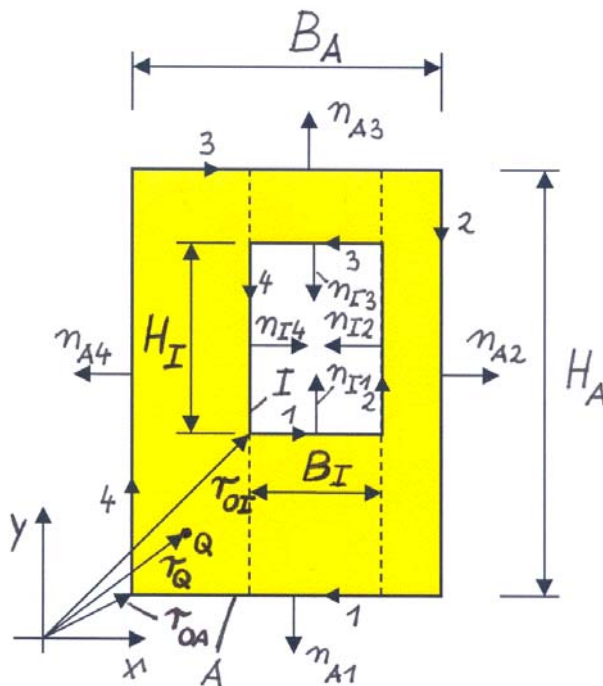


Abbildung 5.6: Geometrie der Beispiele ($x=x_1$, $y=x_2$)

5.6. Das innere Rechteck(-Loch) muß nicht vorhanden sein. Die linke untere Ecke des inneren Rechtecks ist mit dem Ortsvektor r_{OI} festgelegt. Die Randbedingungen sind jeweils auf jeder Rechteckseite innen oder außen konstant. Es gibt also maximal 8 unterschiedliche RB. Die nummerierten Pfeile auf den Rechteckseiten geben die Seitennummer und die Integrationsrichtung auf dieser Seite an.

Zusätzlich zu der Gebietsfunktion b (nur $b=\text{konst.}$ programmiert) sind noch an beliebig vielen Punkten Q jeweils eine singuläre Vorgabe für z.B. eine punktförmige Wärmequelle beim Problem der Wärmeleitung eine punktförmige Ladung beim Problem des elektrostatischen Potentials bzw. eine Einzelkraft beim Problem der Membran zugelassen.

Die Feldgröße $u(x_1, x_2)$ kann für das gesamte Gebiet einschließlich des Randes aus (5.3.8) berechnet werden. Deren Ableitungen $v(x_1, x_2)$ ergeben auf den Rändern stark singuläre Integrale und dürfen deshalb nur in ausreichender Entfernung vom Rand (ca. 0.2 bis 0.5 mal Elementlänge) berechnet werden. Das ist insofern kein wirklicher Nachteil, da ja die diskreten Randwerte nach Lösung von (5.3.1.4) bekannt sind.

Oft wählt man als Testbeispiele für die Überprüfung von Näherungslösungen Aufgaben, die als Ergebnis für $u(x_1, x_2)$ konstante bzw. linear veränderliche Feldgrößen ergeben. Das ist bei der REM nicht so günstig, da im Randbereich die Ableitungen $v(x_1, x_2)$ aus oben angeführtem Grund sehr schlecht gegen konstante Randwerte konvergieren

In den Abbildungen sind generell dimensionslose Feldgrößen dargestellt.

5.5.1 Stationäre Wärmeleitung

Es handelt sich hier um das Beispiel aus 5.3.2. Es liegt ein Rechteckgebiet (1×2) vor, ohne Innenrand. Vorgegeben sind die dimensionslosen Größen: Auf dem Rand 1 die Temperatur $u=0$, auf dem Rand 2 der Wärmestrom $u_{,1}=0$, auf dem Rand 3 die Temperatur $u=100$ und auf dem Rand 4 der Wärmestrom $u_{,1}=0$. Zum Vergleich mit dem o.a. Beispiel ist hier erst mit insgesamt 6 RE (statt dort mit 4 RE) der Länge $L_e=1$ diskreti-

siert worden. Damit erhält man schon brauchbare Ergebnisse für $u(x_1, x_2)$ Abbildung 5.7, die für $v(x_1, x_2)$ sind nicht zu gebrauchen, da die Randfehler im Gebiet nicht abklingen.

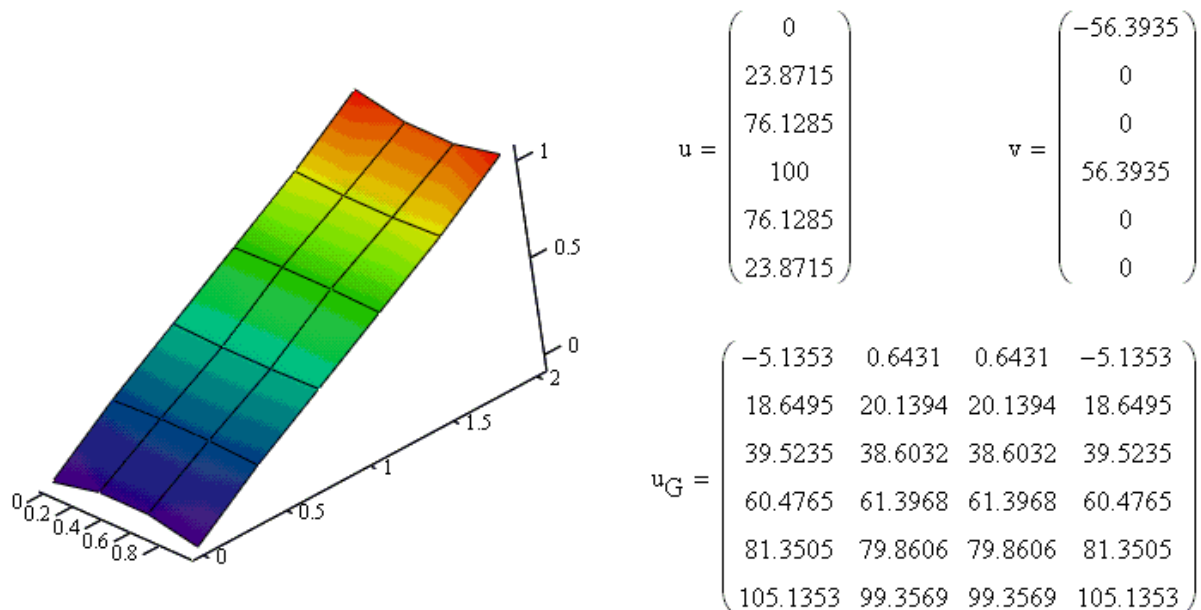


Abbildung 5.7: Beispiel 1: Temperaturverteilung u_G

Das Netz der Bilder hat nichts mit der Anzahl RE zu tun, sondern mit der Diskretisierung bei der Berechnung der Feldgrößen im Gebiet (nach der Lösung der RWA mit der REM). An den Ecken sind die Fehler am größten. Die Vektoren u und v sind Tem-

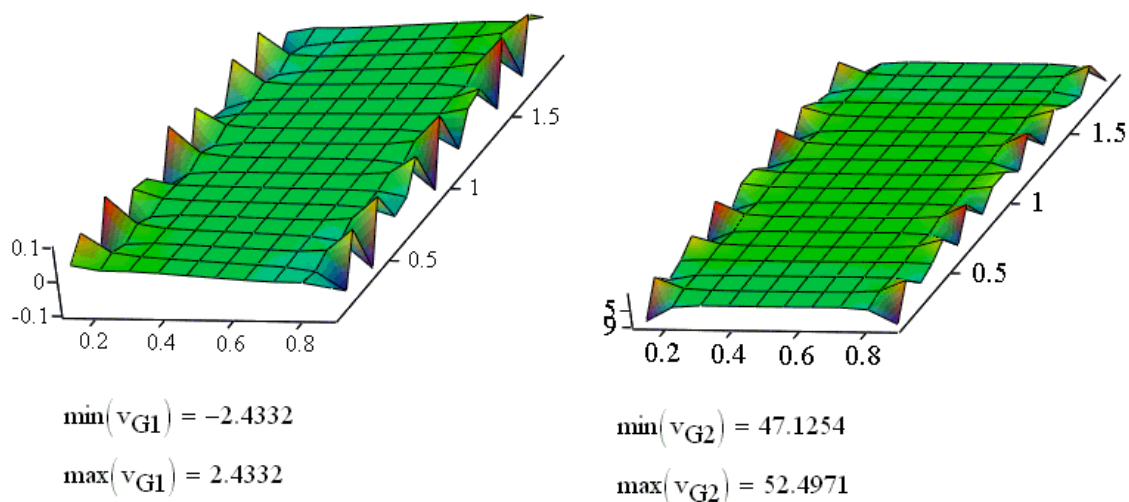


Abbildung 5.8: Beispiel 1: Wärmestrom v_{G1} in x_1 - und v_{G2} in x_2 -Richtung

peratur und Wärmestrom an den Kollokationspunkten. Die Matrix u_G enthält die Temperaturen an den Gitterpunkten.

Die exakte Lösung ist: $u^T = (0 \ 25 \ 75 \ 100 \ 75 \ 25)$ und $v^T = (-50 \ 0 \ 0 \ 50 \ 0 \ 0)$

Die Bilder des Wärmestromes $v_{G1} = u_{,1}$ und $v_{G2} = u_{,2}$ sind mit 24 Elementen der Länge $L_e = 0.25$ berechnet worden. Der Randbereich mit einer Breite von $0.5L_e$ ist nicht in Abbildung 5.8 enthalten. Exakt gilt $v_{G1} = u_{,1} = 0$ und $v_{G2} = u_{,2} = 50$. Diese konstanten Werte sind bis auf den Randbereich sehr gut erreicht.

Beispiel 2 unterscheidet sich von Beispiel 1 lediglich durch eine zusätzliche Wärme-

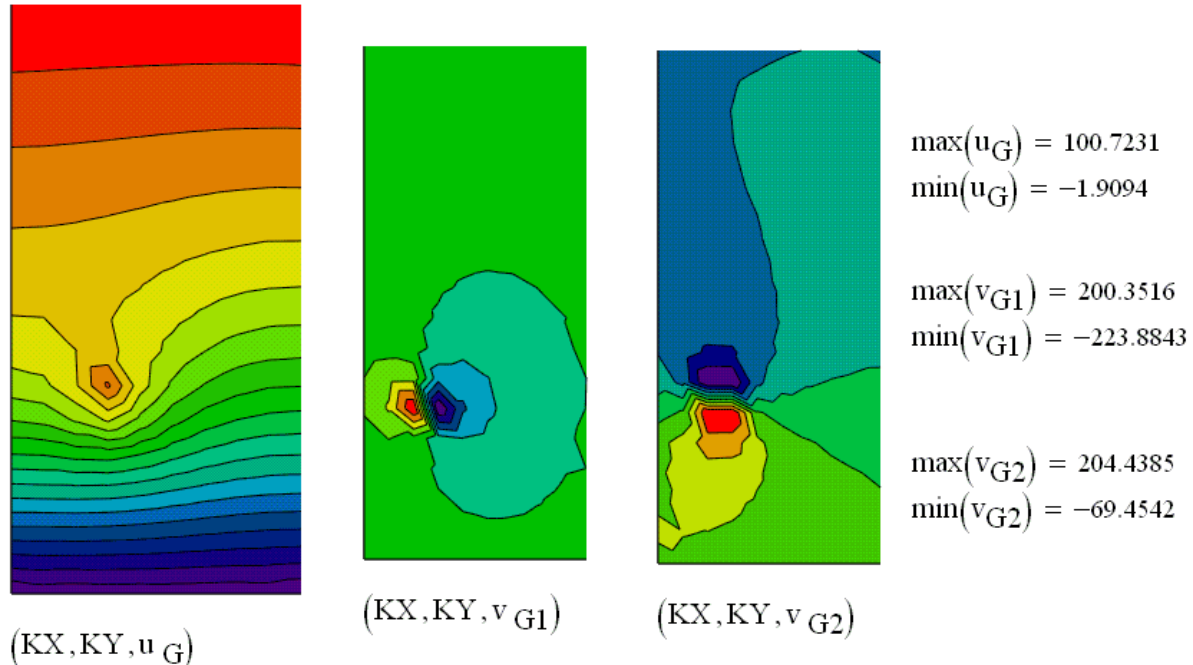


Abbildung 5.9: Beispiel 2: wie Beispiel 1, aber mit Wärmequelle bei $Q(1/3, 2/3)$

quelle mit der Wärmeleistung $u_Q = 80$. Die Diskretisierung erfolgte auch mit 24 gleich langen RE. Die Fehler der nicht erfüllten RB für die Ableitungen $v_{G1} = u_{,1}$ und $v_{G2} = u_{,2}$ sind klein gegenüber den maximalen Werten und sind in Abbildung 5.9 nicht mehr zu sehen.

5.5.2 Elektrostatisches Potential

Es sollen das elektrische Potential und die Feldstärke in der Umgebung zweier paralleler gerader elektrischer Leiter (Linienquellen) berechnet werden. Das zugehörige Modell sind zwei Punktladungen in der x_1, x_2 -Ebene, die die beiden Leiter orthogonal schneidet.

Ein linearer elektrischer Leiter der Länge L und der Ladung Q erzeugt in einem umgebenden Medium mit der Dielektrizitätskonstante ϵ ein kreiszylindrisches, elektrisches Zentralfeld mit der Leiterachse als Zylinderachse. Der Betrag der elektrischen Feldstärke im (senkrechten) Abstand r von der Leiterachse ist

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon Lr} = \underline{Q} \frac{1}{2\pi Lr}, \quad \underline{Q} = \frac{Q}{\epsilon}, \quad r > 0 \quad (5.5.2.1)$$

Die Feldlinien sind bei positiver Ladung (Quelle) radial nach außen und bei negativer Ladung (Senke) radial nach innen gerichtet. Das elektrostatische Feld in einer beliebigen Ebene $x_3 = \text{konst.}$ ist

$$\vec{E} = (E_r \vec{e}_r + E_\vartheta \vec{e}_\vartheta) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = -\left(\varphi_{,r} \vec{e}_r + \frac{\varphi_{,\vartheta}}{r} \vec{e}_\vartheta \right) \quad (5.5.2.2)$$

$$E_r = Q \frac{1}{2\pi r}$$

$$E_\vartheta = 0 \quad \text{wegen Zentralsymmetrie,} \quad r, \vartheta - \text{Polarkoordinaten}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\int \frac{Q}{2\pi r} dr = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}, \quad r_0 - \text{beliebiger Bezugsradius}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} (r \cdot E_r)_{,r} + \frac{1}{r} (E_\vartheta)_{,\vartheta} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit des Feldes}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r} + \frac{1}{r^2} \varphi_{,\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0$$

Dieses Feld wird im räumlich endlichen Medium überlagert durch Felder aus den RB.

Im Beispiel 1 (Abbildung 5.10) wurde zunächst zum Vergleich mit der Lösung von (5.5.2.2) ein quadratisches Gebiet (2x2) mit einer zentralen Punktladung $Q=2\pi$ berechnet. Die Diskretisierung erfolgte mit insgesamt 32 gleich langen RE der Länge $L_e=0.25$. Auf allen vier Rändern ist das Potential gleich Null. Die Randbereiche in der Breite der halben Länge der Randelemente sind nicht dargestellt. In der Umgebung der Punktladung sind die Höhenlinien für Potential und Feldstärke noch entsprechend (5.5.2.2) in guter Näherung konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des Quadrates. Die Werte für Potential u und Feldstärke v sind verglichen mit dem ungestörten zentralsymmetrischen Feld auf einer Symmetrieachse mit dem dimensionslosen Abstand r vom Zentrum und dem Nullpotential bei $r_0=1$

$$r = \frac{1}{3} \quad -\ln r = 1.099, \quad u = -\varphi = 1.174, \quad \frac{1}{r} = 3.00, \quad v = E = 3.44 \quad (5.5.2.3)$$

$$r = \frac{2}{3} \quad -\ln r = 0.405, \quad u = -\varphi = 0.467, \quad \frac{1}{r} = 1.50, \quad v = E = 1.77$$

$$r = 1 \quad -\ln r = 0.000, \quad u = -\varphi = 0.002, \quad \frac{1}{r} = 1.00, \quad v = E = 1.34$$

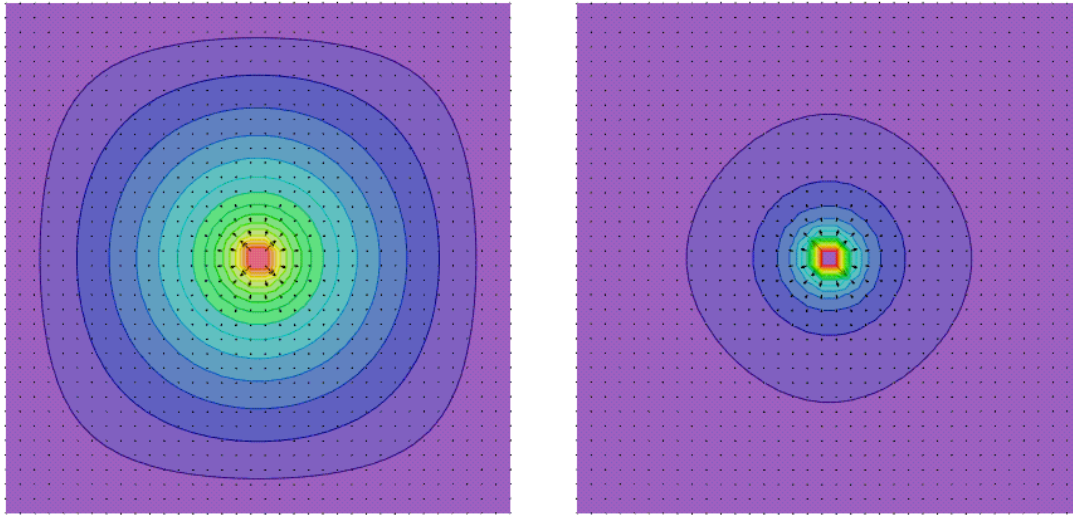


Abbildung 5.10: *Beispiel 1: Potential und Feldstärke für eine Punkt-Ladung*

Der Einfluß der nicht radialsymmetrischen RB ist hier schon relativ groß.

Im Beispiel 2 wurde ein Gebiet (2×2) mit zwei Punktladungen $|Q|=1$ an den Punkten $Q_1(x_1=1, x_2=2/3)$ und $Q_2(x_1=1, x_2=4/3)$ mit ebenfalls 32 RE gleicher Länge berechnet. Die Ränder $x_1=\text{konst.}$ sind mit den RB $v_1=u_{,1}=0$ Symmetrieränder und auf den Rändern $x_2=\text{konst.}$ gilt $u=0$. In Abbildung 5.11 sind Ergebnisse für zwei gleichgerichtete Ladungen und in Abbildung 5.12 für zwei entgegengesetzte Ladungen dargestellt. Die Randbereiche in der Breite der halben Länge der RE sind wieder nicht dargestellt.

Das linke Bild zeigt das Potential u . Die Höhenlinien sind Linien gleichen Potentials. Das rechte Bild gibt Auskunft über den Betrag der elektrischen Feldstärke E . Dabei

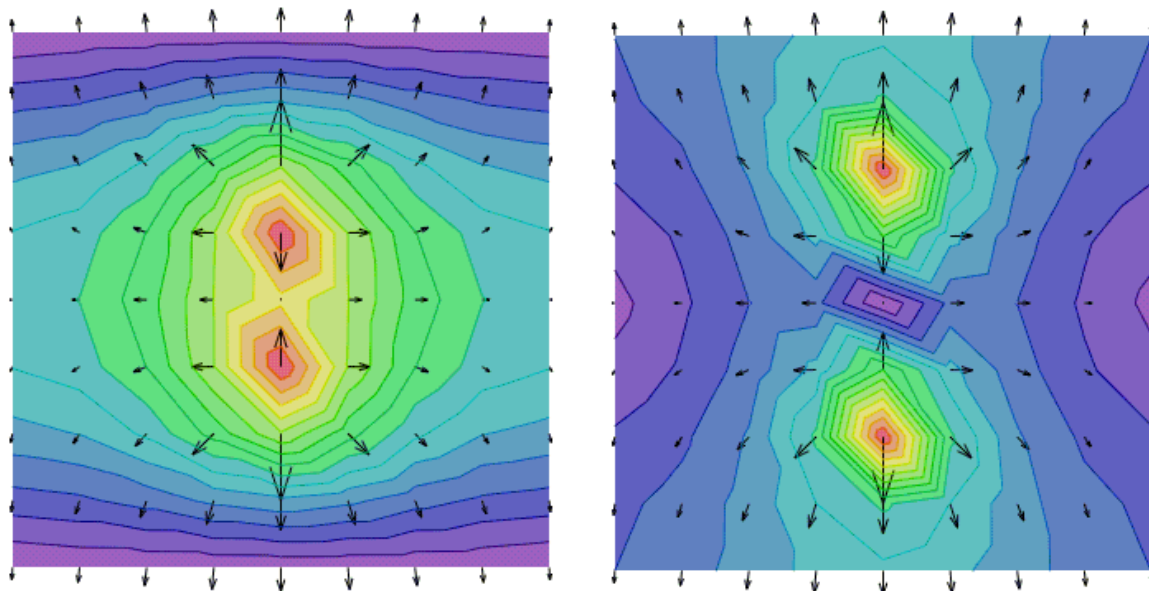


Abbildung 5.11: *Beispiel 2: Potential und Feldstärke für gleiche Punkt-Ladungen*

sind Höhenlinien Linien gleicher dimensionsloser Feldstärke $v_3 = \sqrt{u_{,1}^2 + u_{,2}^2}$. Die Pfeile symbolisieren nach Größe und Richtung das elektrische Feld.

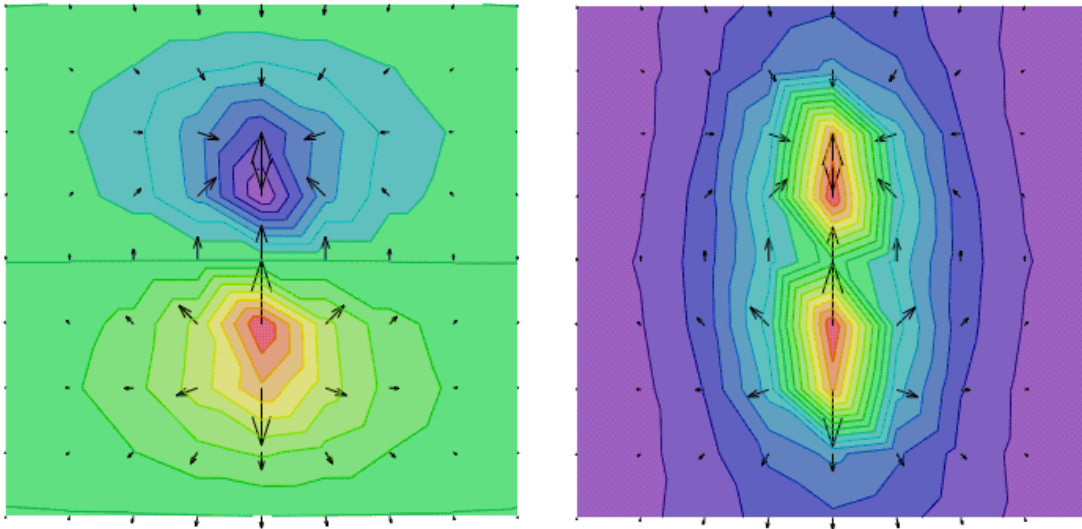


Abbildung 5.12: *Beispiel 2: Potential und Feldstärke für entgegengesetzte Punkt-Ladungen*

Die Abbildung 5.13 und Abbildung 5.14 unterscheiden sich von Abbildung 5.11 und Abbildung 5.12 nur durch die feinere Diskretisierung bei der Ergebnisberechnung im Gebiet A (nicht in der Anzahl der RE). Hierbei sind die Vektorpfeile des elektrischen Feldes nicht mehr gut zu erkennen. Dafür sind die Farbdarstellungen der Feldgrößen mit entsprechend höherer Stetigkeit besser zu interpretieren. Natürlich wäre es auch möglich, jeweils nur die obere oder untere Hälfte des Gesamtgebietes

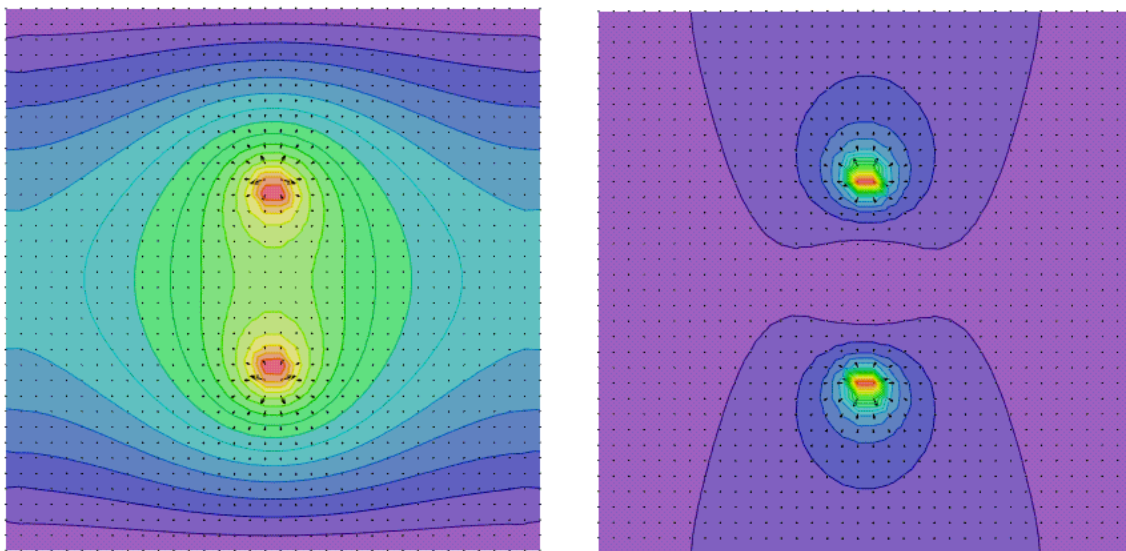


Abbildung 5.13: *Beispiel 2: Potential und Feldstärke für gleiche Punkt-Ladungen*

mit den RB $v_2=u_2=0$ für gleiche Punkt-Ladungen und $u=0$ für entgegengesetzte Punkt-Ladungen auf dem dann entstehenden Rand des halben Gebietes vorzugeben. Die Ergebnisdarstellungen wären dann aber nicht mehr so anschaulich.

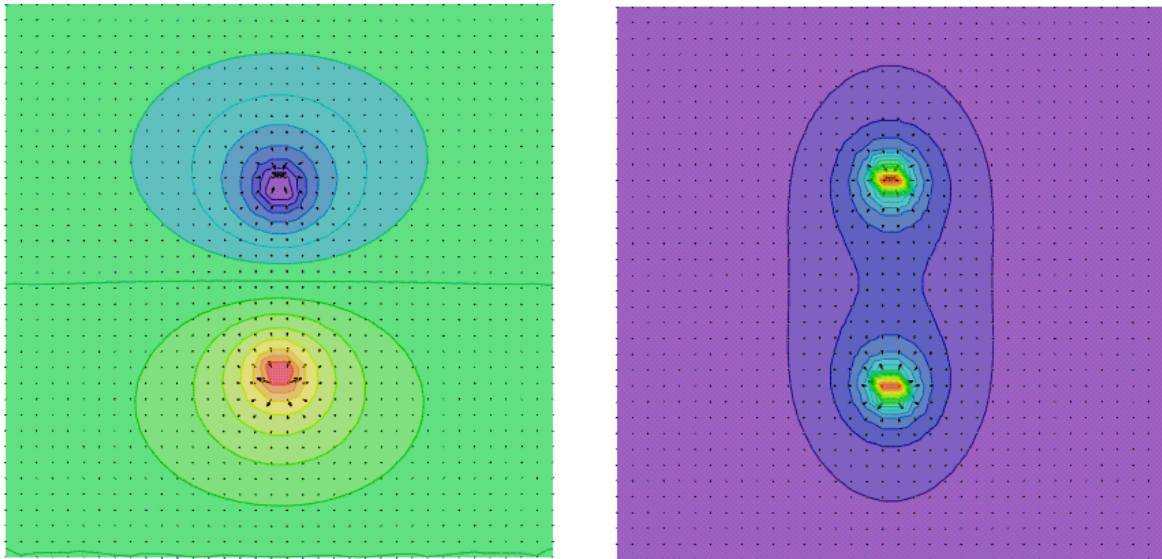


Abbildung 5.14: Beispiel 2: Potential und Feldstärke für engengesetzte Punkt-Ladungen

5.5.3 Vorgespannte Membran

Es liegt ein doppelt berandetes quadratisches Gebiet (4×4) in der x_1, x_2 -Ebene vor, das Zentrum des Innenrandes (1×1) ist bei $x_1 = 1.5$ und $x_2 = 2.5$. Vorgegeben sind auf allen Rändern die vertikale Randverschiebung in Richtung der z -Koordinate x_3 mit $u = 0$. Die bezogenen Flächenlast von (5.4.4.5) ist $b = 1$. Am Punkt $Q(x_1 = 3, x_2 = 1)$ wird eine Einzellast der Größe 1 eingeleitet. Die Diskretisierung erfolgte mit 60 gleich langen

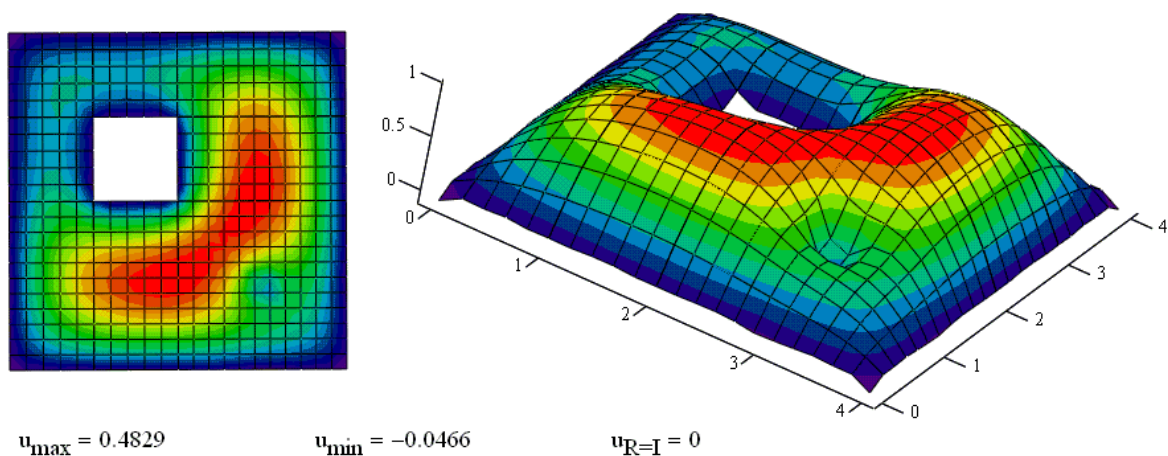


Abbildung 5.15: Potentialfunktion (Verschiebung) der Membran

Randelementen der Länge $L_e = 1/3$. In Abbildung 5.15 ist die Verschiebungsfunktion u der Membran dargestellt.

5.6 RWA mit Helmholtz-Dgl $\Delta(\cdot) + \beta^2(\cdot) = 0$

Einige Anfangs-Randwertaufgaben ungedämpfter, harmonischer Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω führen auf lineare, partielle Dgl der Form

$$\Delta v(\underline{x}, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 v(\underline{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(\underline{x}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 v(\underline{x}, t) \quad (5.6.1)$$

$$\Rightarrow \Delta v(\underline{x}, t) + \beta^2 v(\underline{x}, t) = 0, \quad \beta = \omega \cdot \alpha$$

Im stationären Zustand der mit ω erregten Schwingung ist die homogene Lösung abgeklungen, weil im Realfall immer eine kleine Dämpfung vorhanden ist. Die stationäre Lösung ergibt sich demzufolge lediglich aus der Partikulärlösung. Die Erregung soll hier ausschließlich über die RB erfolgen, deshalb ist die Dgl homogen.

5.6.1 1D-REM - Formulierung

Für das 1D-Problem wird aus (5.6.1)

$$v''(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 v(x, t), \quad 0 < x < L \quad (5.6.2)$$

$$v''(x, t) + \beta^2 v(x, t) = 0, \quad \beta = \omega \cdot \alpha$$

Die allgemeine Lösung ist

$$v(x, t) = u_1 \sin \psi \cdot \cos \omega t + u_2 \cos \psi \cdot \sin \omega t, \quad \psi = \beta x - \varphi \quad (5.6.3)$$

φ – Phasenwinkel

Statt der allgemeinen reellen Lösung (5.6.3) können auch komplexe Lösungsfunktionen verwendet werden.

$$u(x) = u_1 \sin \psi + i \cdot u_2 \cos \psi, \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \cdot \sin \omega t \quad (5.6.4)$$

$$v_{\text{kom}}(x, t) = u(x) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$v(x, t) = \operatorname{Re}[v_{\text{kom}}(x, t)] = u_1 \sin \psi \cdot \cos \omega t + u_2 \cos \psi \cdot \sin \omega t$$

Der Realteil in (5.6.4) ist mit der Lösung aus (5.6.3) identisch.

Für das 1D-Problem ergibt sich dabei kein Vorteil (weil nur der Fall der stehenden Welle aus (5.6.6) von praktischer Bedeutung ist). Die komplexe Formulierung beim 1D-Problem hat lediglich das Ziel, die Analogie zur Lösung beim 2D-Problem zu zeigen und dadurch dort die Verständlichkeit zu verbessern.

Einsetzen von (5.6.4) in (5.6.2) führt die partielle Dgl für die reelle Funktion $v(x, t)$ über in die gewöhnliche Dgl der komplexen Ortsfunktion $u(x)$

$$v''_{\text{kom}}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 v_{\text{kom}}(x, t)}{\partial t^2} = [u''(x) + \beta^2 u(x)] \cdot e^{-i\omega t} = 0 \quad (5.6.5)$$

$$\Rightarrow u''(x) + \beta^2 u(x) = 0, \quad \beta = \alpha \cdot \omega$$

Aus der reellen Anfangs-Randwertaufgabe wird eine komplexe RWA

Es sind drei Fälle zu unterscheiden

1. Stehende Welle: $u_1 = u_0, u_2 = 0$
2. Auslaufende Welle: $u_1 = u_0, u_2 = -u_0$
3. Einlaufende Welle: $u_1 = u_0, u_2 = u_0$

Für diese drei Fälle sind die reellen Lösungen

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad v_s(x, t) = u_0 \sin \psi \cdot \cos \omega t \\ 2. \quad v_a(x, t) = u_0 (\sin \psi \cdot \cos \omega t - \cos \psi \cdot \sin \omega t) = u_0 \sin(\psi - \omega t) \\ 3. \quad v_e(x, t) = u_0 (\sin \psi \cdot \cos \omega t + \cos \psi \cdot \sin \omega t) = u_0 \sin(\psi + \omega t) \end{array} \right\} \psi = \beta x - \varphi \quad (5.6.6)$$

und die komplexen

$$u(x) = u_1 \sin \psi + i \cdot u_2 \cos \psi, \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (5.6.7)$$

1. $u_s(x) = u_0 \sin \psi$
2. $u_a(x) = u_0 (\sin \psi - i \cdot \cos \psi)$
3. $u_e(x) = u_0 (\sin \psi + i \cdot \cos \psi)$

mit den drei Fällen stehende, auslaufende, einlaufende Welle

$$v_m(x, t) = \text{Re}[u_m(x) \cdot e^{-i\omega t}], \quad m = s, a, e$$

Der Imaginärteil der Lösung ist lediglich zeitlich phasenverschoben zum Realteil und wäre demzufolge auch als Lösung zu verwenden.

Eine auslaufende Welle muß die sogenannte Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.6.8)$$

Physikalisch bedeutet diese Forderung, dass die auslaufende Welle bis ins Unendliche läuft und nicht reflektiert wird, also auf kein Hindernis trifft.

Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung wird von $v_a(x, t)$ aus (5.6.6) erfüllt

$$\frac{dv_a}{dx} = \beta u_0 \cos(\psi - \omega t), \quad \frac{dv_a}{dt} = -\omega u_0 \cos(\psi - \omega t) \quad (5.6.9)$$

Die Addition (Überlagerung) einer auslaufenden Welle mit einer einlaufenden Welle ergibt eine stehende Welle. Bei einem Innenraumproblem, also endlichen Rändern $x=x_a$ und $x=x_b$ wird die an einem Rand eingeleitete Welle immer am anderen Rand reflektiert, läuft also zurück. Die Überlagerung ist im stationären Zustand demzufolge immer eine stehende Welle.

Ein analoges Vorgehen wie in 5.1 für den Zugstab ergibt mit der Fundamentallösung aus 6.11.6

$$w(x) = \frac{1}{2\beta} [u_1 \sin(\beta|x|) + i \cdot u_2 \cos(\beta|x|)] \quad (5.6.10)$$

für z.B. den Fall 2. der auslaufenden Welle erhält man

$$\zeta_a = x_a + \varepsilon, \quad \zeta_b = x_b - \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (5.6.11)$$

$$\underline{0} = \underline{G} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} + \underline{H} \begin{pmatrix} u'_a \\ u'_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int \frac{q}{EA} w(x, \zeta_a) dx \\ \int \frac{q}{EA} w(x, \zeta_b) dx \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u_a = u(x_a), u_b = u(x_b) \\ u'_a = u'(x_a), u'_b = u'(x_b) \end{matrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} -w'(x_a, \zeta_a) - 1 & w'(x_b, \zeta_a) \\ -w'(x_a, \zeta_b) & w'(x_b, \zeta_b) - 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} w(x_a, \zeta_a) & -w(x_b, \zeta_a) \\ w(x_a, \zeta_b) & -w(x_b, \zeta_b) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \cos \gamma + i \sin \gamma \\ \cos \gamma + i \sin \gamma & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} -i & -(\sin \gamma - i \cos \gamma) \\ \sin \gamma - i \cos \gamma & i \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \underline{H}^{-1} \underline{G} = \frac{\beta}{\sin \gamma} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -1 \\ 1 & -\cos \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \beta \cdot L$$

Die Matrix \underline{M} ist (beim 1D-Problem) reell und für die 3 Fälle 1., 2. und 3. identisch. Das liegt daran, dass sich beim Innenraumproblem immer eine stehende Welle des Falles 1. ergibt.

5.6.2 Beispiel

Das Beispiel aus Abbildung 5.16 vergleicht die REM-Lösung mit der zugehörigen analytischen Lösung.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \sin(\beta x - \varphi) = u_0 (\sin \beta x \cos \varphi - \cos \beta x \sin \varphi) \\ &= v_0 \cos \beta x + v_1 \sin \beta x \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

$$v_0 = -u_0 \sin \varphi, \quad v_1 = u_0 \cos \varphi, \quad \tan \varphi = -\frac{v_0}{v_1}, \quad u_0^2 = v_0^2 + v_1^2$$

Die analytische Lösung für $\beta=1.5$, $L=5$ und die RB $u_a=u(0)=u_b=u(L)=1$ ist

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \frac{1 - \cos \beta L}{\sin \beta L} = 0.6966 \quad (5.6.13)$$

Die beiden noch unbekannten Randwerte und die REM-Lösung ergeben sich zu

$$\begin{pmatrix} u'_a \\ u'_b \end{pmatrix} = -\underline{M} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0488 \\ -1.0488 \end{pmatrix}, \quad x_a = 0, \quad x_b = L \quad (5.6.14)$$

$$u_{\text{REM}}(\zeta) = -[u'_b w(x_b, \zeta) - u_b w'(x_b, \zeta)] + [u'_a w(x_a, \zeta) - u_a w'(x_a, \zeta)]$$

Der Vergleich von analytischer und numerischer Lösung nach Abbildung 5.16 zeigt erwartungsgemäß exakte Übereinstimmung. Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung dieses Beispiels für die Fälle 1. bis 3. ist in „Helmholtz_1D_x_t.gif“.

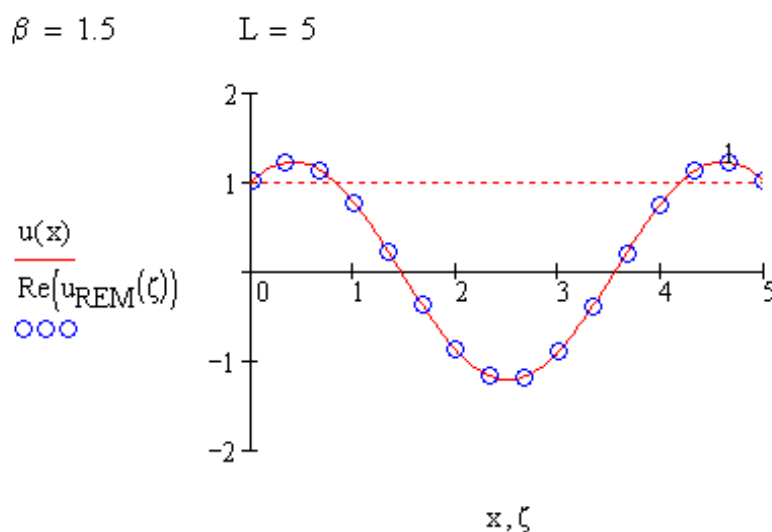


Abbildung 5.16: 1D-Schwingung

5.6.3 2D-REM – Formulierung

Die Aufbereitung der RWA zur Lösung mittels der REM ist völlig analog zu 5.3 speziell 5.3.1. Es wird statt der Fundamentallösung aus 6.11.5 die aus 6.11.7 für die auslaufende Welle verwendet.

$$w(r) = \frac{1}{4} [u_1 Y_0(\beta \cdot r) + i \cdot u_2 J_0(\beta \cdot r)] \quad \text{mit } u_1 = -u_2 = 1 \quad (5.6.15)$$

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + i \cdot Y_0(z), \quad H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - i \cdot Y_0(z), \quad z = \beta \cdot r$$

Die nachfolgenden Formeln gelten sowohl für die Poisson-Dgl aus 5.3.1 (poisson=true) mit der Fundamentallösung aus 6.11.5, als auch für die entsprechende Helmholtz-Dgl mit der komplexen Fundamentallösung (5.6.15)

$$G_0(\vec{r}) = \begin{cases} \ln r & \text{if poisson} \\ -i \frac{2\pi}{4} H_0^{(1)}(r) & \text{otherwise} \end{cases}, \quad G'_0(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{if poisson} \\ i \frac{2\pi}{4} \beta H_1^{(1)}(r) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.6.16)$$

Die Koeffizienten der Matrizen \underline{H} und \underline{G} aus (5.3.1.2) werden damit zu

$$\underline{H}_{m,k} = -\frac{L_k}{2\pi} \int_0^1 G'_0(\vec{r}_m(\vec{x}_k)) \frac{\vec{r}_m(\vec{x}_k) \cdot \vec{n}_k}{r_m(\vec{x}_k)} d\Gamma, \quad \underline{G}_{m,k} = -\frac{L_k}{2\pi} \int_0^1 G_0(\vec{r}_m(\vec{x}_k)) d\Gamma \quad (5.6.17)$$

Zwischen einem Innen- und einem Außenraumproblem gibt es keinen Unterschied bei der Berechnung der diskreten, unbekannten Randwerte. Die Diskretisierung der Geometrie des Randes, einschließlich der Richtung der Außen-Einheits-Normalenvektoren und die RB sind völlig identisch. Im Beispiel 2 wird ein spezielles Innenraumproblem mit der zugehörigen exakten 1D-Lösung verglichen. Dabei konvergiert die REM-Lösung mit stehender Welle (Ist reelle Lösung und folgt aus Nullsetzen der Zylinderfunktionen 1. Art $J_p(z)$ in den Zylinderfunktionen 3. Art $H_p^{(1)}(z)$ aus (5.6.16).) schneller als die mit auslaufender Welle gegen die exakte Lösung.

Falls nach der Berechnung der unbekannten Randwerte noch Werte im Gebiet benötigt werden, muß nur entsprechend im Innen- oder Außenraum diskretisiert werden.

5.6.4 Beispiel 1

Beispiel 1 ist in Geometrie und RB völlig analog zu dem Beispiel aus 5.3.2. Es wurde mit auslaufender Welle und $\beta=1.5$ gerechnet. Das Beispiel hat rein akademischen Charakter und kann nur zu Vergleichszwecken dienen. Index R und I kennzeichnen jeweils Real- bzw. Imaginärteil der Matrix oder des Vektors.

$$\mathbf{H}_R + \frac{1}{2} \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2054 & 0.1235 & -0.2054 \\ -0.0947 & 0.5 & -0.0947 & -0.1895 \\ 0.1235 & -0.2054 & 0.5 & -0.2054 \\ -0.0947 & -0.1895 & -0.0947 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_R = \begin{pmatrix} 0.2108 & -0.1523 & -0.0916 & -0.1523 \\ -0.1118 & 0.1706 & -0.1118 & -0.2236 \\ -0.0916 & -0.1523 & 0.2108 & -0.1523 \\ -0.1118 & -0.2236 & -0.1118 & 0.1706 \end{pmatrix} \quad (5.6.18)$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} -0.2108 & -0.2054 & 0.0916 & -0.2054 \\ 0.1118 & 0.5 & 0.1118 & -0.1895 \\ 0.0916 & -0.2054 & -0.2108 & -0.2054 \\ 0.1118 & -0.1895 & 0.1118 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_R = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.1523 & -0.1235 & -0.1523 \\ 0.0947 & 0.1706 & 0.0947 & -0.2236 \\ -0.1235 & -0.1523 & -0.5 & -0.1523 \\ 0.0947 & -0.2236 & 0.0947 & 0.1706 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \mathbf{N}^{-1} \mathbf{M} \quad \mathbf{A}_R := \text{Re}(\mathbf{A}) \quad \mathbf{A}_I := \text{Im}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0.7908 & 0.6691 & -0.1741 & 0.6691 \\ -0.3616 & 0.1489 & -0.3616 & -1.5896 \\ -0.1741 & 0.6691 & 0.7908 & 0.6691 \\ -0.3616 & -1.5896 & -0.3616 & 0.1489 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} 0.267 & -0.0167 & -0.2344 & -0.0167 \\ -0.0666 & 0.0169 & -0.0666 & 0.0359 \\ -0.2344 & -0.0167 & 0.267 & -0.0167 \\ -0.0666 & 0.0359 & -0.0666 & 0.0169 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^T = (0 \ 0 \ 100 \ 0) \quad \mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \quad \mathbf{x}_R := \text{Re}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}_I := \text{Im}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\mathbf{x}_R^T}{100} = (-2.5228 \ 1.4866 \ -1.7068 \ 1.4866) \quad \frac{\mathbf{x}_I^T}{100} = (4.1303 \ -1.7169 \ 3.7064 \ -1.7169)$$

Für $\beta \ll 1$ (etwa $\beta=10^{-3}$) gehen die Zahlenwerte der Matrizen und Vektoren in die reelle Lösung von 5.3.2 über.

5.6.5 Beispiel 2

Beispiel 2 ist ein dem 1D-Beispiel aus (5.6.2) analoges Innenraum-Problem. Die Nummerierung der Ränder entspricht dem Beispiel aus 5.3.2. Es liegt ein Rechteckgebiet (1x5) vor. Auf den kurzen Rändern (1 und 3) wurde mit 3 RE und auf den langen Rändern (2 und 4) mit 15 RE je gleicher Länge diskretisiert. Vorgegeben sind die dimensionslosen Größen: Auf den Rändern 1 und 3 ist $u=1$ auf den Rändern 2 und 4 ist $v=u_{,1}=0$. Infolge der RB für v sind die Ableitungen $u_{,1}$ im gesamten Gebiet Null und es ergibt sich das 1D-Problem von 5.6.2 mit der zugehörigen exakten Lösung zum Vergleich.

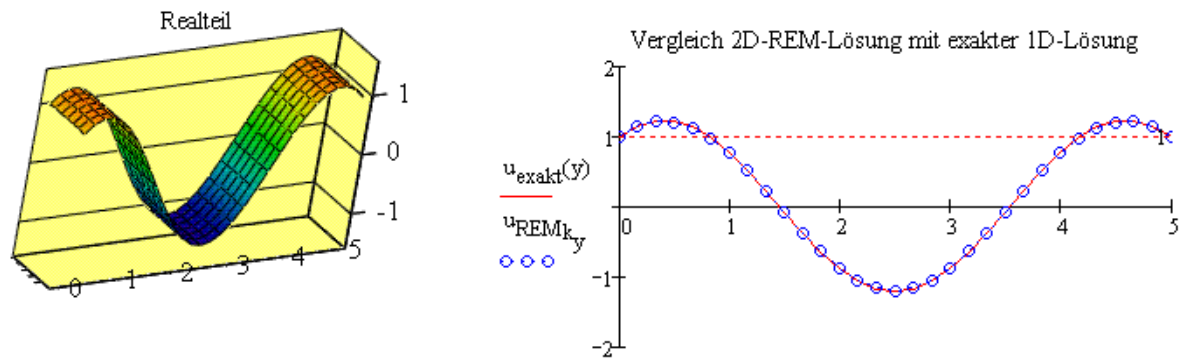


Abbildung 5.17: stehende Welle, Vergleich mit exakter Lösung

Bei der vorhandenen Diskretisierung sind die Unterschiede in der Berechnung mit stehender Welle und mit auslaufender Welle kleiner als 1%. Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung dieses Beispiels ist in „Beispiel_2D_Vgl_m_1D.gif“.

5.7 Physikalische Aufgabenstellungen mit Helmholtz-Dgl

Hier sind stellvertretend nur 2 der physikalischen Wellenausbreitungen aufgeführt.

5.7.1 Schwingende, vorgespannte Membran

Die GGB der vorgespannten Membran aus (5.4.4.1) wird um das Trägheitsglied mit der Dichte ρ erweitert. Damit ergibt sich eine äquivalente Flächenlast p am Flächenelement dA

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = -\frac{p}{h}, \quad p dA = -\ddot{u} dm = -\ddot{u} \rho h dA, \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.7.1.1)$$

Aus (5.4.4.3) wird für eine harmonische, mit der Winkelgeschwindigkeit ω erregte (Transversal-) Schwingung u der Membran

$$\Delta u - \alpha^2 \ddot{u} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{h\rho}{f}, \quad \ddot{u} = -\omega^2 u \quad (5.7.1.2)$$

$$\Rightarrow \Delta u(\underline{x}, t) + \beta^2 u(\underline{x}, t) = 0, \quad \beta = \alpha \omega$$

Mit dem Hauptkrümmungsradius $\rho_2 \rightarrow \infty$ ist $u_{,22} = 0$. Das ist der 1D-Spezialfall der schwingenden Saite mit der Querschnittsfläche A_q und der Vorspannkraft F .

$$u_{,11} + \beta^2 u = 0, \quad \alpha^2 = \frac{A_q \rho}{F}, \quad \beta = \alpha \omega \quad (5.7.1.3)$$

5.7.2 Schallabstrahlung

Die folgende Definition ist im wesentlichen <http://de.wikipedia.org/wiki/Schall> entnommen:

« Physikalisch gesehen ist Schall eine Welle. In Gasen und in Flüssigkeiten ist Schall immer eine Longitudinalwelle, also auch im wichtigsten Medium, in Luft. In Festkörpern gibt es auch Transversalwellen. Schallwellen sind Schwingungen und transportieren Energie. Sie bewegen Mediumteilchen um einen mittleren Zustand und breiten sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeit, der Schallgeschwindigkeit c aus. Diese beträgt 344 m/s in Luft bei einer Temperatur von 20° C (Meereshöhe) und 1407 m/s in Wasser bei einer Temperatur von 0° C. Die Wellenlänge λ für einen tonalen Schall kann mit der Frequenz f und der Schallgeschwindigkeit c über $\lambda=c/f$ berechnet werden.

Weiterhin ist Schall dadurch definiert, dass die Schwankungen der Zustandsgrößen Druck p und Dichte ρ klein im Verhältnis zu ihren Ruhegrößen sind. Das wird anschaulich, wenn man Schalldruckpegel von 130 dB (Dezibel) (das ist etwa die Schmerzschwelle des Menschen) mit dem normalen atmosphärischen Druck vergleicht: Der Ruhedruck der Atmosphäre beträgt 101300 Pascal (= 1013 Hektopascal), während ein Schalldruckpegel von 130 dB einem Effektivwert des Schalldrucks p von gerade einmal 63 Pascal (= 0,63 Hektopascal) entspricht.

Da Schall im Gegensatz zu Licht zu seiner Ausbreitung ein Medium benötigt, ist er im Vakuum nicht existent.

Die zugehörige Wissenschaft ist die Akustik, welche wiederum ein Untergebiet der Gasdynamik ist. Die beiden Energieformen, die sich beim Schall ineinander wandeln, sind die Kompressionsenergie und die Bewegungsenergie als Schallenergiegröße, charakterisiert werden sie aber durch die Schallfeldgrößen:

- Schalldruck p in $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (Pascal)
- Schallschnelle v in m/s »

Bei der Schallübertragung durch Schallwellen findet kein Massetransport statt. Jedes Masseteilchen schwingt um seine Ruhelage. Die Geschwindigkeit v dieser Schwingung ist die Schallschnelle und ist nicht mit der Schallgeschwindigkeit c , also der Geschwindigkeit der Schallausbreitung zu verwechseln.

Für das Medium werden folgende physikalische Einschränkungen gemacht: Die betrachteten (Longitudinal-)Wellen breiten sich ohne Reibung (Viskosität ist Null), temperaturunabhängig, energieerhaltend und mit konstanter Schallgeschwindigkeit c aus.

Damit ergeben sich die Grundgleichungen:

- Impulsbilanz (Bewegungsgleichung) für Masseelement dm
- Kontinuitätsgleichung für Masseelement dm

- Gleichung für die Schallgeschwindigkeit

Impulsbilanz und Kontinuitätsgleichung sind auf das Volumenelement dV ($dm = \rho dV$) bezogen.

$$\rho \vec{a} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \vec{f} - \vec{\nabla} p, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} \quad (5.7.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho a_Q$$

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

in Koordinatenschreibweise (Summation über m)

$$\rho (v_{k,t} + v_{k,m} v_m) = f_k - p_{,k}, \quad m = 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{c^2} p_{,t} + (\rho v_m)_{,m} = \rho a_Q$$

(Zur Überführung in die Koordinatenschreibweise siehe 6.1)

Hierbei sind:

ρ	-	Dichte [kg/m^3]
v	-	Schallschnelle [m/s]
t	-	Zeit [s]
f	-	Volumenkraft [N/m^3]
p	-	Schalldruck [N/m^2]
a_Q	-	Quellgeschwindigkeit [$1/\text{s}$]

Die (Eulerschen-)Koordinaten $x_m = x_m(t)$ des Masseelementes dm ändern sich mit der Zeit. Die beiden Summanden der Beschleunigung in der Bewegungsgleichung aus (5.7.2.1) resultieren aus der materiellen Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t, x_m) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t}, \quad v_m = \frac{\partial x_m}{\partial t} \quad (5.7.2.2)$$

in Koordinatenschreibweise $a_k = v_{k,t} + v_{k,m} v_m$

Die 5 Gleichungen aus (5.7.2.1) enthalten 5 unbekannte Zustandsgrößen: v_1, v_2, v_3, p und ρ .

Der Gradient der Dichte ist sehr klein. Damit wird aus $(\rho v_m)_{,m} \approx \rho v_{m,m}$.

Bei der Schallabstrahlung in Medien ohne Viskosität darf die (nichtlineare) konvektive Beschleunigung $v_{k,m} v_m$ gegenüber der partiellen Zeitableitung $v_{k,t}$ vernachlässigt werden.

Zur Abschätzung kann man die Lösung der 1D-Gleichungen (5.6.6) mit der Schalldruckamplitude $p_0=100\text{Pa}$, der Dichte von Luft (bei 20°C) $\rho=1.2\text{kg/m}^3$ und der Schallgeschwindigkeit $c=344\text{m/s}$ auswerten. Es ergibt sich damit aus (5.7.2.1) ein Amplitudenverhältnis

$$p(x, t) = p_0 \sin(\beta x - \omega t) = p_0 \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] \quad (5.7.2.3)$$

$$v_{,t} = A_0 \cdot f_0(x, t), \quad v_{,x} v_x = A_1 f_1(x, t)$$

$$1 \gg \frac{A_1}{A_0} = \frac{p_0}{\rho \cdot c^2} = 7 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow a = v_{,t} + v_{,x} v_x \approx v_{,t}$$

Volumenkräfte und Quellen werden nicht zugelassen, $f_k=0$, $a_Q=0$. Durch Elimination der Schallschnelle v und der Dichte ρ über die partielle Ortsableitung der Impulsbilanz, der partiellen Zeitableitung der Kontinuitätsgleichung und der Voraussetzung harmonischer Zeitabhängigkeit des Schalldruckes p ergibt sich aus (5.7.2.1) eine partielle Dgl (Helmholtz-Dgl) für p

$$\left. \begin{aligned} \rho v_{k,tk} &= -p_{,kk} \\ \frac{1}{c^2} p_{,tt} + \rho v_{m,mt} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_{,kk} - \frac{1}{c^2} p_{,tt} = \Delta p - \frac{1}{c^2} p_{,tt} = 0 \quad (5.7.2.4)$$

$$\text{mit } p_{,tt} = -\omega^2 p \Rightarrow \Delta p(\underline{x}, t) + \beta^2 p(\underline{x}, t) = 0, \quad \beta = \frac{\omega}{c}$$

Randbedingungen sind :

- wesentliche RB für den Schalldruck p
- natürliche RB für $p_{,n} = -\rho v_{n,t}$, den Impuls (gleich Null für starre Wand, ungleich Null für schwingende Wand, z.B. Lautsprechermembran)

5.8 Beispiele mit Helmholtz-Dgl

Die Geometrie der Gebiete ist mit den Bezeichnungen aus Abbildung 5.18 vorgegeben (ist Abbildung 5.6 ohne Quelle Q).

$$r_{0I} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0 \end{pmatrix}, \quad B_I = H_I = 2 \quad (5.7.2.1)$$

$$r_{0A} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad B_A = H_A = 10$$

Es sind ein inneres Quadrat (Rand I) der Länge 2 und ein äußeres Quadrat (Rand A) der Länge 10 vorgegeben. Die y-Achse ist Symmetrieachse.

Für alle Beispiele gilt $\beta=4$ und auf Rand I sind natürliche RB vorgegeben, auf dem Rand II mit Eins und den anderen 3 Rändern mit Null. Jeder der 4 Teilränder von I ist mit 8 RE diskretisiert.

Bei den beiden Inneraumproblemen ist jeder der 4 Teilränder von A mit 32 RE diskretisiert. Sie unterscheiden sich nur durch die RB auf dem Rand A. Bei der Membran sind dort homogene wesentliche RB und beim Schallproblem homogenen natürliche RB vorgegeben.

Beim Außenraumproblem ist A kein Rand (also auch ohne RE-Diskretisierung), sondern nur die (willkürliche) Begrenzung des Gebietes, für das im Postprocessing Funktionswerte berechnet wurden.

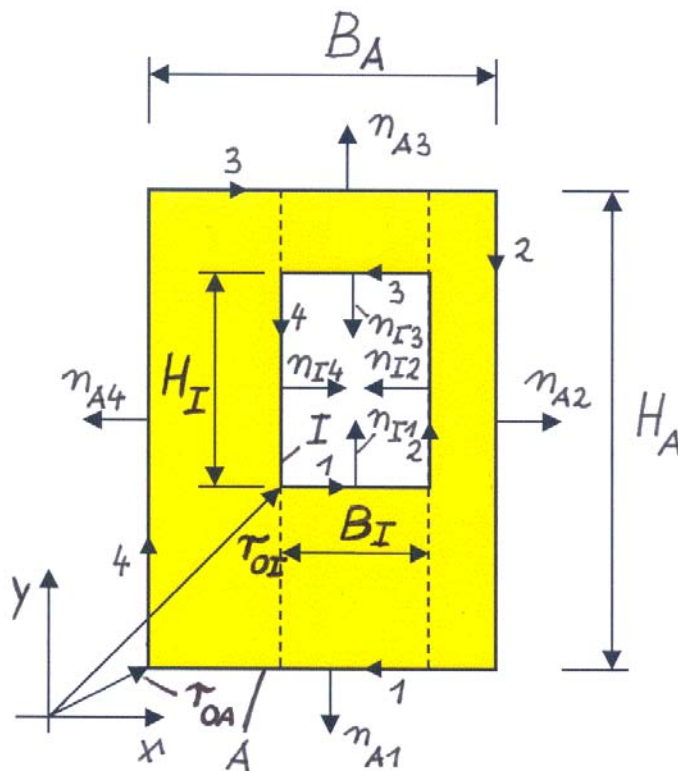


Abbildung 5.18: Geometrie des Gebietes

5.8.1 Membran (2D-Innenraumproblem)

Auf dem Außenrand A sind homogene, wesentliche RB $u_{A1}=u_{A2}=u_{A3}=u_{A4}=0$ vorgegeben.

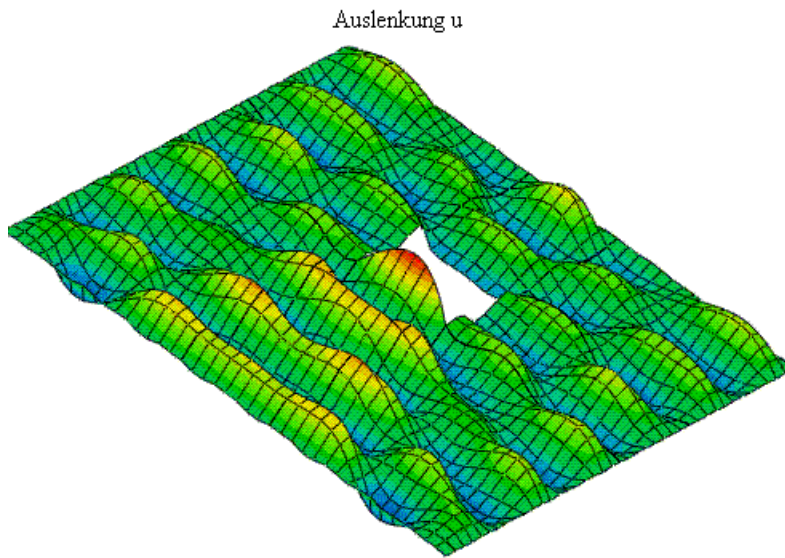


Abbildung 5.19: schwingende, vorgespannte Membran

Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung ist in „Helmholtz_2D_Innen_Beta_eq_4_Membran_auslaufend.gif“.

5.8.2 Ebene Schallabstrahlung (2D-Innenraumproblem)

Auf dem Außenrand A sind homogene, natürliche RB (Impuls) $v_{A1}=v_{A2}=v_{A3}=v_{A4}=0$ vorgegeben.

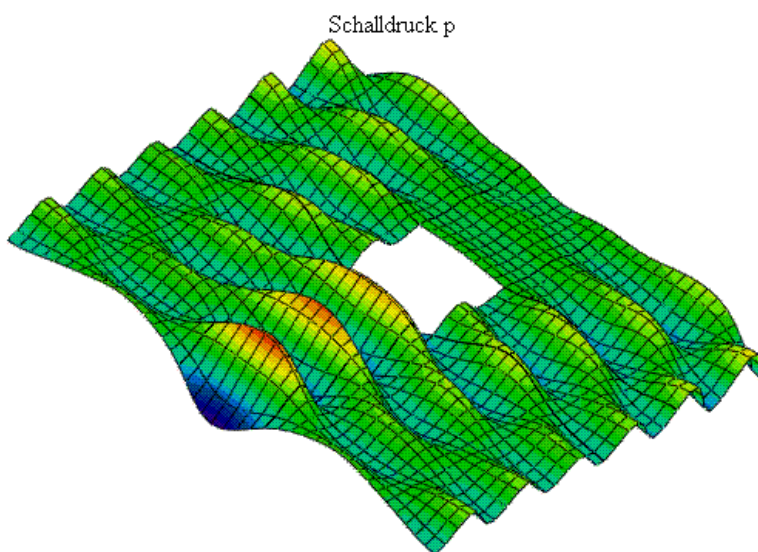


Abbildung 5.20: Schallabstrahlung, Innenraumproblem

Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung ist in „Helmholtz_2D_Innen_Beta_eq_4_auslaufend.gif“.

5.8.3 Ebene Schallabstrahlung (2D-Außenraumproblem)

Die äußere Begrenzung des Gebietes ist kein Rand, sondern nur die Begrenzung des Gebietes, für das im Postprocessing Funktionswerte berechnet wurden.

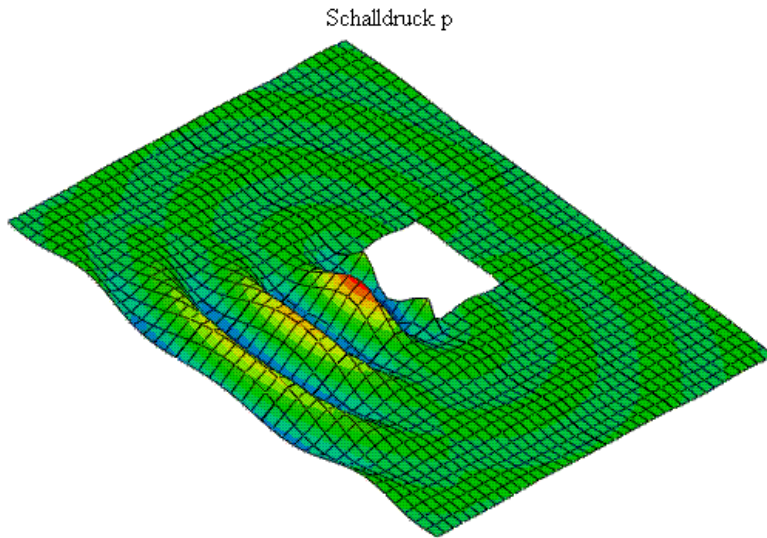


Abbildung 5.21: Schallabstrahlung, Außenraumproblem

Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung ist in „Helmholtz_2D_Aussen_Beta_eq_4.gif“.

6 Grundlagen

Die in diesem Kapitel zusammengestellten Grundlagen werden zum Verständnis der Problembeschreibungen und Problemlösungen in den vorangestellten Kapiteln benötigt. Um diese nicht in entsprechenden Lehrbüchern nachschlagen zu müssen, werden sie in diesem Kapitel zusammengestellt. Sie sind (fast) ausschließlich für die Spezialfälle kartesischer Koordinaten (2D und 1D) formuliert.

2D: $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=0$,

1D: $x_1=x$, $x_2=0$, $x_3=0$.

6.1 Eigenschaften ebener Skalar- und Vektorfelder

Partielle Ableitung eines Skalarfeldes u :

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_{,1} \quad , \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_{,2} \quad (6.1.1)$$

Nabla-Operator und Gradient eines Skalarfeldes u :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (6.1.2)$$

$$\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u = \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} = u_{,k} \vec{e}_k = u_{,1} \vec{e}_1 + u_{,2} \vec{e}_2$$

in Polarkoordinaten r, φ :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u = \begin{pmatrix} u_{,r} \\ \frac{1}{r} u_{,\varphi} \end{pmatrix} = u_{,r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} u_{,\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Die nachfolgenden Formeln stellen einige wichtige Operationen mit dem Nabla-Operator zusammen.

Bei einem ebenen Skalarfeld $u(x_1, x_2)$ ist $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u$ ein ebener Vektor der orthogonal zu den Niveaulinien $u(x_1, x_2) = \text{konst.}$ verläuft.

Laplace-Operator eines Skalarfeldes u :

$$\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = u_{,kk} = u_{,11} + u_{,22} \quad (6.1.3)$$

in Polarkoordinaten r, φ :

$$\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} + \frac{1}{r^2} u_{,\varphi\varphi}$$

Richtungsableitung eines Skalarfeldes u in Richtung eines Einheitsvektors \vec{n}

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = u_{,n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = u_{,k} n_k = u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2 \quad (6.1.4)$$

Die Richtungsableitung eines Skalarfeldes $u(x_1, x_2)$ in Richtung eines Einheitsvektors ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes von u bei Fortschreiten um eine Längeneinheit von einem Punkt $P(x_1, x_2)$ in Richtung des Einheitsvektors.

Divergenz eines Vektorfeldes \vec{w} :

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = w_{k,k} = w_{1,1} + w_{2,2} \quad (6.1.5)$$

Der Begriff Divergenz kommt aus der Strömungsmechanik und bedeutet Auseinanderfließen (infolge von Quellen). Die Divergenz ist ein Maß für die Quelldichte (Ergiebigkeit der Quelle pro Volumeneinheit). Bei positivem Wert handelt es sich um eine Quelle und bei negativem um eine Senke. Ein Feld ist quellenfrei, wenn die Divergenz im gesamten Feld Null ist.

Rotation eines Vektorfeldes \vec{w} :

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{kmn} w_{n,m} \vec{e}_k \quad (6.1.6)$$

für ebenen Fall mit $w_3 = 0$ und $w_{1,3} = w_{2,3} = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{w} = (w_{2,1} - w_{1,2}) \vec{e}_3$$

Der Begriff Rotation stammt ebenfalls aus der Strömungsmechanik. Die Rotation ist ein Vektorfeld, daß nach Betrag und Richtung Aussagen über Wirbel im Feld angibt. Ein Feld ist wirbelfrei, wenn die Rotation im gesamten Feld Null ist.

In der Formel (6.1.7) sind beim Nabla-Operator noch die Klammern eingefügt, um das „anwenden auf“ explizit angeben zu können.

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} () = u_k \vec{e}_k \cdot ()_{,m} \quad \vec{e}_m = u_k ()_{,m} \delta_{km} = u_k ()_{,k} = u_1 ()_{,1} + u_2 ()_{,2} \quad (6.1.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\vec{u}) &= u_k \vec{e}_k \cdot (u_m \vec{e}_m)_{,n} \quad \vec{e}_n = u_k \delta_{kn} (u_m \vec{e}_m)_{,n} = u_k (u_m \vec{e}_m)_{,k} \\ &= u_k u_{m,k} \vec{e}_m = (u_1 u_{1,1} + u_2 u_{1,2}) \vec{e}_1 + (u_1 u_{2,1} + u_2 u_{2,2}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Gaußscher Integralsatz (in der Ebene):

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{w} \, dA = \oint_R (\vec{w} \cdot \vec{n}) \, ds \quad (6.1.8)$$

$$\iint_A (w_{1,1} + w_{2,2}) \, dA = \oint_R (w_1 n_1 + w_2 n_2) \, ds$$

Die Randkurve R der Fläche A wird dabei in Gegenuhrzeigerrichtung durchlaufen (Diese Vereinbarung ist sinnvoll, aber nicht notwendig.) und der Vektor \vec{n} ist der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor (steht senkrecht auf dem Rand).

Spezielle Anwendungen:

$$\vec{w} = v \vec{\nabla} u = v \cdot \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} \quad (6.1.9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w} &= \vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u + v \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u + v \Delta u \\ &= v_{,1} u_{,1} + v_{,2} u_{,2} + v(u_{,11} + u_{,22}) \end{aligned}$$

$$\iint_A \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u \, dA + \iint_A v \Delta u \, dA = \oint_R v \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \, ds = \oint_R v u_{,n} \, ds$$

$$\Rightarrow \iint_A v \Delta u \, dA = - \iint_A \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u \, dA + \oint_R v u_{,n} \, ds$$

$$\iint_A v(u_{,11} + u_{,22}) \, dA = - \iint_A (u_{,1} v_{,1} + u_{,2} v_{,2}) \, dA + \oint_R v(u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2) \, ds$$

mit $v=1$ wird aus (6.1.9):

$$\vec{w} = \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} \quad (6.1.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = u_{,11} + u_{,22} = \Delta u$$

$$\iint_A \Delta u \, dA = \oint_R (u_{,1} n_1 + u_{,2} n_2) \, ds = \oint_R u_{,n} \, ds$$

und durch Differenzbildung zweier inverser Vektorfelder:

$$\vec{w}_{vu} = v \vec{\nabla} u = v \cdot \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_{uv} = u \vec{\nabla} v = u \cdot \begin{pmatrix} v_{,1} \\ v_{,2} \end{pmatrix} \quad (6.1.11)$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_{vu} - \operatorname{div} \vec{w}_{uv} = v \Delta u - u \Delta v$$

$$\iint_A v \Delta u \, dA = - \iint_A \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u \, dA + \oint_R v u_{,n} \, ds$$

$$\iint_A u \Delta v \, dA = - \iint_A \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dA + \oint_R u v_{,n} \, ds$$

$$\iint_A (v \Delta u - u \Delta v) \, dA = \oint_R (v u_{,n} - u v_{,n}) \, ds$$

Die entsprechenden 1D-Gleichungen (6.1.9) bis (6.1.11). sind die Gleichungen für die (1D-) partielle Integration und haben die Form:

$$\int_0^1 v u_{,11} \, dx_1 = - \int_0^1 v_{,1} u_{,1} \, dx_1 + (v u_{,1}) \Big|_0^1 \quad (6.1.12)$$

$$\int_0^1 u_{,11} \, dx_1 = (u_{,1}) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 (v u_{,11} - u v_{,11}) \, dx_1 = (v u_{,1} - u v_{,1}) \Big|_0^1$$

6.2 Selbstadjungierter Differentialoperator

Selbstadjungiert:

Eigenschaft einer Größe, die identisch ist ihrer adjungierten Größe, z.B. ein selbstadjungierter (oder hermitescher) Operator oder eine selbstadjungierte (oder hermitesche) Matrix.

Der Operator $L(\)$ ist adjungiert, wenn gilt:

$$\text{zu } L(\) \text{ adjungierter Operator } L^*(\) : \int_a^b [L(v)] w \, dx = \int_a^b [L^*(w)] v \, dx \quad (6.2.1)$$

Der Operator $L(\)$ ist selbstadjungiert, wenn gilt $L^*(\) = L(\)$.

Beispiel: Gegeben ist eine RWA.

$$(f \cdot u')' - c \cdot u + q = 0 \quad (6.2.2)$$

$$\text{Differentialoperator : } L(u) = (f \cdot u')' - c \cdot u$$

$$\text{Dgl.: } L(u) + q = 0$$

$$\text{RB: } \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \alpha_2$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta_2$$

Der Differentialoperator $L(\cdot)$ mit auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktionen f, f' und c ist selbstadjungiert.

Beweis: Erfüllen die Funktionen v und w die homogenen RB von (6.2.2), mit mindestens einem α_i und β_i ungleich Null ($i=0,1$), so gilt:

$$\int_a^b [L(v)] w \, dx = \int_a^b [L(w)] v \, dx \quad (6.2.3)$$

$$\int_a^b [(f \cdot v')' - c \cdot v] w \, dx = \int_a^b [(f \cdot w')' - c \cdot w] v \, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f \cdot v')' w \, dx = \int_a^b (f \cdot w')' v \, dx$$

Durch partielle Integration beider Seiten wird:

$$[(f \cdot v') w]_a^b - \int_a^b [(f \cdot v') w'] \, dx = [(f \cdot w') v]_a^b - \int_a^b [(f \cdot w') v'] \, dx \quad (6.2.4)$$

$$\Rightarrow [(f \cdot v') w]_a^b = [(f \cdot w') v]_a^b$$

$$f(b) \{v'(b) w(b) - w'(b) v(b)\} - f(a) \{v'(a) w(a) - w'(a) v(a)\} = 0$$

Für z.B. $\beta_0 \neq 0$ gilt mit den RB von (6.2.2):

$$v(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_0} v'(b), \quad w(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_0} w'(b) \quad (6.2.5)$$

Damit verschwindet der Randterm auf b und analog der auf a .

6.3 Dirac-Impuls

Der Dirac-Impuls δ ist definiert durch:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{für } |\vec{r}| = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{\zeta}, \quad r_i = x_i - \zeta_i \quad i = 1(,2,3) \quad (6.3.1)$$

$$\int_{G_\infty} \delta(\vec{r}) dG = 1, \quad G_\infty - \text{unendlich großes Gebiet}$$

$$\Rightarrow u(\vec{\zeta}) = \int_{G_\infty} u(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{r}) \cdot dG \quad \text{für } |\vec{r}| = 0 \text{ gilt: } \vec{x} = \vec{\zeta}$$

Wenn das Gebietsdifferential dG in Längeneinheiten gemessen wird (z.B. in m^2 beim 2D-Problem), hat der Dirac-Impuls δ die physikalische Einheit m^{-2} .

Im 1D-Fall gilt:

$$\delta(x - \zeta) = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{für } x = \zeta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \zeta) dx = 1$$

$$\Rightarrow u(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \delta(x - \zeta) dx$$

Wenn das Längendifferential dx in Längeneinheiten gemessen wird (z.B. in m), hat der Dirac-Impuls δ die physikalische Einheit m^{-1} .

Der Dirac-Impuls δ wird auch als „Filterfunktion“ bezeichnet, da entsprechend der Definition von (6.3.1) bzw. (6.3.2) der Funktionswert $u(\vec{\zeta})$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{\zeta}$, der Stelle der Einleitung des Dirac-Impulses δ , „herausgefiltert“ wird.

6.4 Satz von Maxwell-Betti

Die Arbeit, die die Kraftgrößen eines Systems 1 an den Verformungen eines anderen Systems 2 leisten ist gleich der Arbeit der Kraftgrößen des Systems 2 an den Verformungen des Systems 1.

System 1 und System 2 unterscheiden sich durch Belastung und/oder Lagerung.

Das sei am Beispiel des 1D-Problems eines Zugstabes mit elastischer Stützung (1.4) dargestellt:

$$EAu'' - c \cdot u + q = 0 \quad (6.4.1)$$

System 1:

- Unendlicher langer Stab mit beliebigen RB im Unendlichen (Starrkörperbewegung ist behindert)

- Längsverschiebung w , Längskraft F_w
- Belastung mit Einzelkraft F bei $x=\zeta$ ($a < \zeta < b$)
- Streckenlast $q_w=0$
- Längsverschiebungen und Längskräfte (Schnittkräfte) bei a und b sind w_a, w_b, F_{aw}, F_{bw}

System 2:

- Endlich langer Stab ($a < x < b$) mit RB für (u_a oder F_{au}) und (u_b oder F_{bu})
- Längsverschiebung u , Längskraft F_u
- Belastung mit Streckenlast q_u

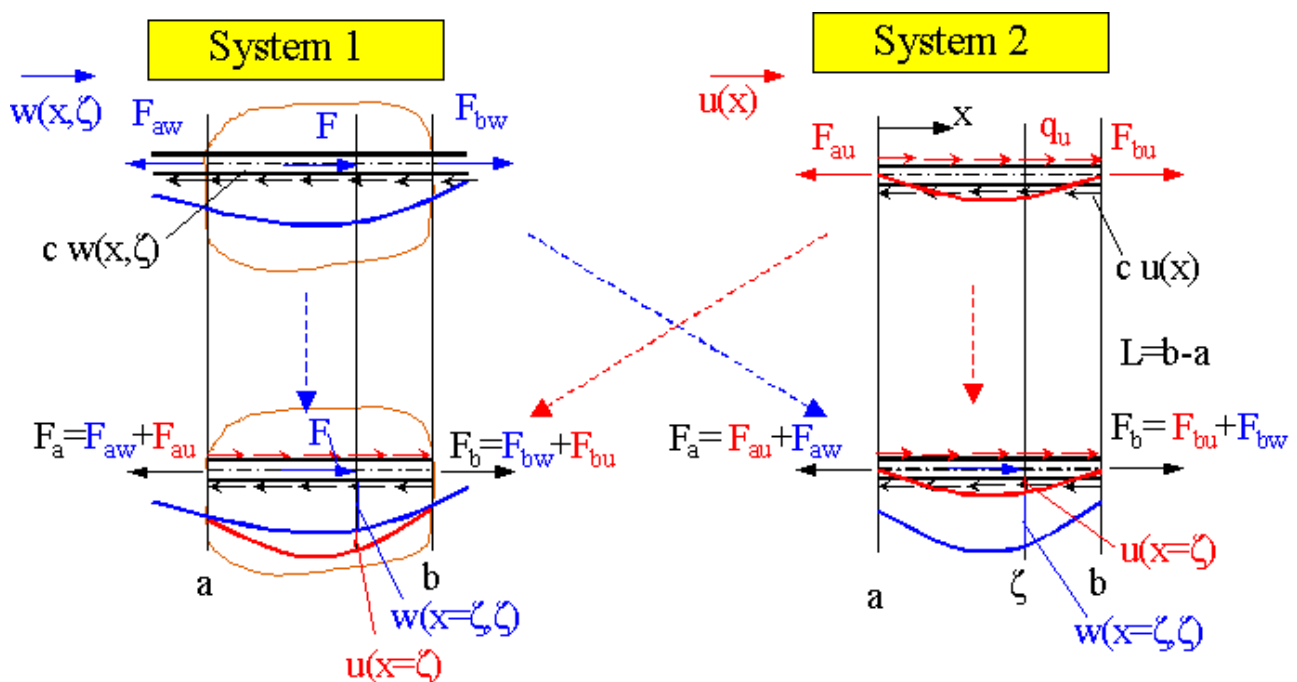


Abbildung 6.1: System 1 und System 2 für Satz von Maxwell-Betti

Aus dem unendlich langen Stab wird das Teilstück $a < x < b$ herausgeschnitten. Dieses Teilstück ist das Systems 1. An den Schnittstellen $x=a$ und $x=b$ werden die Schnittkräfte F_{aw} und F_{bw} eingetragen.

$$\text{Syst.1 Dgl: } EA \cdot w'' - c \cdot w = 0 \quad (a < x < b)$$

$$\text{Syst. 2 Dgl: } EA \cdot u'' - c \cdot u + q_u = 0 \quad (a < x < b) \quad (6.4.2)$$

$$\text{beliebige RB} \Rightarrow w_a, F_{aw}, w_b, F_{bw} \quad \text{RB für } (u_a \text{ oder } F_{au}) \text{ und } (u_b \text{ oder } F_{bu})$$

Beide Systeme werden in unterschiedlicher Reihenfolge belastet. Bei Voraussetzung linearer Dgl gilt das Superpositionsgesetz und nach vollständiger Belastung sind die Potentiale beider Systeme (unabhängig von der Reihenfolge der Lastaufbringung) gleich $\pi_w = \pi_u$.

<p>System 1, zuerst Belastung mit $F=F(\zeta)$</p> $\pi_{w1} = \frac{1}{2} F(\zeta) \cdot w(\zeta, \zeta) + \frac{1}{2} \int_a^b c \cdot w(x, \zeta) dx + \frac{1}{2} (F_{Rw} w_R) \Big _a^b$ <p>danach Belastung mit $q_u(x)$</p> $\pi_w = \pi_{w1} + \pi_{u1} + F(\zeta) \cdot u(\zeta) + (F_{Rw} u_R) \Big _a^b$	<p>System 2, zuerst Belastung mit $q_u(x)$</p> $\pi_{u1} = \frac{1}{2} \int_a^b q_u(x) u(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b c \cdot u(x) dx + \frac{1}{2} (F_{Ru} u_R) \Big _a^b$ <p>danach Belastung mit $F=F(\zeta)$</p> $\pi_u = \pi_{u1} + \pi_{w1} + \int_a^b q_u(x) w(x, \zeta) dx + (F_{Ru} w_R) \Big _a^b$	(6.4.3)
---	--	----------------

Im 2. Belastungsschritt leisten die schon im 1. Schritt aufgebrauchten Lasten und die zugehörigen Randkräfte an den hinzukommenden Verformungen mit ihrem Endwert die Arbeit (also ohne Faktor $1/2$).

Satz von Maxwell-Betti:

$$\pi_w = \pi_u \quad (6.4.4)$$

$$\Rightarrow F(\zeta) \cdot u(\zeta) + (F_{Rw} u_R) \Big|_a^b = \int_a^b q_u(x) w(x, \zeta) dx + (F_{Ru} w_R) \Big|_a^b$$

Wenn die Lösung $w(x, \zeta)$ bekannt ist, lässt sich aus (6.4.4) die noch unbekannte Lösung $u(\zeta)$ bestimmen.

$$u(\zeta) = \int_a^b q_u(x) w^*(x, \zeta) dx + (F_{bu} w_b^* - F_{au} w_a^*) - (F_{bw}^* u_b - F_{aw}^* u_a) \quad (6.4.5)$$

$$w^*(x, \zeta) = \frac{w(x, \zeta)}{F(\zeta)} - \text{Fundamentallösung}, \quad w_R(\zeta) = w(x_R, \zeta)$$

$$w_R^*(\zeta) = \frac{w_R(\zeta)}{F(\zeta)}, \quad F_{Rw}^*(\zeta) = \frac{F_{Rw}(\zeta)}{F(\zeta)}, \quad R = a, b$$

Darin sind alle Größen mit dem Index * bekannt. Zwei der Randgrößen (u_a oder F_{au}) und (u_b oder F_{bu}) sind noch unbekannt (zwei davon sind über die RB vorgegeben). Deshalb muß (6.4.5) zweimal (jeweils einmal für den Rand a und den Rand b) formuliert werden, um die noch unbekannten zwei Randwerte berechnen zu können.

(6.4.5) entspricht vollständig (2.3.5), der Inversen Form. Die Unterschiede in den Vorzeichen der Gleichungen resultieren im Vorzeichenunterschied beider Fundamentallösungen. In diesem Abschnitt wurde die Kraft $F(\zeta)$ so gerichtet, dass sie mit $u(\zeta)$ arbeitskonjugiert ist ($F(\zeta) \cdot u(\zeta) > 0$), weil der Satz von Maxwell-Betti ein Arbeitsäquivalent darstellt. Das ist bei vielen (ebenso richtigen) Lösungen in Lehrbüchern, die formal mathematisch hergeleitet wurden, nicht der Fall. Deshalb ist in 2.3 die Kraft F in der anderen Richtung positiv definiert und das Vorzeichen der Fundamentallösung kehrt sich demzufolge um.

6.5 Prinzip der virtuellen Arbeit

Prinzip der virtuellen Arbeit:

Bei einem sich im Gleichgewicht befindlichen mechanischen System (resultierende Wirkung aller angreifenden äußeren Beanspruchungen ist Null) ist die durch virtuelle Verformungen geleistete virtuelle Arbeit gleich Null.

$$\Rightarrow \delta W = \delta W_i - \delta W_a = 0 \quad \delta W - \text{virtuelle Arbeit} \quad (6.5.1)$$

δW_i -virtuelle innere Arbeit, δW_a -virtuelle äußere Arbeit

Virtuelle Verformung:

- Verschiebung δu , Dehnung $\delta \varepsilon$
- Gedachte Verformung
- Differentiell klein
- Mit den inneren (Zusammenhang des Kontinuums) und äußeren (Lager-, Verformungsbedingungen) Bindungen verträglich

Beispiel: elastisch gestützter Zugstab

$$\delta W_i = \int \sigma \cdot \delta \varepsilon \, dV \quad (6.5.2)$$

$$\text{mit : } \sigma = \frac{F_L}{A}, \quad dV = A \, dx, \quad \delta \varepsilon = \delta u'$$

$$\delta W_i = \int F_L \cdot \delta u' \, dx$$

$$\delta W_a = F_b \delta u_b - F_a \delta u_a + \int (q - c \cdot u) \delta u \, dx$$

Die Größe δW in (6.5.1) kann auch als erste Variation von W aufgefasst werden, wenn man δ nicht als Kennzeichnung virtueller Größen, sondern als Variationssymbol auffasst.

Durch partielle Integration der virtuellen inneren Arbeit δW_i wird daraus:

$$\delta W_i = \int_a^b F_L \cdot \delta u' \, dx = [F_{LR} \delta u_R]_a^b - \int_a^b F_L' \cdot \delta u \, dx \quad (6.5.3)$$

$$\delta W = \delta W_i - \delta W_a = \int_a^b (-F_L' - q + c \cdot u) \cdot \delta u \, dx + [(F_{LR} - F_R) \delta u_R]_a^b = 0$$

(6.5.3) enthält noch nicht die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (kinetische Bedingung) aus (1.2), gilt also auch für nichtlineares Materialgesetz. Die virtuelle Verformung δu ist im Rahmen der o.a. Bedingungen beliebig. Deshalb kann (6.5.3) nur erfüllt sein für:

$$F_L' + q - c \cdot u = 0 \quad \text{mit} \quad F_L = EA \cdot u' \quad (6.5.4)$$

und

$$\left[(F_{LR} - F_R) \delta u_R \right]_a^b = [F_L(b) - F_b] \cdot \delta u(b) - [F_L(a) - F_a] \cdot \delta u(a) = 0$$

daraus folgt

$$\text{Dgl: } EAu'' - c \cdot u + q = 0$$

$$\text{RB: } F_L(b) - F_b = 0 \quad \text{oder} \quad \delta u(b) = 0$$

$$F_L(a) - F_a = 0 \quad \text{oder} \quad \delta u(a) = 0$$

Die virtuellen Verformungen an den Rändern sind dann Null, wenn wesentliche RB (RB für die Verformungen) vorgegeben sind.

Über das Prinzip der virtuellen Arbeit können die Dgl und die allgemeinen RB formuliert werden. Die Dgl in (6.5.4) ist (bis auf das hier nicht berücksichtigte dynamische Glied) identisch mit der Dgl (1.4) .

6.6 Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials

Die in einem elastischen System auftretenden Verformungen stellen sich im Gleichgewichtszustand so ein, daß das elastische Gesamtpotential einen minimalen Wert annimmt.

Das Material ist linear-elastisch. Die Lasten sind konservativ, d.h. richtungstreu.

Für die Herleitung des Prinzips vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials ist es sinnvoll, das Symbol δ nicht mehr für die Bezeichnung einer virtuellen Verformungsgröße δu zu betrachten, sondern als 1.Variation δu einer Verformung u . Man kann dann rein formal die Regeln der Variationsrechnung verwenden, ohne sich um die anschauliche Bedeutung entsprechend des „Prinzips der virtuellen Arbeit“ kümmern zu müssen. Die hier verwendeten Regeln der Variationsrechnung sind analog zu den entsprechenden der Differentialrechnung (totales Differential, Kettenregel, Produktenregel).

1.Variation δ :

- Verschiebung δu , Dehnung $\delta \epsilon$
- Differentiell kleine Abweichung von der exakten Lösung
- Mit den inneren (Zusammenhang des Kontinuums) und äußeren (Lager-, Verformungsbedingungen) Bindungen verträgliche Abweichung von der exakten Lösung

(6.5.1) wird hier nicht als virtuelle Arbeit, sondern als 1.Variation der Arbeit des Systems betrachtet:

$$W = W_i - W_a = \text{Min.} \quad (6.6.1)$$

$$\Rightarrow \delta W = \delta W_i - \delta W_a = 0 \quad \delta W - 1.\text{Variation der Arbeit}$$

δW_i - 1.Variation der inneren Arbeit,

δW_a - 1.Variation der äußeren Arbeit

Bei der Extremwertberechnung von Funktionen werden die lokalen Extremwerte der Funktionen über die 1.Ableitungen der Funktionen berechnet.

Bei der Variationsrechnung nehmen Integralgleichungen Extremwerte an. Diese werden über die 1.Variation dieser Gleichungen bestimmt. Für das Beispiel des Stabes aus Abbildung 1.1 wird ohne das Trägheits-Glied mit

$$W_i = \int W_i^* dV, \quad W_i^* = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} F_c \cdot u = \frac{1}{2} \left(E \cdot \varepsilon^2 + \frac{c}{A} u^2 \right), \quad F_c = \frac{c}{A} u \quad (6.6.2)$$

$$W_a = F_b u_b - F_a u_a + \int q u \, dx$$

W_a ist die Endwertarbeit, bei linearer Elastizität die doppelte äußere Arbeit.

Wegen innerer Arbeit gleich äußerer Arbeit gilt $W_a = 2W_i$ und damit mit $W = W_i - W_a = -W_i = \text{Min.} \Rightarrow W_i = \text{Max.}$ Die innere Arbeit nimmt also einen Maximalwert an. Daraus folgt, daß bei vorgegebenen Lasten die zugehörigen Verformungen (der exakten Lösung im Mittel) am größten sind. Eine Näherungslösung hat deshalb (im Mittel) kleinere Verformungen, ist also zu steif.

$$\delta W_i = \int \delta W_i^* dV = \int (\sigma \delta \varepsilon + F_c \delta u) A \, dx = \int (E \varepsilon \delta \varepsilon A + c u \delta u) \, dx \quad (6.6.3)$$

$$= \frac{1}{2} \delta \int (E A \varepsilon^2 + c \cdot u^2) \, dx$$

$$\delta W_a = F_b \delta u_b - F_a \delta u_a + \int q \delta u \, dx, \quad \int q \delta u \, dx = \delta \int q u \, dx$$

$$\delta W = \delta W_i - \delta W_a$$

$$= \delta \int \left[\frac{1}{2} E A (u')^2 + \frac{1}{2} c \cdot u^2 - q u \right] dx - [F_R \delta u_R]_a^b = 0$$

Die letzte Gleichung von (6.6.3) ist die notwendige Bedingung für das Minimum des elastischen Gesamtpotentials des Stabes.

Zur Variation sind nur die Verformungen (hier u) und keine Verformungsableitungen (hier u') zugelassen \Rightarrow partielle Integration ($\int u v' dx = [u v]_a^b - \int u' v dx$). Im folgenden Kontext wird auch die Bezeichnung π für das elastische Gesamtpotential (bisher mit W bezeichnet) verwendet:

$$\pi = \int Q(x, u, u') dx - [F_R u_R]_a^b = \text{Min.} \quad (6.6.4)$$

$$Q(x, u, u') = \left[\frac{1}{2} EA (u')^2 + \frac{1}{2} c \cdot u^2 - q u \right]$$

$$\Rightarrow \int \delta Q(x, u, u') dx - [F_R \delta u_R]_a^b = 0$$

$$\delta Q(x, u, u') = \frac{\partial Q}{\partial u} \delta u + \frac{\partial Q}{\partial u'} \delta u'$$

$$\text{partielle Integration: } \int \frac{\partial Q}{\partial u'} \delta u' dx = \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial u'} \right)_R \delta u_R \right]_a^b - \int \left(\frac{\partial Q}{\partial u'} \right)' \delta u dx$$

$$\delta \pi = \int \left[\frac{\partial Q}{\partial u} - \left(\frac{\partial Q}{\partial u'} \right)' \right] \delta u dx + \left[\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial u'} \right)_R - F_R \right) \delta u_R \right]_a^b = 0$$

Daraus ergeben sich analog zu (6.5.4) die Dgl und die RB des Problems:

$$Q(x, u, u') = \left[\frac{1}{2} EA (u')^2 + \frac{1}{2} c \cdot u^2 - q u \right] \quad (6.6.5)$$

$$\text{Dgl: } \frac{\partial Q}{\partial u} - \left(\frac{\partial Q}{\partial u'} \right)' = 0 = c \cdot u - q - EA u'' \text{ (Eulersche Dgl. der RWA)}$$

$$\text{RB: } \left[(EA u' - F_R)_R \delta u_R \right]_a^b = 0$$

Bei der näherungsweisen Lösung von (6.6.4) kann zur Algebraisierung der Dgl schon in das Potential π von (6.6.4) ein Ansatz eingeführt werden

$$u(x) = \sum_{j=0}^{N_j} u_j \cdot g_{uj}(x) = \underline{g}_u^T(x) \cdot \underline{u} \quad (6.6.6)$$

Damit ergeben sich als notwendige Bedingungen für das Minimum des elastischen Gesamtpotentials die N_j+1 Gleichungen aus (6.6.7)

$$Q(x, \underline{u}) = \frac{1}{2} EA (\underline{g}_u'^T \cdot \underline{u})^2 + \frac{1}{2} c \cdot (\underline{g}_u^T \cdot \underline{u})^2 - q \underline{g}_u^T \cdot \underline{u} \quad (6.6.7)$$

$$\pi = \int Q(x, \underline{u}) dx - [F_R u_R(\underline{u})]_a^b = \text{Min.}$$

$$\Rightarrow \delta \pi_j = \frac{\partial \pi}{\partial u_j} \delta u_j = 0, \quad j = 0, \dots, N_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial u_j} = \int \left(EA \cdot (\underline{g}_u'^T \cdot \underline{u}) \cdot g_{uj}' + c \cdot (\underline{g}_u^T \cdot \underline{u}) \cdot g_{uj} - q \cdot g_{uj} \right) dx + \\ - F_b g_{uj}(x=b) + F_a g_{uj}(x=a) = 0, \quad (\text{für } \delta u_j \neq 0)$$

In Vektor-Matrix-Schreibweise wird aus (6.6.7)

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} - \underline{p}^T \underline{u} - \underline{f}^T \underline{u} = \text{Min.} \quad (6.6.8)$$

$$\underline{K} = EA \int \underline{g}'_u \cdot \underline{g}'_u{}^T dx + c \int \underline{g}_u \cdot \underline{g}_u{}^T dx$$

$$\underline{p} = \int q \underline{g}_u dx$$

$$\underline{f} = F_b \underline{g}_u(x=b) - F_a \underline{g}_u(x=a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{u}} = \underline{K} \underline{u} - \underline{p} - \underline{f} = \underline{0}$$

$$\underline{f} = \underline{K} \underline{u} - \underline{p}$$

6.7 Variationsprinzip in Zuwuchsformulierung

Zur Lösung nichtlinearer Probleme mit

- großen Verformungen,
- großen Verzerrungen,
- nichtlinearem Materialverhalten

sind die in 6.5 und 6.6 erläuterten Prinzipie in der dort dargestellten Form nicht geeignet.

Z.B. muß für große Verzerrungen die Verzerrungs-Verformungs-Beziehung (kinematische Gleichung) aus (1.2) durch die quadratischen Glieder ergänzt werden. Diese dürfen nicht mehr gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden.

$$1D: \quad \epsilon = u' + \frac{1}{2} (u')^2 \quad (6.7.1)$$

in kartesischen Koordinaten k,l :

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} + \delta^{mn} u_{m,k} \cdot u_{l,n})$$

in beliebigen Koordinaten λ, μ :

$$\epsilon_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (u_{\lambda|\mu} + u_{\mu|\lambda} + g^{\nu\rho} u_{\nu|\lambda} \cdot u_{\mu|\rho})$$

Bei beliebigen (schiefwinklig, krummlinigen) Koordinaten werden die partiellen Orts-Ableitungen $u_{k,l}$ durch die kovarianten Ableitungen $u_{\lambda|\mu}$ und die Koordinaten des Kristoffeltensors $\delta^{mn} = \vec{e}^m \cdot \vec{e}^n$ durch die Koordinaten des Metriktensors $g^{\lambda\mu} = \vec{g}^\lambda \cdot \vec{g}^\mu$ ersetzt. Zu allgemeinen Koordinatensystemen siehe z.B. ⁷.

Durch die quadratischen Glieder in (6.7.1) entstehen nichtlineare System-Gleichungen, die für große Systeme nur sehr aufwendig aufzustellen und zu lösen sind.

Statt dessen können inkrementelle Prinzipie (Zuwuchsformulierung: Schrittweise Aufbringung der Beanspruchungen) oder iterative Prinzipie (Iteration der Gleichgewichtslagen des verformten Systems) bzw. Kombinationen davon angewendet werden. Das hier dargestellte inkrementelle Prinzip ist in ⁸ für Flächentragwerke hergeleitet. Mit der Einführung des Lastparameters t

$$d(\quad) = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} dt = (\quad)' dt, \quad t - \text{Lastparameter} \quad (6.7.2)$$

$$f(\underline{x}, t) = \int df(\underline{x}, t) = \int f(\underline{x}, t)' dt, \quad f(\underline{x}, t) - \text{beliebige Beanspruchung}$$

hat es (mit $dt \neq 0$) die Form (dA – Differential der Schalenmittelfläche)

$$\delta I \cdot (dt)^2 = 0 \Rightarrow \quad (6.7.3)$$

$$\delta I = \int (\sigma^{\lambda\mu} dV)' \delta \dot{\epsilon}_{\lambda\mu} - \int (p^k dA)' \delta \dot{u}_k + \frac{1}{2} \int \sigma^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta (\dot{u}_\nu|_\lambda \cdot \dot{u}_\mu|_\rho) dV = 0$$

$$\dot{\epsilon}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\dot{u}_\lambda|_\mu + \dot{u}_\mu|_\lambda)$$

(6.7.3) ist in den Gradienten der Inkremente quadratisch. Damit werden die Systemgleichungen linear, analog der linearen Theorie für kleine Verformungen. Der 3. Summand auf der rechten Seite von δI ist das geometrisch nichtlineare Glied. Es hat den gleichen Aufbau wie das quadratische Glied in (6.7.1). Wenn dieses bekannt ist, kann es direkt für die Inkremente in (6.7.3) übernommen werden.

Für das Beispiel „elastisch gestützter Zugstab“ (ohne Volumendehnung, ohne Drehung) wird aus (6.5.2)

$$\delta I = \delta I_i - \delta I_a = 0 \quad (6.7.4)$$

$$\delta I_i = \int \dot{\sigma} \cdot \delta \dot{\epsilon} dV + \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \delta [(\dot{u}')^2] dV$$

$$\text{mit } \sigma = \frac{F_L}{A}, \quad \dot{\sigma} = \frac{\dot{F}_L}{A}, \quad dV = A dx, \quad \delta \dot{\epsilon} = \delta \dot{u}'$$

$$\delta I_i = \int \dot{F}_L \cdot \delta \dot{u}' dx + \frac{1}{2} \int F_L \cdot \delta [(\dot{u}')^2] dx$$

$$\delta I_a = \dot{F}_b \delta \dot{u}_b - \dot{F}_a \delta \dot{u}_a + \int (\dot{q} - c \cdot \dot{u}) \delta \dot{u} dx$$

Diese Gleichungen sind für große Verzerrungen physikalisch nicht sinnvoll, weil für große Verzerrungen die Volumendehnung berücksichtigt werden muß.

(6.7.3) kann auch aufgefasst werden als Prinzip der virtuellen Arbeit für die Inkremente, ergänzt um das geometrisch nichtlineare Glied. Vernachlässigt man darin Volumen- und Mittelflächenänderungen (zulässig für kleine Verzerrungen) ergibt sich daraus

$$\delta I = \int \dot{\sigma}^{\lambda\mu} \delta \dot{\epsilon}_{\lambda\mu} dV - \int \dot{p}^k \delta \dot{u}_k dA + \frac{1}{2} \int \sigma^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta (\dot{u}_\nu|_\lambda \cdot \dot{u}_\mu|_\rho) dV = 0 \quad (6.7.5)$$

Wenn die Last in nur einem Schritt aufgebracht wird (zulässig für kleine Verzerrungen und kleine Verformungen) ergibt sich

$$\delta W = \int \sigma^{\lambda\mu} \delta \epsilon_{\lambda\mu} dV - \int p^k \delta u_k dA + \frac{1}{2} \int \sigma_0^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \delta (u_\nu|_\lambda \cdot u_\mu|_\rho) dV = 0 \quad (6.7.6)$$

mit $\sigma_0^{\lambda\mu}$ aus

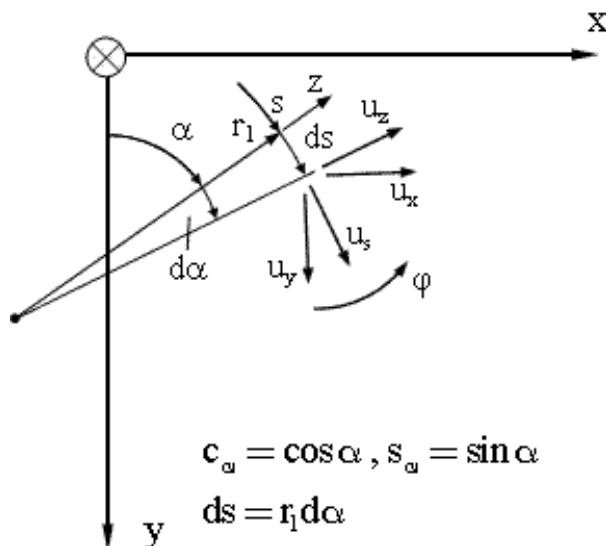
$$\delta W_0 = \int \sigma_0^{\lambda\mu} \delta \epsilon_{0\lambda\mu} dV - \int p_0^k \delta u_{0k} dA = 0$$

Das ist das Prinzip der Virtuellen Arbeit, ergänzt um das geometrisch nichtlineare Glied. Dieses enthält die virtuelle Arbeit der vor der Belastung vorhandenen Spannungen und ist Null, wenn der Ausgangszustand spannungsfrei ist. (6.7.6) ist geeignet zur Berechnung linearer Stabilitäts(-Verzweigungs)-Probleme (z.B. kritische Verzweigungslasten für Eulersche Knickfälle). Diese Probleme sind Eigenwertprobleme mit den Spannungen $\sigma_0^{\lambda\mu}$ bzw. den daraus resultierenden Schnittgrößen als Eigenwertparameter.

Die Koordinaten in den Gleichungen für beliebige Koordinaten sind die mathematischen Koordinaten und müssen noch mit den Beträgen der Basisvektoren in physikalische Koordinaten überführt werden.

6.8 Große Verzerrungen (1D: ebener schubweicher Balken)

Die nichtlinearen Verzerrungs-Verformungs-Beziehung (6.7.1) für den ebenen Balken mit $\lambda, \mu = s, z$ in physikalischen Koordinaten werden hier ohne Herleitung angegeben. Sie sind Voraussetzung für die numerische Simulation großer Verformungen in 4.2.



- s – Bogenkoordinate der Schwerpunktklinie
- z – Koordinate der Querschnittsfläche
- r_1 - Krümmungsradius
- u_s, u_z - körperfeste Verschiebungen
- u_x, u_y - raumfeste Verschiebungen
- φ - Verdrehung

Abbildung 6.2: Balkenelement ds

(6.8.1) definiert die kinematischen Hypothesen. Es wird die Geradenhypothese (linearisierte Querkraftschubverzerrung) vorausgesetzt, d.h. eine Gerade senkrecht zur unverformten Schwerpunktkli-

nie ist nach der Verformung eine Gerade nicht mehr senkrecht zur verformten Schwerpunktklinie.

$$\begin{aligned}\bar{u}_s(s, z) &= u_s(s) - \varphi(s)z \\ \bar{u}_z(s, z) &= u_z(s)\end{aligned}\quad (6.8.1)$$

Die nichtlinearen Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen für die körperfesten Verschiebungskoordinaten u_s, u_z sind

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_{ss} = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}, \quad \varepsilon_{NL} = \frac{1}{2}(\varepsilon_L^2 + \varepsilon_D^2), \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \eta = \frac{z}{r_1} \\ \gamma &= \gamma_{sz} = 2\varepsilon_{sz} = \gamma_L + \gamma_{NL}, \quad \gamma_L = \varepsilon_D - \varphi, \quad \gamma_{NL} = -\varepsilon_L\varphi \\ \varepsilon_L &= \frac{1}{1+\eta} \left[(u'_s - \varphi'z) + \frac{u_z}{r_1} \right], \quad \varepsilon_D = \frac{1}{1+\eta} \left[u'_z - \frac{1}{r_1}(u_s - \varphi z) \right]\end{aligned}\quad (6.8.2)$$

Um beim inkrementellen Verfahren entsprechend 6.7 die Integration der Verformungen über den Lastparameter t durchführen zu können (analog (6.7.2)),

$$u_k = \int \dot{u}_k dt \quad \left(\text{aber } u_\lambda \neq \int \dot{u}_\lambda dt \right) \quad (6.8.3)$$

ist es sinnvoll, in eine raumfeste kartesische Basis x, y zu transformieren

$$\begin{aligned}u_s &= u_x c_\alpha + u_y s_\alpha, \quad u_z = u_x s_\alpha - u_y c_\alpha \\ u'_s &= u'_x c_\alpha + u'_y s_\alpha - \frac{u_z}{r_1}, \quad u'_z = u'_x s_\alpha - u'_y c_\alpha + \frac{u_s}{r_1}\end{aligned}\quad (6.8.4)$$

Aus (6.8.2) wird damit

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{1}{1+\eta} (u'_x c_\alpha + u'_y s_\alpha - \varphi'z) \approx u'_x c_\alpha + u'_y s_\alpha - \varphi'z, \quad \eta = \frac{z}{r_1} \ll 1 \\ \varepsilon_D &= \frac{1}{1+\eta} (u'_x s_\alpha - u'_y c_\alpha - \varphi\eta) \approx u'_x s_\alpha - u'_y c_\alpha \\ \gamma_L &= \frac{1}{1+\eta} (u'_x s_\alpha - u'_y c_\alpha - \varphi) \approx \varepsilon_D - \varphi\end{aligned}\quad (6.8.5)$$

Für schwache Krümmung $\eta \ll 1$ werden die Glieder mit η vernachlässigt.

6.9 Uneigentliche Integrale

Es ist der Wert des Integrals der Funktion $f(x)$ aus (6.9.1) gesucht

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b \quad (6.9.1)$$

Dabei ist zu unterscheiden:

„Eigentliches“ Integral

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad [a, b] \text{ endlich} \\ 2. \quad f(x) \text{ auf } [a, b] \text{ beschränkt} \end{array} \right\} \text{z.B.} \quad \int_1^5 \frac{dx}{x} \quad (6.9.2)$$

„Uneigentliches“ Integral (mindestens eine der Bedingungen 1. und 2. von (6.9.2) ist nicht erfüllt)

$$\text{Typ A} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad [a, b] \text{ unendlich} \\ 2. \quad f(x) \text{ auf } [a, b] \text{ beschränkt} \end{array} \right\} \text{z.B.} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \quad (6.9.3)$$

$$\text{Typ B} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad [a, b] \text{ endlich} \\ 2. \quad f(x) \text{ auf } [a, b] \text{ unbeschränkt} \end{array} \right\} \text{z.B.} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$\text{Typ C} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad [a, b] \text{ unendlich} \\ 2. \quad f(x) \text{ auf } [a, b] \text{ unbeschränkt} \end{array} \right\} \text{z.B.} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$$

Speziell:

$$\text{Typ A} \quad (6.9.4)$$

$$A1: \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

$$A2: \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^b f(x) dx$$

$$A3: \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^a f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_a^{R_2} f(x) dx \quad (a \text{ endlich})$$

und

$$\text{Typ B} \quad (6.9.5)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

$c \in [a, b]$ wo $f(x)$ unbeschränkt ist

Cauchy – Hauptwert: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

Typ C: Hier wird das Intervall in Teilintervalle aufgeteilt, so dass jedes Teilintegral entweder vom Typ A oder vom Typ B ist.

Die Integrale in (6.9.4), (6.9.5) heißen konvergent, wenn die Grenzwerte existieren und endlich sind. Sonst heißen sie divergent.

Beispiele: $-a < 0 < b$ (bzw. $a > 0$ und $b > 0$)

1. Beispiel: schwache Singularität (Stammfunktion ist an der Singularitätsstelle endlich)

$$\int_0^b \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b \ln(x) dx \quad (6.9.6)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[x \ln(x) - x \right]_{\varepsilon}^b = b \ln(b) - b \quad \text{ist konvergent}$$

$$\text{weil: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \ln(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [-x] = 0$$

2. Beispiel: starke Singularität (Stammfunktion ist an der Singularitätsstelle unendlich)

$$\int_0^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln(x) \right]_{\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \quad \text{ist divergent} \quad (6.9.7)$$

$$\text{Analog: } \int_{-a}^0 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln(x) \right]_{-a}^{-\varepsilon} = \ln\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) \quad \text{ist divergent}$$

$$\int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^b \frac{1}{x} dx \quad \text{ist divergent für } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$$

Cauchy – Hauptwert: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\int_{-a}^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) + \ln\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) + \ln\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \right] = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{ist konvergent}$$

6.10 Zylinderfunktionen

Zylinderfunktionen $Z_p(z)$ (auch Bessel Funktionen genannt) sind Lösungen der Besselschen Dgl p-ter Ordnung

$$\frac{d^2 Z_p}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_p}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z_p = 0 \quad (6.10.1)$$

Die Zylinderfunktionen sind keine elementaren Funktionen, sondern unendliche Reihen.

Spezielle Zylinderfunktionen $Z_p(z)$ sind

- Zylinderfunktionen 1.Art $Z_p(z)=J_p(z)$
- Zylinderfunktionen 2.Art $Z_p(z)=Y_p(z)$ (auch Neumannsche Funktionen genannt)
- Zylinderfunktionen 3.Art $Z_p(z)=H_p^{(1)}(z)$ und $Z_p(z)=H_p^{(2)}(z)$ (auch Hankel Funktionen genannt)

Die Zylinderfunktionen 3.Art ergeben sich nach (6.10.2) aus denen 1. und 2.Art.

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + i \cdot Y_p(z), \quad H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - i \cdot Y_p(z) \quad (6.10.2)$$

Für $z=\beta r$ (r-Radiuskoordinate der Polarkoordinaten, Axialsymmetrie \Rightarrow Ableitungen nach der Winkelkoordinate sind Null) wird aus (6.10.1) für die Zylinderfunktion 0. Ordnung eine Helmholtz Dgl

$$\frac{d(\quad)}{dz} = \frac{1}{\beta} \frac{d(\quad)}{dr} = \frac{1}{\beta} (\quad)' \quad (6.10.3)$$

$$\Delta Z_0(r) + \beta^2 Z_0(r) = 0, \quad \Delta Z_0(r) = \frac{1}{r} Z_0'(r) + Z_0''(r) = \frac{1}{r} [r \cdot Z_0'(r)]'$$

In Abbildung 6.3 sind die Zylinderfunktionen 1. und 2.Art dargestellt, jeweils 0. und 1.Ordnung. Die Funktion $J_0(z)$ ist für $z=0$ stetig, ist also eine echt homogene Lösung der Dgl (6.10.3). Die Funktion $Y_0(z)$ hat für $z=0$ eine logarithmische Singularität, analog der Fundamentallösung aus 6.11.5. Sie liefert den Dirac-Impuls der Fundamentallösung aus 6.11.7.

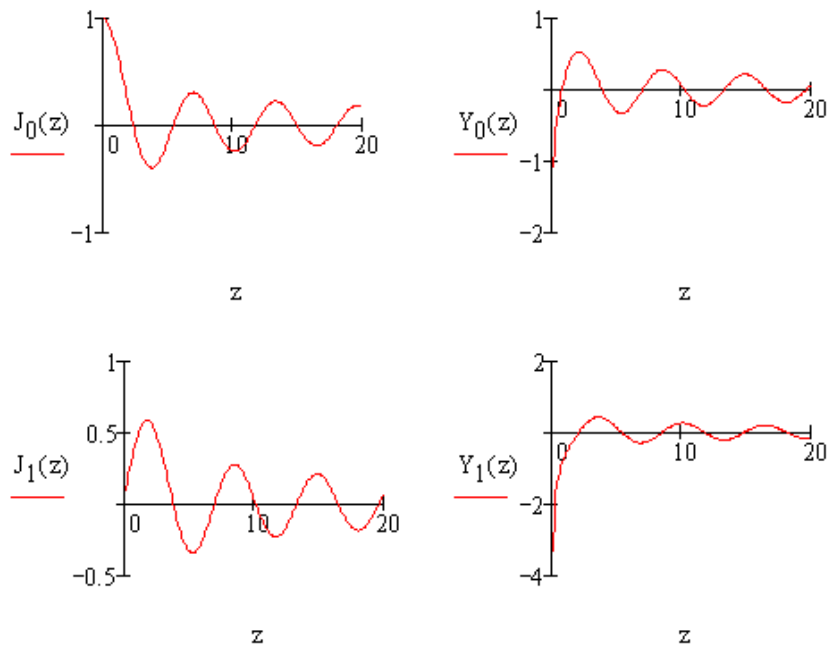


Abbildung 6.3: Zylinderfunktionen 0. und 1.Ordnung

Es gilt der Zusammenhang zwischen den Zylinderfunktionen 0. und 1. Ordnung

$$J_1(z) = -\frac{d}{dz} J_0(z), \quad Y_1(z) = -\frac{d}{dz} Y_0(z) \quad (6.10.4)$$

6.11 Fundamentallösungen für die Inverse Form

Für die Anwendung der inversen Form der Methoden der gewichteten Residuen zur näherungsweisen Lösung einer speziellen RWA (1.1) im Gebiet G muß eine Lösung der speziellen Dgl für ein unendliches Gebiet G_∞ bekannt sein.

$$\text{Dgl der RWA:} \quad D(u(\underline{x})) + p(\underline{x}) = 0 \quad \text{im Gebiet } G \quad (6.11.1)$$

$$\text{Dgl der Fundamentallösung:} \quad D(w(\underline{x})) = \frac{\delta(\underline{r})}{f(\underline{r})} \quad \text{im Gebiet } G_\infty$$

$$f(\underline{r}) = \begin{cases} 1 & \text{für 1D} \\ \frac{1}{2\pi r} & \text{für 2D} \\ \frac{1}{4\pi r^2} & \text{für 3D} \end{cases}, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad N = 1, 2, 3 \text{ für 1D, 2D, 3D}$$

$$\Rightarrow \quad D(w(\underline{x})) = 0 \quad \text{für } \underline{x} \neq \underline{0}$$

$$\text{Normierungsbedingung für Dirac-Impuls:} \quad \int_{G_\infty} D(w(\underline{x})) dG = \int_{G_\infty} \frac{\delta(\underline{r})}{f(\underline{r})} dG = 1$$

Die Lösung w heißt Fundamentallösung. Der Punkt $\underline{x}=\underline{0}$ der Fundamentallösung ist der Quell-, Auf- oder Ladepunkt, also der Punkt, an dem ein Dirac-Impuls in G_∞ eingeleitet wird. Das entspricht einer punktförmigen Quelle mit unendlicher Quelldichte. Bei Problemen der Festkörpermechanik ist das (bis auf die physikalische Maßeinheit) die Einleitung einer Einzelkraft vom Betrag „1“.

Da man für das Gebiet von w ein unendlich großes Gebiet G_∞ wählt, ist das Gebiet G der speziellen RWA von (6.11.1) immer in G_∞ enthalten.

Für w wählt man zweckmäßiger Weise alle RB auf dem Rand $\underline{x}=\underline{0}$ (am Quell-, Auf- oder Ladepunkt) derart, dass die kinematischen Gleichungen erfüllt sind (in der Festkörpermechanik entspricht das der Begrenzung möglicher Starrkörperbewegungen). Da die Dgl alle Bilanzgleichungen enthält (in der Mechanik die GGB) sind diese (wenn w die Dgl erfüllt) auch erfüllt (Die RB im Unendlichen „stellen sich entsprechend ein“). Bei 1D Problemen wird zweckmäßiger Weise Symmetrie zu $x=0$ vorausgesetzt.

6.11.1 $D(w) = \Delta(w)$, 1D

In Abbildung 6.4 ist das Modell eines 1D-Kontinuums dargestellt. Zum anschaulichen

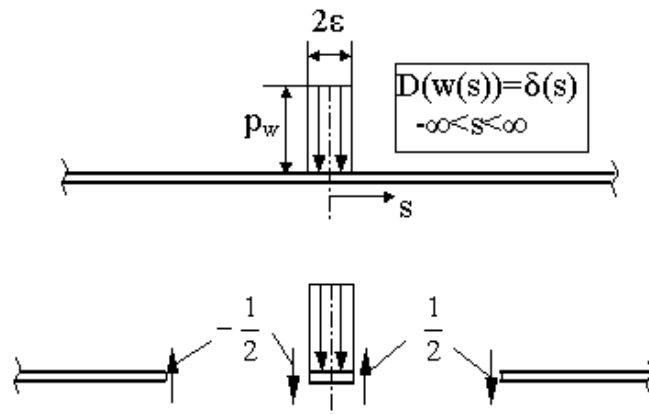


Abbildung 6.4: Modell $\Delta(w(s)) = \delta(s)$

Breite 2ε ist herausgeschnitten. Die „Schnittkräfte“ $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind eingetragen. Beim Zugstabmodell müssten natürlich die „Schnittkräfte“ und p_w horizontal gerichtet sein.

Die RWA der Fundamentallösung ist für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{Dgl: } \Delta w(s) = w''(s) = b(s) = \delta(s) \quad (6.11.1.1)$$

$$b(s) = \begin{cases} 0 & -\infty < s < -\varepsilon \\ p_w & -\varepsilon < s < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < s < \infty \end{cases}$$

$$\text{RB: } w(0) = 0, \quad w'(\varepsilon) - w'(-\varepsilon) = 1 \Rightarrow w'(-\varepsilon) = -\frac{1}{2}, \quad w'(\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

Die RB $w(0)=0$ ist eine (willkürliche) Begrenzung der Starrkörperbewegung. Allgemein wäre nur zu fordern $w(0)=\text{endlich}$. Die RB für w' ergibt sich aus der Bilanz (GGB) am herausgeschnittenen Teil der Breite 2ε . Die symmetrische Aufteilung des Sprunges von „1“ (bei $\varepsilon \rightarrow 0$) ist sinnvoll, aber nicht notwendig. Es gilt die Normierungsbedingung für den Dirac-Impuls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta w(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) ds = 1 \quad (6.11.1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta w(s) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(p_w \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_w 2\varepsilon = 1$$

Wenn die Koordinate s die Dimension m hat, müssen $\delta(s)$ und p_w die Dimension m^{-1} haben.

Aus der RWA von (6.11.1.1) wird mit (6.11.1.2) für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Dgl und die zugehörige Lösung (die Fundamentallösung) in (6.11.1.3)

$$\Delta w(s) = w''(s) = \delta(r)$$

(6.11.1.3)

$$w(s) = w_0 + w_1 \cdot r, \quad w'(s) = w_1 \cdot \text{sign}(s), \quad r = \sqrt{s^2} = |s|$$

$$\text{RB: } w(0) = 0 \Rightarrow w_0 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'(-\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{2}$$

$$w(s) = \frac{1}{2} \cdot |s|, \quad w'(s) = \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(s)$$

Die Lösungen zu (6.11.1.1) für $\varepsilon=0.3$ und für (6.11.1.3) sind in Abbildung 6.5 dargestellt.

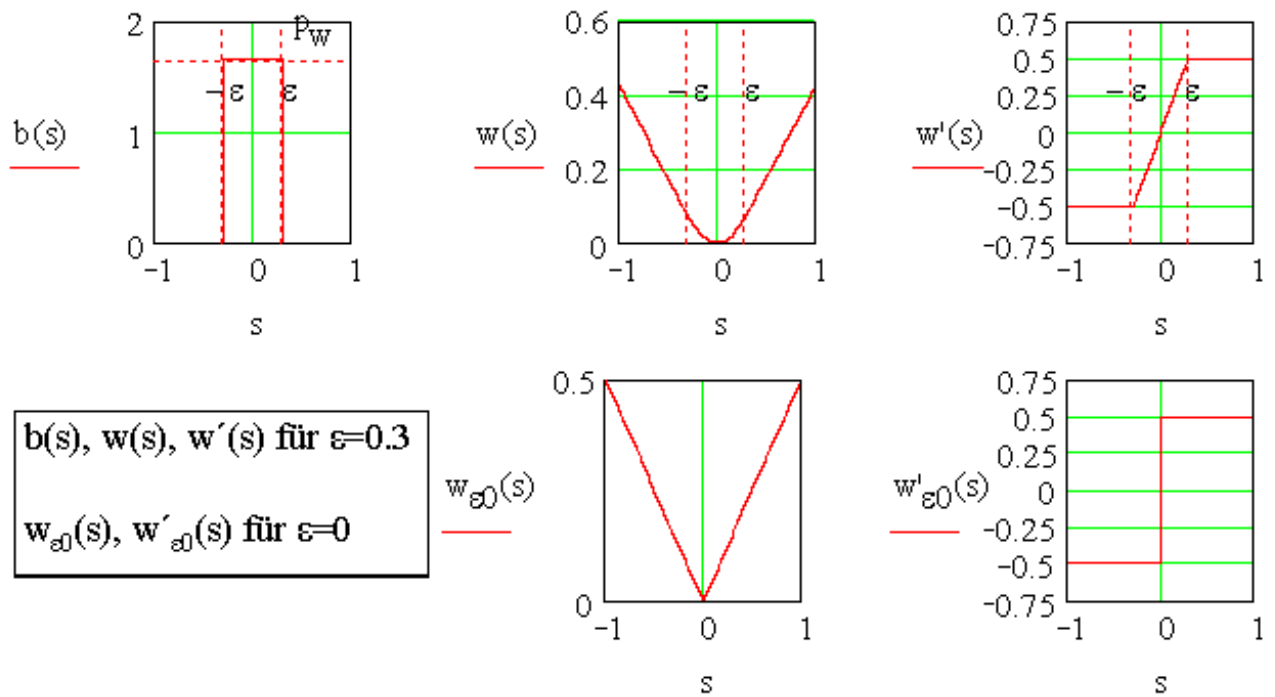


Abbildung 6.5: Fundamentallösung für $D(\Delta)$ (1D Kontinuum)

6.11.2 $D(\cdot) = \Delta(\cdot) - \beta^2(\cdot)$, 1D

Die Herleitung der Fundamentallösung ist analog 6.11.1 (mit $\beta^2 > 0$).

$$\Delta w(s) - \beta^2 w(s) = \delta(r) \quad , \quad r = \sqrt{s^2} = |s| \quad (6.11.2.1)$$

$$w(s) = w_0 e^{-\beta r} + w_1 e^{-\beta(L-r)}$$

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\beta(L-r)} = 0 \quad \text{für Rand } r=0 \Rightarrow w_1 \text{ ist beliebig } (w_1 = 0)$$

$$w'(r) = -w_0 \cdot \beta \cdot \text{sign}(s) e^{-\beta \cdot r}$$

RB:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'(-\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_0 = -\frac{1}{2\beta}$$

$$w(s) = -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta|s|}, \quad w'(s) = \frac{1}{2} \text{sign}(s) e^{-\beta|s|}$$

Die Lösungen zu (6.11.2.1) für $\beta=2$ sind in Abbildung 6.5 dargestellt.

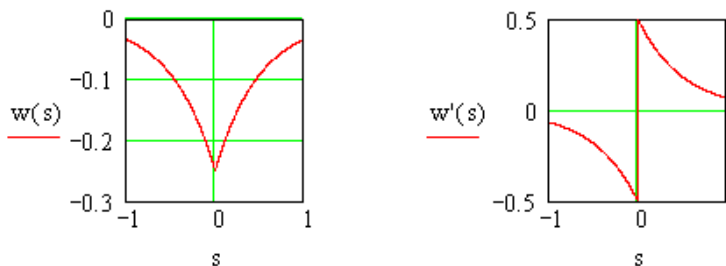


Abbildung 6.6: Fundamentallösung für $D(\cdot) = \Delta(\cdot) - \beta^2(\cdot)$ mit $\beta = 2$ (1D Kontinuum)

6.11.3 $D(\cdot) = \Delta\Delta(\cdot)$, 1D

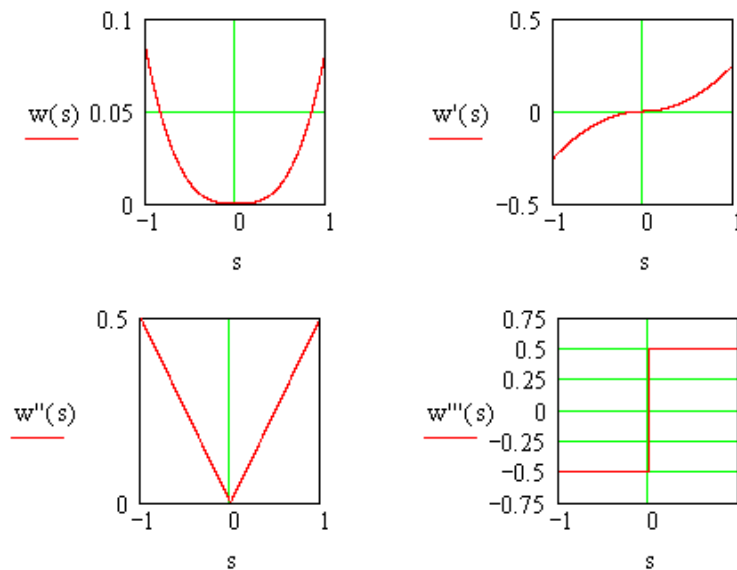
Die Herleitung der Fundamentallösung ist völlig analog zu 6.11.1. Anschaulich lässt sich das Problem als Bernoulli-Biegebalken mit Querkraftsprung „1“ bei $s=0$ interpretieren.

$$\Delta\Delta w(s) = \Delta\tilde{w}(s) = \delta(r), \quad \tilde{w}(s) = \Delta w(s) \quad (6.11.3.1)$$

$$\tilde{w}(s) = w''(s) = \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(s) \cdot s = \frac{1}{2} \cdot |s|, \quad \tilde{w}'(s) = w'''(s) = \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|s|}{s}$$

$$w'(s) = \frac{1}{4} \cdot \text{sign}(s) \cdot s^2 = \frac{1}{4} \cdot s \cdot |s|, \quad w(s) = \frac{1}{12} \cdot \text{sign}(s) \cdot s^3 = \frac{1}{12} \cdot s^2 \cdot |s|$$

Die Funktion $\tilde{w}(s)$ ist die Lösung von 6.11.1. daraus wird durch zweimalige Integration $w(s)$. Die Integrationskonstanten ergeben sich mit $w(0)=0$ und $w'(0)=0$ zu Null. Die Lösungen zu (6.11.3.1) sind in Abbildung 6.7 dargestellt.



Sie entsprechen dem Verlauf von Durchbiegung, Verdrehung, Biegemoment und Querkraft beim entsprechenden Balkenmodell.

Abbildung 6.7: Fundamentallösung für $D()= \Delta\Delta()$ (1D Kontinuum)

6.11.4 $D()= \Delta\Delta() + 4\alpha^4()$, 1D

Die Herleitung der Fundamentallösung ist völlig analog zu 6.11.1. Anschaulich lässt sich das Problem als elastisch gebetteter Bernoulli-Biegebalken mit Querkraftsprung „1“ bei $s=0$ interpretieren.

$$\Delta\Delta w(s) + 4\alpha^4 w(s) = w''''(s) + 4\alpha^4 w(s) = \delta(r) \quad , \quad r = \sqrt{s^2} = |s| \quad (6.11.4.1)$$

$$w = e^{\lambda r} \Rightarrow \lambda^4 + 4\alpha^4 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \begin{cases} (1+i)\alpha \\ (1-i)\alpha \\ (-1+i)\alpha \\ (-1-i)\alpha \end{cases} \quad , \quad \begin{aligned} e^{a+ib} &= e^a \cdot e^{ib} \quad , \quad e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b) \\ e^{-\alpha(L-r)} &= e^{-\alpha L} \cdot e^{\alpha r} \end{aligned}$$

$$w(s) = e^{-\alpha(L-r)} (w_1 \cdot c_\alpha + w_2 \cdot s_\alpha) + e^{-\alpha r} (w_3 \cdot c_\alpha + w_4 \cdot s_\alpha)$$

$$c_\alpha = \cos(\alpha r), \quad s_\alpha = \sin(\alpha r)$$

Damit ergibt sich

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\alpha(L-r)} = 0 \quad \text{für Rand } r=0 \Rightarrow w_1, w_2 \text{ sind beliebig } (w_1=w_2=0) \quad (6.11.4.2)$$

$$\text{RB: } w'(0) = 0 \Rightarrow w_4 = w_3$$

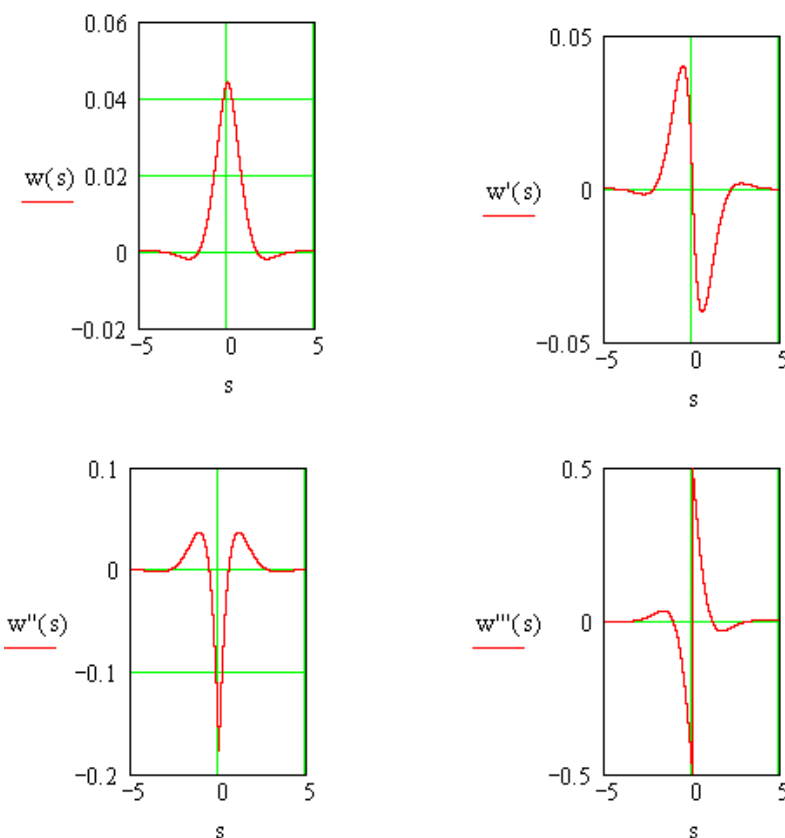
$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'''(-\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w'''(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_3 = \frac{1}{8\alpha^3}$$

$$w(s) = \frac{1}{8\alpha^3} \cdot e^{-\alpha r} (c_\alpha + s_\alpha)$$

$$w'(s) = -\frac{1}{4\alpha^2} \cdot \text{sign}(s) \cdot e^{-\alpha r} \cdot s_\alpha$$

$$w''(s) = \frac{1}{4\alpha} \cdot e^{-\alpha r} \cdot (s_\alpha - c_\alpha)$$

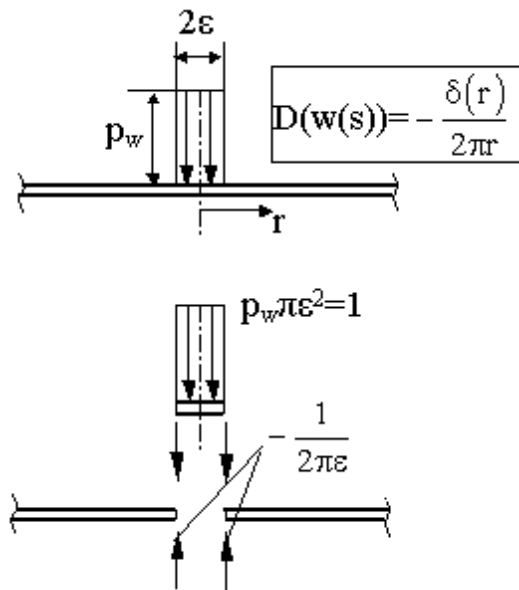
$$w'''(s) = \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(s) \cdot e^{-\alpha r} \cdot c_\alpha$$



Die Lösungen zu (6.11.4.2) für $\alpha^2=2$ sind in Abbildung 6.8 dargestellt.

Sie entsprechen dem Verlauf von Durchbiegung, Verdrehung, Biegemoment und Querkraft beim entsprechenden Balkenmodell.

Abbildung 6.8: Fundamentallösung für $D(\cdot) = \Delta\Delta(\cdot) + 4\alpha^4(\cdot)$ (1D Kontinuum)

6.11.5 $D(\cdot) = \Delta(\cdot)$, 2D

In Abbildung 6.9 ist das Modell eines axialsymmetrischen 2D-Kontinuums dargestellt. Zum anschaulichen Verständnis kann man sich dabei eine unendliche, vorgespannte Kreismembran in G_∞ mit einer Flächenlast p_w auf einer Kreisfläche mit dem Radius ε vorstellen. Die Begrenzung ist kein Schnitt. Es wird lediglich ein endliches Teilstück (Kreis) von G_∞ dargestellt. Der Einfachheit und Allgemeinheit wegen werden alle Größen dimensionslos angenommen. Der Teil des Gebietes G_∞ mit Einleitung von p_w mit dem Radius ε ist herausgeschnitten. Die ringförmige „Schnittkraft“ $-\frac{1}{2\pi\varepsilon}$ ist eingetragen.

Abbildung 6.9: Modell $\Delta(w(s)) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r}$

Die RWA der Fundamentallösung ist für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{Dgl: } \Delta w(r) = \frac{1}{r} w'(r) + w''(r) = \frac{1}{r} (r \cdot w')' = -b(r) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (6.11.5.1)$$

$$b(r) = \begin{cases} p_w & 0 < r < \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < r < \infty \end{cases}$$

$$\text{RB: } w'(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

Die RB für $w'(\varepsilon)$ ergibt sich aus der Bilanz (GGB) am herausgeschnittenen Teil mit dem Radius ε . Es gilt die Normierungsbedingung für den Dirac-Impuls

$$\int_0^\infty \Delta w(r) dA = -\int_0^\infty \frac{\delta(r)}{2\pi r} dA = -\int_0^\infty \delta(r) dr = -1, \quad dA = 2\pi r dr \quad (6.11.5.2)$$

$$\int_0^\infty \Delta w(r) dA = -\int_0^\infty p_w dA = -2\pi \int_0^\varepsilon p_w r dr = -p_w \pi \varepsilon^2 = -1$$

Wenn die Koordinate r die Dimension m hat, müssen $\delta(r)$ die Dimension m^{-1} und p_w die Dimension m^{-2} haben.

Aus der RWA von (6.11.5.1) wird die zugehörige Lösung (die Fundamentallösung) in (6.11.5.3)

$$w(r) = r^\lambda, \quad w'(r) = \lambda r^{\lambda-1}, \quad w''(r) = \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} \quad (6.11.5.3)$$

$$\Delta w(r) = r^{\lambda-2} [\lambda + \lambda(\lambda-1)] = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0$$

$$w(r) = w_0 (\ln r - \ln r_0) = w_0 \ln \frac{r}{r_0}, \quad r_0 \text{ beliebig aber } > 0 \quad (\text{gewählt: } r_0 = 1)$$

$$w'(r) = w_0 \frac{1}{r}$$

$$\text{RB: } w'(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \Rightarrow w_0 = -\frac{1}{2\pi}$$

$$w(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad w'(r) = -\frac{1}{2\pi r}$$

Die Lösungen zu (6.11.5.3) für $\varepsilon=0.3$ sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Die Lösung für das innere Gebiet mit $0 < r < \varepsilon$ ist

$$w(r) = \frac{1}{4\pi} \left[1 - \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 \right] - \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon, \quad 0 < r < \varepsilon \quad (6.11.5.4)$$

Bei der Fundamentallösung (für $\varepsilon \rightarrow 0$) haben sowohl $w(r)$ als auch $w'(r)$ eine Singularität bei $r=0$.

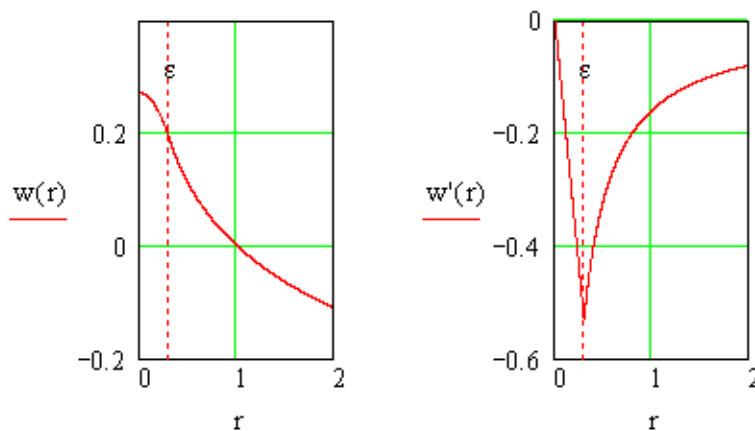


Abbildung 6.10: Lösung für $D(\cdot)=\Delta(\cdot)$ (2D Kontinuum)

6.11.6 $D(\cdot) = \Delta(\cdot) + \beta^2(\cdot)$, 1D

Anfangs-Randwertprobleme von ungedämpften, harmonischen Schwingungen führen mit einem Produktansatz entsprechend (5.6.4) auf die RWA der komplexen Funktion $w(s)$

$$\text{Dgl: } \Delta w(s) + \beta^2 w(s) = \delta(s), \quad \Delta w(s) = w''(s), \quad -\infty < s < \infty \quad (6.11.6.1)$$

$$\text{RB: } w(0) = \text{endlich}, \quad w'(-\varepsilon) = -\frac{1}{2}, \quad w'(\varepsilon) = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \ll 1$$

Die RB von (6.11.6.1) entsprechen (6.11.1.1) Die allgemeine Lösung von (6.11.6.1) ist

$$w(s) = \frac{1}{2\beta} [u_1 \sin(\beta|s|) + i \cdot u_2 \cos(\beta|s|)] \quad (6.11.6.2)$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden

1. Stehende Welle: $u_1=1, u_2=0$
2. Auslaufende Welle: $u_1=1, u_2=-1$
3. Einlaufende Welle: $u_1=1, u_2=1$

$$w_{\text{kom}}(s, t) = w(s) \cdot e^{-i\omega t}, \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \cdot \sin \omega t \quad (6.11.6.3)$$

$$w_F(s, t) = \text{Re}[w_{\text{kom}}(s, t)] = \frac{1}{2\beta} [u_1 \sin(\beta|s|) \cdot \cos \omega t + u_2 \cos(\beta|s|) \cdot \sin \omega t]$$

Der Imaginärteil der komplexen Lösungsfunktion $w_{\text{kom}}(s, t)$ ist lediglich zeitlich phasenverschoben zum Realteil und demzufolge auch als Lösung zu verwenden.

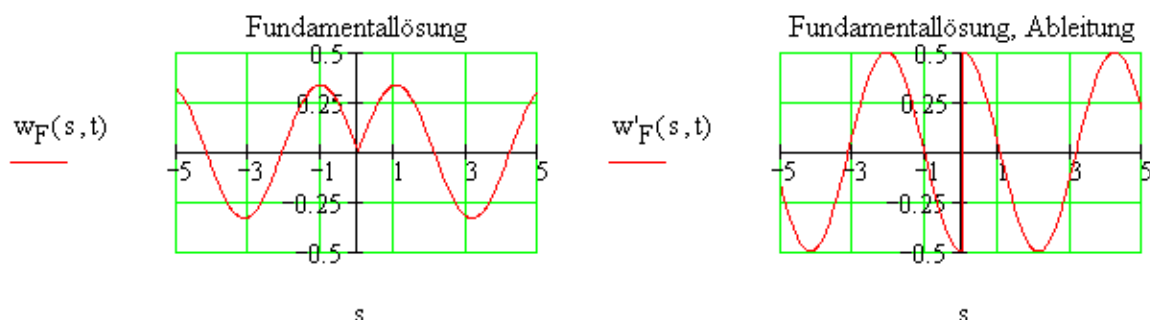


Abbildung 6.11: Fundamentallösung und Ableitung der Fundamentallösung für $t=0$

Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung der Fundamentallösung für die Fälle 1. bis 3. ist in „Helmholtz_Fundamentallösung_1D_x_t.gif“.

Die Amplitude der Fundamentallösung (6.11.6.2) klingt mit wachsendem $|s|$ nicht ab. Demzufolge ist die Fundamentallösung nur auf Innenraumprobleme anwendbar. Eine

an dem einen Rand $x=x_a$ oder $x=x_b$ eingeleitete Welle wird am anderen Rand reflektiert. Es ergibt sich immer eine stehende Welle 1. als Summe einer auslaufenden Welle 2. und einer reflektierten, einlaufenden Welle 3. Es kann demzufolge immer die Lösung für Fall 2. verwendet werden.

6.11.7 $D(\cdot) = \Delta(\cdot) + \beta^2(\cdot)$, 2D

Analog zu (6.11.5.1) für das statische 2D-Problem und (6.11.6.1) für das dynamische 1D-Problem ergibt sich die RWA der komplexen Funktion $w(r)$ für die Fundamentallösung der ebenen, harmonischen, ungedämpften (2D) Schwingung.

$$\text{Dgl: } \Delta w(r) + \beta^2 w(r) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad \Delta w(r) = \frac{1}{r} w'(r) + w''(r) = \frac{1}{r} (r \cdot w')' \quad (6.11.7.1)$$

$$\text{RB: } w'(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Diese RWA hat keine Lösung mit elementaren Funktionen. Die Lösungen sind die Zylinderfunktionen aus 6.10. Diese Lösungen klingen für $r \rightarrow \infty$ auf Null ab und sind deshalb auch für die Lösung von Außenraumproblemen geeignet.

$$w(r) = \frac{1}{4} [u_1 Y_0(\beta \cdot r) + i \cdot u_2 J_0(\beta \cdot r)] \quad (6.11.7.2)$$

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + i \cdot Y_0(z), \quad H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - i \cdot Y_0(z), \quad z = \beta \cdot r$$

Es können wie beim 1D-Problem drei Fälle unterschieden werden

1. Stehende Welle: $u_1=1, u_2=0$
2. Auslaufende Welle: $u_1=1, u_2=-1$
3. Einlaufende Welle: $u_1=1, u_2=1$

$$1. \quad w(r) = w_s(r) = \frac{1}{4} Y_0(\beta \cdot r) \quad (6.11.7.3)$$

$$2. \quad w(r) = w_a(r) = \frac{1}{4} [Y_0(\beta \cdot r) - i \cdot J_0(\beta \cdot r)] = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\beta \cdot r)$$

$$3. \quad w(r) = w_e(r) = \frac{1}{4} [Y_0(\beta \cdot r) + i \cdot J_0(\beta \cdot r)] = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\beta \cdot r)$$

$$w_{\text{kom}}(r, t) = w(r) \cdot e^{-i\omega t}, \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \cdot \sin \omega t$$

$$w_F(r, t) = \text{Re}[w_{\text{kom}}(r, t)] = \frac{1}{4} [u_1 Y_0(\beta \cdot r) \cdot \cos \omega t + u_2 J_0(\beta \cdot r) \cdot \sin \omega t]$$

Hier gilt, wie bei 6.11.6: Es kann immer die Lösung für Fall 2. verwendet werden. Dieser muß analog (5.6.8) für große r die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen.

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \tilde{w}_F(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tilde{w}_F(r, t)}{\partial t} = 0, \quad \tilde{w}_F(r, t) = Y_0(\beta \cdot r) \cos \omega t - J_0(\beta \cdot r) \sin \omega t \quad (6.11.7.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_F(r, t)}{\partial r} = \beta [-Y_1(\beta \cdot r) \cos \omega t + J_1(\beta \cdot r) \sin \omega t]$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_F(r, t)}{\partial \omega} = \omega [-Y_0(\beta \cdot r) \sin \omega t - J_0(\beta \cdot r) \cos \omega t]$$

$$\Rightarrow Y_0(z) - J_1(z) = 0, \quad Y_1(z) + J_0(z) = 0, \quad z = \beta \cdot r$$

Aus Abbildung 6.12 ist zu erkennen, dass die beiden Bedingungen aus (6.11.7.4) nur in der Nähe der Singularität bei $r=0$ Fehler aufweisen.

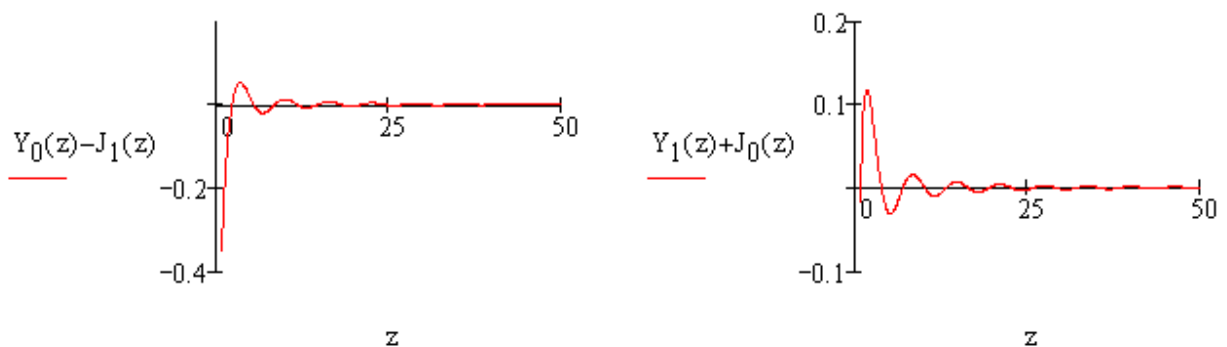


Abbildung 6.12: Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

In Abbildung 6.13 ist dazu noch der quantitative Vergleich mit den Lösungsfunktionen $Y_0(z)$ und $J_0(z)$ dargestellt. Die durchgezogenen Kurvenverläufe gehören zur Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung.

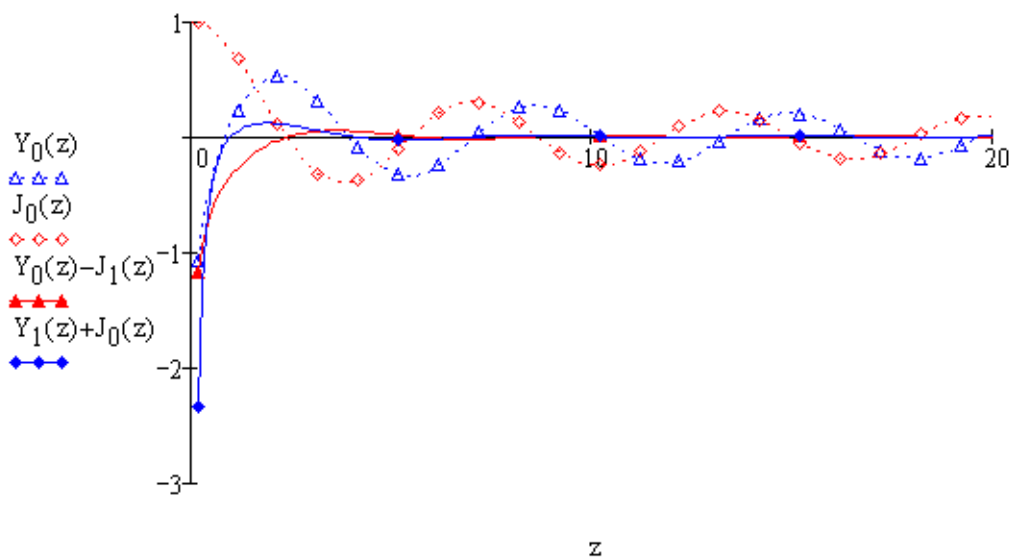


Abbildung 6.13: Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingungen, Vergleich

Der Ort-Zeit-Verlauf der Schwingung der Fundamentallösung für die Fälle 2. und 3. ist in „Hankel_x_t.gif“.

¹ K.Knothe-H.Wessels: Finite Elemente, Springer Verlag

² beliebige Randbedingungen bei der FEM

³ Gauss-Quadratur

⁴ REM am Beispiel der 1D und 2D Poisson-Dgl

⁵ Hartmann: Methode der Randelemente, Springer Verlag, 1987

⁶ Gaul, Fiedler: Methode der Randelemente in Statik und Dynamik, Vieweg Verlag, 1997

⁷ Göldner, u.a.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2, Fachbuchverlag Leipzig-Köln

⁸ Ulbricht: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Schalentheorie in konvektiver Metrik, Habilitation, TU Dresden (1986)