Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

10. Übungsblatt

Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

- Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Kürzungsregel gilt:

$$\forall a, x_1, x_2 \in G: \ a \circ x_1 = a \circ x_2 \ \Rightarrow \ x_1 = x_2.$$

(Der Beweis für die andere Kürzungsregel: $\forall a, y_1, y_2 \in G: \ y_1 \circ a = y_2 \circ a \ \Rightarrow \ y_1 = y_2$ geht analog.)

- In endlichen Gruppen tritt in der Verknüpfungstafel der Operation jedes Element in jeder Zeile und Spalte genau einmal auf („Sudokuprinzip"). Warum ist das so?

Ü55 (a) Vervollständigen Sie die nebenstehende Tafel so, dass die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ mit der durch die Tafel definierten Operation $\circ$ eine Gruppe bildet (die Elemente sind natürlich paarweise verschieden).

Wie viele Möglichkeiten gibt es? Gilt Kommutativität?

Finden Sie zu jeder der Gruppen alle ihre Untergruppen.

$\circ$	a	b	c	d
a	a			d
b		a		
c	c			
d				

(b) Schreiben Sie die Verknüpfungstafeln der Gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$ (mit Addition mod 4) und $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ (mit komponentenweiser Addition mod 2) auf, und vergleichen Sie die Gruppen mit den Gruppen aus (a).

Ü56 (a) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in G$ die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ in G eindeutig lösbar sind.

(b) Es sei $(H, \circ)$ ein Monoid. Zeigen Sie:

- Für alle $a, b \in H^*$ gilt: $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.
- Die Menge der invertierbaren Elemente H^* von H bildet mit der Operation $\circ$ eine Gruppe.

Ü57 (a) Es sei $n \in \mathbb{N}, n > 0$ beliebig. Ist $(\mathbb{Z}_n, +)$ eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe? Was lässt sich diesbezüglich über $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ ausssagen?

Und was gilt für $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$?

(b) Die *Einheitengruppe* $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ besteht aus allen Einheiten der Menge $\mathbb{Z}_n$ zusammen mit der Multiplikation mod n. Stellen Sie die Gruppentafel auf und bestimmen Sie alle Untergruppen mit genau 2 Elementen für folgende n:

(a) $n = 10$, (b) $n = 12$, (c) $n = 24$.

A58 **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.**

(a) Betrachtet wird die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ von $\mathbb{Z}_{18}$. Stellen Sie die Gruppentafel von $\mathbb{Z}_{18}^*$ auf. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.
Finden Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$, die das Element 17 enthalten.

(b) Über der Menge $A = \{-1, 0, 1\}$ ist die Menge aller Abbildungen $M = \{f : A \to A\}$ gegeben. Als Operation auf M wird die punktweise Multiplikation von Funktionen betrachtet, die folgendermaßen definiert ist: Für alle $f_1, f_2 \in M$ ist $g := f_1 \cdot f_2$ diejenige Funktion $g : A \to A$, für die

$$g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad \text{für alle } x \in A$$

gilt. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ ein Monoid ist. Ist $(M, \cdot)$ auch eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Anwort!

H59 Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass eine Menge U mit $\emptyset \neq U \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von G bildet, wenn gilt:

$$\forall a, b \in U : a \circ b^{-1} \in U.$$

H60 Zeigen Sie, dass die Menge $G := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}$ mit der Operation

$$x \circ y := x^{\ln y} \qquad \text{für alle } x, y \in G$$

eine abelsche Gruppe bildet.
(Hinweis. eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *abelsch*, wenn sie kommutativ ist.)