Dr. E. Lehtonen, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2018

3. Übungsblatt für die Übungen vom 23.4.-27.4.2018

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen, die ganzen Zahlen

T3.1 **Themenaufgabe**

Es seien R und S zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge A.

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $R \cap S$ wieder eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Beschreiben Sie anhand eines gängigen Beispieles für R und S, wie sich die Äquivalenzklassen durch die Durchschnittbildung verfeinern.

(c) Für die Vereinigung $R \cup S$ gilt i.a. nicht, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie zwei Beispiele für R und S auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, und zwar eins derart, dass $R \cup S$ eine Äquivalenzrelation ist, und eins so, dass $R \cup S$ keine Äquivalenzrelation ist.

T3.2 **Themenaufgabe**

Es sei $\{0,1\}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}^i$ die Menge der Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$. Für zwei Wörter $a = (a_1, \ldots, a_r)$ und $b = (b_1, \ldots, b_s)$ gelte $a \sqsubseteq b$, wenn $r \leq s$ und $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$: $a_i = b_i$ gelten (d.h. a ist ein Teilwort von b). Die *lexikographische Ordnung* $<_{lex} \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ ist auf zwei Wörtern $a := (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ und $b = (b_1, b_2, \ldots b_s)$ so definiert:

$$a <_{lex} b :\Longleftrightarrow (a \sqsubseteq b) \vee (\exists i \in \mathbb{N} : (a_i < b_i) \wedge (\forall j \leq i : a_j = b_j))$$

Zeigen Sie, dass $<_{lex}$ eine lineare Ordnung ist.

Hinweis: Nach der lexikographischen Ordnung sind z.B. Einträge in Lexika sortiert, sie wird umgangssprachlich auch „alphabetische“ Ordnung genannt. Das Alphabet ist dann das natürliche Alphabet A. . . Z.

Ü3.3 Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R auf der jeweiligen Menge A Äquivalenzrelationen sind. Geben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen an.

(a) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn sie in die gleiche Klasse gehen.

(b) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn sie in verschiedene Klassen gehen.

(c) A sei die Menge der Schüler einer Schule, zwei Schüler sind in Relation, wenn die Farben ihrer Pullover/Oberteile gleich sind.

(d) $A = \mathbb{R}, \quad R = \{(a,b) \in A \times A \mid |a - b| < \pi\}$,

(e) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad R = \mathrm{id}_A \cup \{(0,2), (2,0), (1,3), (3,1)\}$,

(f) Es sei A die Menge aller Felder eines Schachbretts. Für beliebige zwei Felder u und v gelte $(u,v) \in R$ genau dann, wenn ein Läufer von Feld u mit einem oder mehreren Zügen auf Feld v gelangen kann. Was ändert sich, wenn nur genau ein Zug erlaubt ist?

Ü3.4 Begründen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen auf den gegebenen Grundmengen um Ordnungsrelationen handelt.

(a) Die Menge der Schüler einer Schule zusammen mit der Relation „ist mindestens so groß wie“.

(b) Die Menge der Schüler einer Schule zusammen mit der Relation „ist mindestens so groß und hat mindestens so guten Notendurchschnitt wie“.

(c) $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a|b :\iff \exists k \in \mathbb{N} : ak = b$

(d) $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a|b :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : ak = b$

(e) $R \subseteq \{0,1\}^3 \times \{0,1\}^3 : (x_1, y_1, z_1)R(x_2, y_2, z_2) :\iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \wedge z_1 \leq z_2$

(f) $R \subseteq \{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2\}^2 : (x_1, y_1)R(x_2, y_2) :\iff x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2 \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

(g) $R \subseteq \{0,1,2\}^2 \times \{0,1,2\}^2 : (x_1, y_1)R(x_2, y_2) :\iff x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$

Ü3.5 (a) Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation $|$ auf der Menge $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

- Geben Sie die Relation als Menge konkreter Paare an.
- Verifizieren Sie, dass $|$ eine Ordnungsrelation auf A ist. Zeichnen Sie ein Ordnungs-Diagramm. Ist die Relation linear?
- Gibt es ein kleinstes bzw. größtes Element?

(b) Nun betrachten wir die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}$. Versuchen Sie wieder, ein Diagramm zu zeichnen und beschreiben Sie dessen Aussehen. Gibt es kleinste und größte Elemente?

A3.6 **Hausaufgabe, Abgabe (mit Name und Matrikelnr.) bis 27.4.2018, 12:00 Uhr**

(a) (i) Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ an.

(ii) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. fünfelementigen Menge?

(iii) Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen auf A.

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R := \{[m]_R : m \in M\}$ bildet eine Partition/Zerlegung von M.

(b) Eine Relation $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$S := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : \; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}.$$

Zeigen Sie, dass S eine Äquivalenzrelation ist und charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen in einem Koordinatensystem.

H3.7 Beweisen Sie Proposition 1.29 aus der Vorlesung: Die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ sind kommutativ und assoziativ, die Multiplikation ist distributiv über der Addition und $[(0,0)]_\sim$ bzw. $[(1,0)]_\sim$ sind die neutralen Elemente von Addition bzw. Multiplikation.

H3.8 (a) Gibt es eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$? (Verwenden Sie Ü2.3(c)).

(b)* Gibt es eine Wohlordnung auf $\mathbb{Q}$? (Wenn Sie auch nach einigem Überlegen auf keine Lösung kommen, dann suchen Sie nach „Cantors Diagonalargument“).

H3.9* Die „Paradoxie des Haufens“ geht von einem Haufen, z.B. von Sandkörnern aus. Sukzessive werden Sandkörner von dem Haufen entfernt. Die Entfernung eines Sandkornes ändert sicherlich nichts an der Tatsache, dass die restlichen Körnern einen Haufen bilden. Werden allerdings immer weitere Sandkörner entfernt, bleibt schließlich nur noch ein Sandkorn übrig, welches sicher nicht mehr als Haufen bezeichnet werden kann.

Wo würden Sie den Fehler in dieser Argumentation verorten? Sie können dabei Ihr Wissen über Äquivalenzrelationen anwenden.