TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultat Mathematik, Institut fur Algebra

Jun.-Prof. Martin Schneider, Dr. C. Zschalig

Algebra und Zahlentheorie für Lehramt (Modul ALGZTH), Sommersemester 2019

1. Übungsblatt für die Übungen vom 1.4.-5.4.2019

Ü1.1 Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen:

$$(\mathbb{N},+),\quad (\mathbb{Z},+),\quad (\mathbb{Z},\cdot),\quad (\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)\,?$$

Ü1.2 Es sei $(G,\circ)$ eine Gruppe und e das neutrale Element in G.

(a) Zeigen Sie, dass es in G nur ein neutrales Element gibt.

(b) Zeigen Sie, dass zu jedem Gruppenelement $g\in G$ genau ein Inverses g^{-1} existiert.

(c) Beweisen Sie die Kürzungsregeln:
$\forall\, a,b,c\in G:\ a\circ b=a\circ c \implies b=c$ und $b\circ a=c\circ a \implies b=c.$

(d) Es gilt: Ist G endlich, dann tritt in der Verknüpfungstafel von G jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auf. Begründen Sie diese Aussage!

(e) Beweisen Sie die folgenden Formeln:
(i) $e^{-1}=e$, (ii) $\forall a,b\in G:\ (a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$, (iii) $\forall a\in G:\ (a^{-1})^{-1}=a.$

Ü1.3 Für Zahlen $a,b\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq 2)$ schreiben wir $a\equiv b \pmod n$, wenn a den selben Rest bei Division durch n lässt wie b bzw. wenn $\exists k\in\mathbb{Z}: a=b+kn$.
Die Relation $\equiv$ eine Äquivalenz- und sogar Kongruenzrelation, die Klassen heißen Restklassen (mod n). Der Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ besteht aus der Menge $\{0,\ldots,n-1\}$ zusammen mit der Addition und der Multiplikation (mod n). (siehe dazu LAAG-Skript 1. Semester).

(a) Stellen Sie für $n\in\{4,5,6\}$ die Tafeln der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ auf.

(b) Warum ist $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ für $n=5$ ein Körper? Warum trifft das für $n=4$ und $n=6$ nicht zu?

(c) Für welche n ist $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ ein Körper? Stellen Sie eine Vermutung auf!

Ü1.4 (a) Vervollständigen Sie die nebenstehende Tafel so, dass die Menge $M=\{a,b,c,d\}$ mit der durch die Tafel definierten Operation $\circ$ eine Gruppe bildet. (Die Elemente sind paarweise verschieden.)
Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Gilt Kommutativität?

$\circ$	a	b	c	d
a	a			d
b		a		
c	c			
d				

(b) Finden Sie zu jeder der Gruppen aus (a) alle Untergruppen.

(c) Vergleichen Sie die Gruppen aus (a) mit den Gruppen $(\mathbb{Z}_4,+)$ (mit Addition mod 4) und $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ (mit komponentenweiser Addition mod 2).

(d) Bestimmen Sie die Menge U aller Lösungen der Gleichung $z^4=1$ in der Gruppe $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$. Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ bildet.

H1.5 Zeigen Sie, dass die Menge $G := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ mit der Operation

$$x \circ y := x^{\ln y} \qquad \text{für alle } x, y \in G$$

eine abelsche Gruppe bildet.

H1.6 Wir definieren eine „Sprache“ S auf dem Alphabet $\mathcal{A} = \{M, U\}$ durch folgende Regeln:

(MU1) MU ist ein Wort.

(MU2) Ist Mx ein Wort, dann ist auch MxU ein Wort (x steht hier für eine beliebige Zeichenkette).

(MU3) Sind x und y Wörter aus S, dann ist auch xy ein Wort aus S.

(MU4) Es gilt $UUU = M$.

(MU5) Es gilt $MMM = MM$.

(a) Finden Sie alle Wörter der Sprache (jedes Wort müssen Sie nur in einer Schreibweise angeben, z.B. $MUUU$ **oder** MM) und begründen Sie, warum keine weiteren existieren.

(b) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel von $(S, \circ)$ (die Verknüpfung $\circ$ ist die Konkatenation, d.h. Verkettung, z.B. $MU \circ MU = MUMU$) der Wörter auf.

(c) Untersuchen Sie die Struktur $(S, \circ)$! Ist $(S, \circ)$ eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe?

Ersetzen Sie nun Regel [MU5] durch die folgende Regel

(MU5') $MUMU = MU$.

und führen Sie für die so entstehende Sprache S' dieselben Untersuchungen wie für S durch.

Tipp: In dem Buch „Gödel, Escher, Bach“ von Douglas A. Hofstadter finden Sie das MU-Rätsel, welches zu dieser Aufgabe inspirierte.