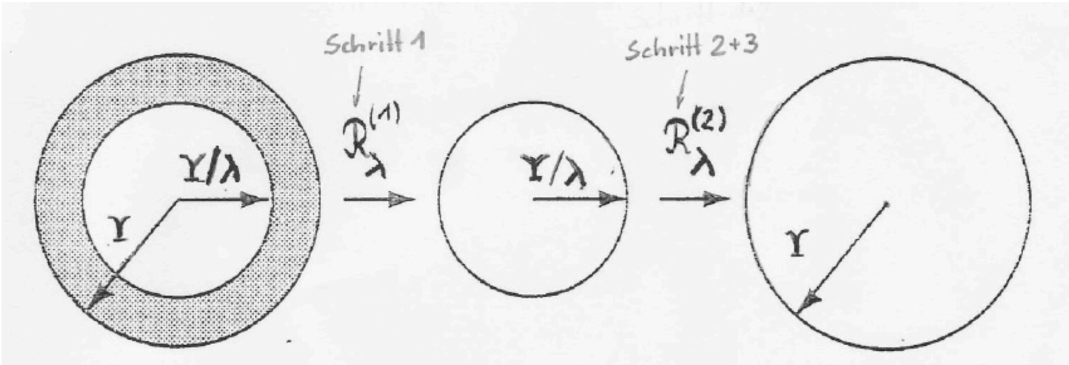
6.3.1 Grundzüge der „Momentum-Shell Renormalization Group Theory“



Schritt 1: Reduktion der Freiheitsgrade durch Absummation der Zustandssumme über alle Felder $\boldsymbol{\psi}_{\vec{k}}$ mit Wellenzahlvektoren $\vec{\boldsymbol{k}}$ in der Kugelschale $\boldsymbol{\Upsilon}/_{\boldsymbol{\lambda}} < k < \boldsymbol{\Upsilon}$.

Durch Absummation in der Zustandssumme $\mathcal{Z}_N\left[\widetilde{\mathcal{H}}\ \right]$ wird ein neuer Hamiltonian $\widetilde{\mathcal{H}}_{\Upsilon/\lambda}$ mit $N' = N/\lambda^d$ Freiheitsgraden und einer neuen „Brillouinzone“ mit (Abschneide-)Radius Υ/λ definiert. (≙ Vergrößerung der Gitterkonstante $a' = \lambda a$)

Schritt 2: Reskalierung aller Impulse mit $\vec{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \vec{\boldsymbol{k}}' = \lambda\vec{\boldsymbol{k}}$

(≙ Reskalierung der Längen $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = \vec{r}/\lambda$)

⇒ Abschneideradius verknüpft mit $\vec{k}'$ ist Υ, so wie für das System vor Ausdünnen der Freiheitsgrade; Zahl der $\vec{k}'$-Vektoren ist aber nur noch N'

Schritt 3: Renormierung der Felder $\boldsymbol{\psi}_{\vec{k}} \longrightarrow \boldsymbol{\psi}'_{\vec{k}'} = \frac{\mathbf{1}}{\zeta}\boldsymbol{\psi}_{\vec{k}}$

Praktische Umsetzung der Methode:

Betrachten (der Einfachheit halber) ein System mit einem einzelnen skalaren Feld $\psi(\vec{r})$

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\boldsymbol{\Upsilon}} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\left[\{\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}\}\right]$$

Zerlegen $\psi_{\vec{k}}$ formal in 2 Anteile: $\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}} = \underbrace{\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}^{<}}_{\substack{\text{"langsame"} \\ \text{Fluktuationen}}} + \underbrace{\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}^{>}}_{\substack{\text{"schnelle"} \\ \text{Fluktuationen}}}$

$$\text{mit } \psi_{\vec{k}}^{<} = \begin{cases} \psi_{\vec{k}} & \text{für } 0 < k < {}^{\Upsilon}/_{\lambda} \\ 0 & \text{für } {}^{\Upsilon}/_{\lambda} < k < \Upsilon \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi_{\vec{k}}^{>} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < k < {}^{\Upsilon}/_{\lambda} \\ \psi_{\vec{k}} & \text{für } {}^{\Upsilon}/_{\lambda} < k < \Upsilon \end{cases}$$

Schritt 1: **Ausdünnen von Freiheitsgraden = Ausintegration der Felder $\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}^{>}$**

$\Longrightarrow$ neuer Hamiltonian $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\boldsymbol{\Upsilon}/\boldsymbol{\lambda}}\left[\{\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}^{<}\}\right] = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(\mathbf{1})}\, \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_{\boldsymbol{\Upsilon}}\left[\{\boldsymbol{\psi}_{\vec{\boldsymbol{k}}}\}\right]$

Operator $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{\lambda}}^{(\mathbf{1})}$ definiert durch Gleichung:

$$e^{\widetilde{\mathcal{H}}_{\Upsilon/\lambda}\left[\{\psi_{\vec{k}}^{<}\}\right]} = \int \mathcal{D}\psi_{\vec{k}}^{>}\, e^{\widetilde{\mathcal{H}}_{\Upsilon}\left[\{\psi_{\vec{k}}^{<}+\psi_{\vec{k}}^{>}\}\right]}$$

(für diskrete $\vec{k}$: $\int \mathcal{D}\psi_{\vec{k}}^{>} \dots = \int \prod_{\vec{k}} \mathrm{d}\psi_{\vec{k}}^{>} \dots$)

Schritte 2+3: Reskalieren der Impulse und Felder $\longrightarrow \psi'_{\vec{k}'} = \frac{1}{\zeta}\psi_{\vec{k}}$ (definiert Operator $\mathcal{R}_\lambda^{(2)}$)

$\Longrightarrow$ **neuer Hamiltonian** (als Funktional von $\psi'_{\vec{k}'}$ und mit Abschneideradius Υ)**:**

$$\widetilde{\mathcal{H}}'_\Upsilon[\{\psi'_{\vec{k}'}\}] = \underbrace{\mathcal{R}_\lambda^{(2)}\mathcal{R}_\lambda^{(1)}}_{\mathcal{R}_\lambda}\,\widetilde{\mathcal{H}}_\Upsilon[\{\psi_{\vec{k}}\}]$$

Anmerkung: Analogie zwischen Impulsraum- und Ortsraum-Renormierung

$$\psi(\vec{r}) = \underbrace{\int_0^{\Upsilon/\lambda} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,\psi^<_{\vec{k}}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{\substack{\triangleq\,\sigma'(\vec{r})\\ \text{Blockspin}}} + \underbrace{\int_{\Upsilon/\lambda}^{\Upsilon} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,\psi^>_{\vec{k}}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{\substack{\triangleq\,\sigma(\vec{r})\\ \text{mikrosk. Freiheitsgrade}\\ \text{innerhalb eines Blocks}}}$$