Algebra in der Sekundarstufe

Wie viel Hochschulmathematik steckt dahinter?

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
einer Magistra der Naturwissenschaften

an der Karl-Franzens-Universität Graz

vorgelegt von
Kristina Maria VOCK

am Institut für: Mathematik
Begutachterin: Univ.-Prof. Dr.phil. Karin Baur

Graz, 25. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Im Rahmen des Schulmathematisch-didaktischen Seminars verfasste ich zum Thema **Algebra in der Sekundarstufe** eine Seminararbeit. Da ich mich aus eigenem Interesse noch tiefer mit dem Thema auseinandersetzen wollte, ergab es sich, dass ich auch meine Diplomarbeit zur Algebra in der Sekundarstufe schreiben wollte.
Seit Herbst 2013 habe ich neben meinem Lehramtsstudium (Mathematik, Philosophie und Psychologie) eine Lehrverpflichtung (Unterrichtsfach Mathematik und angewandte Mathematik) an der BHAK/BHAS Liezen, so werde ich in meiner Diplomarbeit auch immer wieder eigene Erkenntnisse und Erfahrungen zu diesem Thema einbringen, die ich bisher mit meinen SchülerInnen sammeln durfte.

In der Sekundarstufe I aller Schulformen ist Algebra ein zentraler Themenbereich des Mathematikunterrichts. Die vier großen Themenbereiche der Algebra sind: Zahlen, Terme, Funktionen und Gleichungen.
Für diese vier Themenbereiche werde ich jeweils die historische Entwicklung, mathematische Grundlagen, didaktische Erfindungen, Lernmodelle, Unterrichtsvorschläge, den Einsatz des Taschenrechners und des Computers, sowie die Überwindung von Lernschwierigkeiten genauer betrachten.
In meiner Diplomarbeit beziehe ich mich auf die Sekundarstufe I (5. - 8. Schulstufe) und auf die Sekundarstufe II (9. - 12. Schulstufe).

Bei den vier großen Themenbereichen (Zahlen, Terme, Funktionen und Gleichungen) werde ich jeweils den Bezug zur Hochschulmathematik (insbesondere zu den Vorlesungen Einführung in die Algebra und Algebra I) herstellen.

Abschließend gehe ich noch auch auf Fragen des Beweisens, des Problemlösens und des Definierens im Algebraunterricht ein.

2 Algebra in der Schule

Wie schon in der Einführung erwähnt, ziehen sich die algebraischen Themenstränge Zahlen, Terme, Funktionen und Gleichungen durch alle Jahrgangsstufen und diese ergeben dann in den einzelnen Jahrgangsstufen sinnvolle Themenkreise.
Beim Themenstrang Zahlen gibt es zum Beispiel die folgenden Themenkreise: die natürlichen Zahlen, die Bruchzahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 5f)
Die folgende Tabelle bietet dazu eine schöne Übersicht.

Jg.	Zahlen	Terme	Funktionen	Gleichungen
5.	$\mathbb{N}$ Grundrechenarten	Einfache Terme; Tabellen; Einsetzungen	Tabellen mit Variablen; Operatoren	Lösen einfacher Gleichungen durch Probieren, Überlegen, Gegenoperatoren
6.	$\mathbb{B} = \mathbb{Q}^{+}$ Bruchrechnung; Dezimalbrüche	Einfache Terme mit Brüchen; Einsetzungen	Tabellen mit Variablen; Bruchoperatoren	Lösen einfacher Gleichungen durch Gegenoperatoren
7.	$\mathbb{Q}$ Grundrechenarten	Einfache Terme mit positiven und negativen Zahlen	Proportionale, antiproportionale Funktionen; empirische Funktionen	Lösen einfacher Gleichungen durch Gegenoperatoren
8.	$\mathbb{Q}$ Grundrechenarten; Potenzen mit natürlichen Exponenten	Termumformungen; „ganze“ Terme, Bruchterme	Lineare Funktionen; Funktionsgleichungen; Eigenschaften von Funktionen	Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen; Bruchgleichungen; einfache Gleichungssysteme; Aufstellen und Umformen von Formeln; graphische Lösungen
9.	$\mathbb{R}$ Quadrieren und Wurzelziehen; Irrationalität	Terme mit Quadraten und Wurzeln	Quadratische Funktionen; Wurzelfunktionen; Eigenschaften quadratischer Funktionen; Umkehrfunktion	Quadratische Gleichungen; graphische Lösungen; Näherungslösungen; Wurzelgleichungen
10.	$\mathbb{R}$ Potenzrechnung	Terme mit Potenzen; Vereinfachung; Terme mit trigonometrischen Funktionen	Potenzfunktionen; Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen; trigonometrische Funktionen	Potenzgleichungen; Exponentialgleichungen; Trigonometrische Gleichungen

(Vollrath et al. 2007: 7)

Nun ein kurzer Überblick zur historischen Entwicklung:
Leonhard Euler hatte mit dem Werk „Vollständige Anleitung zur Algebra“ aus dem Jahre 1770 den größten Einfluss auf die Gestaltung des Algebraunterrichts.
Inhalte seines Buches sind: Grundlegung des Zahlenrechnens von den Grundrechenarten bis zu den Logarithmen; Begründung des Rechnens „mit den zusammengesetzten Größen“: von Termumformungen bis hin zu Potenzen mit negativen Exponenten; Verhältnisse und Verhältnisgleichungen; Lösen von Gleichungen bis hin zu biquadratischen Gleichungen; „unbestimmte Analytik“: Verfahren zum „Rationalmachen“ von Termen mit Wurzeln usw.

Der Algebraunterricht war bis zum Ende des 19. Jahrhunderts am Gymnasium bei Euler stehen geblieben, erst durch Felix Klein begann dann eine grundlegende Reform des Mathematikunterrichts. In dieser Reform hat man die vielfältigen Gebiete, die in der Schule behandelt wurden, unter eine einheitliche Grundidee gebracht. Diese Rolle wurde dem Funktionsbegriff zugewiesen. Der Funktionsbegriff wurde zu einem Leitbegriff, der Problemstellungen und Lösungsverfahren lieferte und mit Hilfe des Funktionsbegriffs wurde es möglich, eine enge Verbindung zwischen Algebra und Geometrie herzustellen. Diese Ideen waren in den Lehrbüchern von den 1930er- bis 1950er-Jahren.
Dazwischen wurde aber an den Universitäten aus der Theorie der Gleichungen eine Theorie der algebraischen Strukturen. Dazu haben Heinrich Weber, Ernst Steinitz, Emmy Noether und Emil Artin einen wesentlichen Anteil beigetragen.

In den 1960er-Jahren begann weltweit eine Unterrichtsreform, die eine Modernisierung des Mathematikunterrichts zum Ziel hatte: Mengen, Relationen, Abbildungen und Strukturen wurden in allen mathematischen Gebieten zu grundlegenden Begriffen.
Ziel war es, die SchülerInnen in das axiomatische Denken einzuführen.
Dazu setzte aber bereits Mitte der 1970er-Jahre eine Gegenbewegung ein.
In den 1980er-Jahren hat man sich für die Denkvorgänge der Lernenden interessiert.

Zu Beginn des neuen Jahrtausends zeigten internationale Leistungsvergleiche, dass viele SchülerInnen beim Verstehen der algebraischen Formelsprache Schwierigkeiten haben und dass es ihnen in neuartigen Situationen schwer fällt, algebraisch sinnvoll vorzugehen, sowie die Algebra sinnvoll anzuwenden.
Dadurch hat man begonnen, Algebra wieder stärker auf das Verstehen, Argumentieren, Problemlösen und Modellieren auszurichten. (vgl. Vollrath et al. 2007: 8-13)

Die Bildungsziele des Algebraunterrichts sind:

- Vermittlung von grundlegenden Vorstellungen und Einsichten über den Aufbau des Zahlensystems
- Kennenlernen der grundlegenden Ausdrucksmittel der Algebra, sowie das richtige Verstehen und Anwenden dieser „Formelsprache“
- Erfassung des Funktionsbegriffs von den SchülerInnen, sowie das Kennenlernen wichtiger Funktionstypen
- Beschreibung von Zusammenhängen zwischen Größen, Formulierung und Lösung von Problemen mit Hilfe von Gleichungen. (vgl. Vollrath et al. 2007: 14)

Im den folgenden Kapiteln befasse ich mich ausführlich mit:

- Zahlen
- Termen
- Funktionen
- Gleichungen

3 Zahlen

Zahlen kommen in allen Kulturen vor, wir alle sind täglich mit Zahlen konfrontiert. Ihre Entwicklung geht mit steigenden Ansprüchen einher: Zunächst brauchte man sie zum Zählen, dann benötigte man sie bald zum Messen, dann zum Rechnen und schließlich zum Lösen von Gleichungen und zur Beschreibung von Zusammenhängen durch immer kompliziertere Funktionen.
Zahlen sind geeignet, um die Wirklichkeit zu beschreiben, zum Beispiel lassen sich Raum und Zeit durch Zahlen erfassen, man kann mit Zahlen Aussagen über die Natur machen usw. Im Mathematikunterricht ist es wichtig, den SchülerInnen bewusst zu machen, dass der Umgang mit Zahlen in der Wirklichkeit eine Kontrolle erfordert, ob sie überhaupt für den Zweck geeignet sind.

Das Lernen von Zahlen ist ein langfristiger Prozess: Es beginnt in der Grundschule mit den natürlichen Zahlen und den Grundrechenarten, in der Sekundarstufe I folgen dann die Bruchzahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen und schließlich werden in der Sekundarstufe II mit der Analysis die reellen Zahlen vertieft und unter Umständen werden zuletzt noch die komplexen Zahlen behandelt. (vgl. Vollrath et al. 2007: 21-25)

Ich betrachte nun genauer die natürlichen Zahlen, die Bruchzahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen im Unterricht.

3.1 Natürliche Zahlen im Unterricht

Hier wird gezeigt, wie man in der 5. Jahrgangsstufe algebraisches Verständnis bei der Behandlung der natürlichen Zahlen vermitteln kann.
Zunächst ist es wichtig, dass sich die SchülerInnen darüber bewusst sind, dass man jede natürliche Zahl (ohne 0) mit Hilfe der Zahl 1 additiv erzeugen kann. 1 ist der additive Grundbaustein: $\mathrm{n} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n Summanden}}$

Grundoperation ist die **Addition**: $\mathrm{a, b} \in \mathbb{N}: \mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{c} \in \mathbb{N}$, aus ihr gewinnt man die anderen Operationen.

Gegenoperation der Addition ist die **Subtraktion**: $\mathrm{c} - \mathrm{b} = \mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$, sie ist aber innerhalb der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar: $\mathrm{c} - \mathrm{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathrm{b} < \mathrm{c}$.

Für die SchülerInnen ist sowohl die Addition und Subtraktion, als auch die Kleiner-Relation bekannt. Hier sollte man den SchülerInnen nochmals die Beziehung zwischen den Operationen und Relationen bewusst machen.

Zur **Multiplikation** führt die wiederholte Addition der gleichen Zahl: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \underbrace{\mathrm{b} + \mathrm{b} + \ldots + \mathrm{b}}_{\mathrm{a\ Summanden}}$

Bei „a mal b" liegt es nahe, dass das Wort „mal" dem a zugehörig ist, also „a mal" b, jedoch gibt es LehrerInnen und Schulbücher, die das Produkt anders herum anschauen, also a „mal b": $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \underbrace{\mathrm{a} + \mathrm{a} + \ldots + \mathrm{a}}_{\mathrm{b\ Summanden}}$, denn schließlich multipliziert man bei der schriftlichen Multiplikation auch von rechts. Das könnte möglicherweise die SchülerInnen verwirren. Hier besteht der Konflikt zwischen Umgangssprache und Fachsprache, den man nur bewältigen kann, wenn man ihn offen darlegt. D.h. man thematisiert, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt, weil die Addition und Multiplikation kommutativ sind.

Gegenoperation der Multiplikation ist die **Division**: $\mathrm{c} : \mathrm{b} = \mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{c}$, auch sie ist innerhalb der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar. Die Ausführbarkeit führt zu einer neuen Relation: $\mathrm{b}|\mathrm{c} \Leftrightarrow \mathrm{c} : \mathrm{b} \in \mathbb{N}$. Diese Teilerrelation wird aber erst in einer späteren Unterrichtseinheit über die Teilbarkeit behandelt. Das stellt eine Erweiterung und Vertiefung der Kenntnisse über natürliche Zahlen dar, hier werden dann auch die Primzahlen entdeckt.

Die **Potenz** definiert man so: $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \underbrace{\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}}_{\mathrm{b\ Faktoren}}$. (vgl. Vollrath et al. 2007: 32-34)

Ein häufiger Fehler, der mir auch bei meinen SchülerInnen schon manchmal aufgefallen ist, ist hier die Verwechslung mit der Multiplikation. Zum Beispiel: $2^3 = 2 \cdot 3 = 6$
Ich habe dann meine SchülerInnen darauf hingewiesen, dass sie langsam vorgehen sollen und die Zahlen in die Definition der Potenz einsetzen sollen. So war es dann für die SchülerInnen besser ersichtlich, dass $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ \mathrm{Faktoren}} = 8$ ist.

Potenzieren ist nicht kommutativ, es gibt nicht nur eine Umkehroperation, denn bei $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{c}$ kann man nach a und nach b fragen, diese Umkehrungen werden aber erst in der 9. bzw. 10. Jahrgangsstufe eingeführt.
0 und 1 sind für typische Rechenfehler bei der Multiplikation verantwortlich, wie zum Beispiel: $5 \cdot 0 = 5$ oder $0 \cdot 5 = 5$ sowie $1 \cdot 1 = 2$. (vgl. Vollrath et al. 2007: 35)

Ein Schüler von mir sagte diesbezüglich einmal: „Wenn ich 5 mit Null, also nichts multipliziere, dann ändert sich ja an 5 nichts und das ergibt doch wieder 5."
Der Schüler hat von Grund auf ein falsches Konzept für die Multiplikation entwickelt. Wir haben das Problem dann so gelöst, indem er $5 \cdot 0$ in die Definition der Multiplikation eingesetzt hat, also $5 \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{5 \text{ Summanden}}$ und so war ihm dann klar, dass das nicht 5 ergeben kann, sondern dass das 0 ergibt.

$\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bezüglich der Addition, der Multiplikation und des Potenzierens. Bezüglich der Verknüpfungen sind Kommutativität und Assoziativität wichtige Eigenschaften, sie liefern oft Vorteile beim Rechen.
Beispiel: $4 \cdot 35 \cdot 25 = (35 \cdot 4) \cdot 25 = 35 \cdot (4 \cdot 25) = 35 \cdot 100 = 3500$
Ebenso liefert die Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition einen Rechenvorteil. Die Addition ist aber nicht distributiv bezüglich der Multiplikation:
Allgemein gilt nicht: $\mathrm{a} + (\mathrm{b} \cdot \mathrm{c}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) \cdot (\mathrm{a} + \mathrm{c})$. (vgl. Vollrath et al. 2007: 38f)

Kopfrechnen – Schriftliches Rechnen – Taschenrechner

Im Alltag spielt aufgrund der Verfügbarkeit von Taschenrechnern das schriftliche Rechnen keine große Rolle mehr, daher wird man im Unterricht geringere Anforderungen an das Erlernen einer automatisierten Fertigkeit bzgl. des schriftlichen Rechnens stellen, sondern eher an das Abschätzen der Größenordnung des Ergebnisses anhand von halbschriftlichen Verfahren (Zahlen und Rechenoperationen werden so vereinfacht, damit sie teilweise im Kopf gelöst werden können). Das Kopfrechnen ist im Alltag im Umgang mit kleinen Zahlen und bei Überschlagsrechnungen wichtig.
Der Taschenrechner sollte als ein Hilfsmittel angesehen werden und man sollte sein Potenzial ausnützen. Das prinzipielle Verständnis der schriftlichen Rechenverfahren im Hinblick auf das Verstehen algorithmischer Verfahren bleibt ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. (vgl. Vollrath et al. 2007: 35-37)

Mir persönlich fällt auf, dass sich manche SchülerInnen oft zu sehr auf den Taschenrechner verlassen. Sie tippen eine Rechnung in den Taschenrechner ein, schreiben das Ergebnis des Taschenrechners neben der Rechnung hin und denken nicht weiter darüber nach.
Ein Beispiel aus meinem Unterricht: Die Rechnung lautete wie folgt: $\frac{6+7}{2} =$

Manche der SchülerInnen gaben 6 + 7 : 2 in den Taschenrechner ein, dieser lieferte ihnen das Ergebnis 9,5 (da sich der Taschenrechner an die Punkt-vor-Strichregel hält) und sie schrieben das Ergebnis neben die Rechnung hin, ohne daran zu zweifeln. Mir ist aber wichtig, dass die SchülerInnen beim Ergebnis einer Rechnung ungefähr abschätzen können, ob es richtig oder falsch ist. Seitdem baue ich im Unterricht manchmal zur Auflockerung kurze Übungen zum Kopfrechen und Überschlagsrechen ein, damit die SchülerInnen wieder ein Gefühl für die Zahlen bekommen.

Zahlen sind auch als Maßzahlen von Größen (Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte, Gewichte, Zeiten, Geldwerte) in den Anwendungen sehr wichtig.
Gleichartige Größen darf man addieren; die Addition ist kommutativ und assoziativ.
Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Zahlen und Größen, daher können sich das Verständnis von Zahlen und das Verständnis von Größen gegenseitig vertiefen.
Die Multiplikation von Größen führt über den Größenbereich hinaus. Zum Beispiel bei der Flächenberechnung vom Rechteck: A = a·b. Hier sieht man, dass das Produkt zweier Längen einen Flächeninhalt ergibt. (vgl. Vollrath et al. 2007: 39f)

3.2 Bruchzahlen im Unterricht

Bruchzahlen waren schon im Altertum bekannt, die negativen Zahlen wurden in der Neuzeit erfunden.
Einfache Brüche wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ usw. in Verbindung mit Größen ($\frac{1}{2}$ Kilo, $\frac{1}{4}$ Stunde) und Dezimalbrüche in Verbindung mit Geld (0,25 €) treten schon in der Grundschule auf, da die SchülerInnen diesbezüglich schon Erfahrungen aus ihrer Umwelt mitbringen.

Der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ist in struktureller Sicht unterschiedlich.
<u>Erweiterungsbereich:</u> Man sucht das kleinste umfassende Verknüpfungsgebilde, das die Verknüpfungen von $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ fortsetzt und in dem auch die Division immer möglich ist.
<u>Größenbereiche:</u> Eine Streckenteilung führt wieder zu Strecken, wie lang sind aber diese Teilstrecken? Die natürlichen Zahlen reichen hier als Maßzahlen bei gegebener Einheit nicht mehr aus, denn Bruchzahlen lassen sich als Maßzahlen von Längen nicht vermeiden.
<u>Operatoren:</u> Bruchzahlen kann man als Operatoren auf einem Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft gewinnen.

Beispiel: Das Vervielfachen einer Größe kann als Abbildung angesehen werden, bei der einer Größe ihr Vielfaches zugeordnet wird.

Punkte auf dem Zahlenstrahl: Der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen kann am Zahlenstrahl erfolgen, indem man die Strecken gleichmäßig teilt.

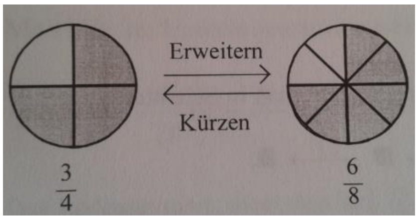
Nun betrachte ich den **Aufbau der Bruchrechnung**.

Aufbau von Bruchvorstellungen: Brüche lassen sich gut als Teile des Ganzen am Tortenmodell veranschaulichen.

Beispiel: $\frac{1}{4}$ einer Torte erhält man, wenn man die Torte in vier gleich große Stücke teilt und dann eines der Stücke nimmt.

http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung

Erweitern und Kürzen: Erweitern bedeutet „Verfeinerung" der Einteilung und Kürzen läuft auf „Vergröberung" hinaus.



(Vollrath et al. 2007: 47)

Addition und Subtraktion: Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche erhält man anschaulich über das Teilen des Ganzen:

3 Achtel plus 2 Achtel = 5 Achtel $\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}\right)$.

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche werden mit dem Gleichnamigmachen auf die gefundene Regel zurückgeführt: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}$.

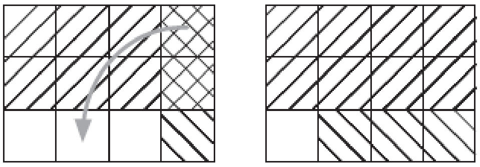
(vgl. Vollrath et al. 2007: 41-48)

Hier wäre ein typischer Fehler: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{9}$.

Es ist wichtig, dass die SchülerInnen ein inhaltliches bzw. anschauliches Verständnis für die Bruchrechnung entwickeln, indem sie sich zum Beispiel mit ikonischen Darstellungen behelfen:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=?$$

Um diese Rechnung zu lösen, unterteilt man ein Rechteck waagrecht dreimal (1. Nenner) und senkrecht viermal (2. Nenner). Die beiden Größen lassen sich also im Rechteck veranschaulichen und man erhält als Ergebnis $\frac{11}{12}$.



https://www.ph-ludwigsburg.de/uploads/media/did_alg_zt_skript.pdf

Multiplikation und Division: Bei der Multiplikation kann man Operatoren benutzen, die man auf Größen mit Brüchen als Maßzahlen anwendet: $(\frac{3}{4}\,\mathrm{kg}) \cdot \frac{5}{7}$ und die Division ergibt sich durch Umkehrung der Multiplikation mit Hilfe von Umkehroperatoren.

Auf $\left(\frac{15}{28}\,\mathrm{kg}\right) : \frac{3}{4}$ wendet man den Operator $\cdot\,\frac{4}{3}$ an.

Die Bruchzahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition, der Multiplikation und der Division (mit der Einschränkung bezüglich der 0).

Führt man die Division zweier natürlicher Zahlen schriftlich aus, indem man den üblichen Divisionsalgorithmus „nach rechts“ fortsetzt, so kommt man zur Dezimaldarstellung.

Beispiel: Dezimaldarstellung von $\frac{13}{4}$:

13 : 4 = 3,25
12
 10
  8
  20
  20
   0 Rest

Dabei sollte den SchülerInnen bewusst sein, dass: 3,25 = 3 + $\frac{2}{10}$ + $\frac{5}{100}$.

Die Stellen nach dem Komma von links nach rechts bedeuten Zehntel, Hundertstel, etc. (vgl. Vollrath et al. 2007: 48-52)

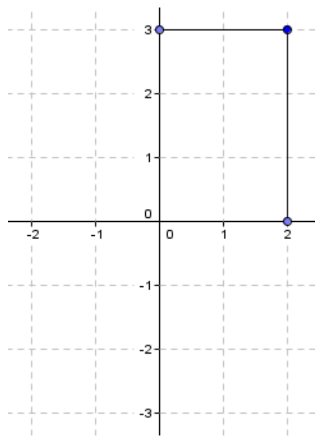
Mir ist aufgefallen, dass einige SchülerInnen in den höheren Schulen gar nicht mehr in der Lage sind, die Division zweier Zahlen schriftlich auszuführen. Das liegt vermutlich daran, dass sie für solche Rechnungen immer den Taschenrechner verwenden und deshalb den Divisionsalgorithmus verlernt haben. Um dem entgegenzuwirken, sollten die SchülerInnen im Unterricht hin und wieder einfache Divisionen schriftlich ausführen.

3.3 Rationale Zahlen im Unterricht

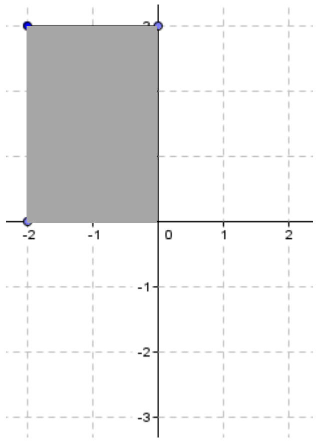
In unserer Umwelt begegnen wir oft negativen Zahlen wie zum Beispiel bei Schulden, Temperaturen usw., diese lassen sich gut mit Skalen verbinden. Die Kennzeichnung erhält man durch Vorzeichen. Der Übergang vom Zahlenstrahl zur Zahlengeraden erlaubt den Übergang von den Bruchzahlen zu den rationalen Zahlen.

Nach einer Idee von Emma Castelnuovo (1968) werden im Folgenden die Vorzeichenregeln mit Hilfe eines Koordinatensystems dargestellt:

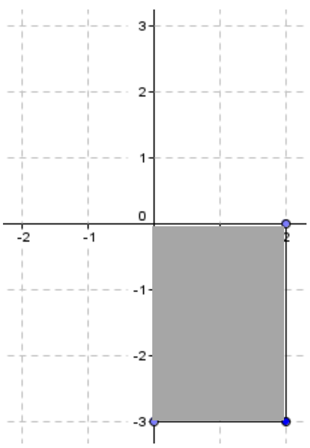
Produkt $2 \cdot 3 = 6$:



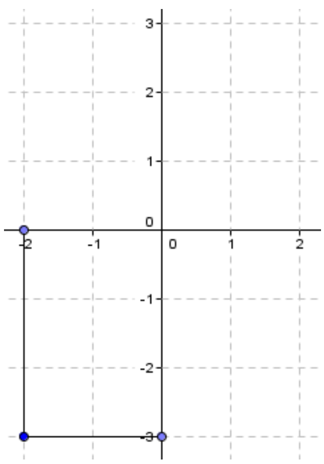
Produkt $(-2) \cdot 3 = -6$:
(Rechteck (von $2 \cdot 3$) wird um die y-Achse geklappt, es erscheint die schwarze Rückseite: „minus“)



Produkt $2 \cdot (-3) = -6$:
(Rechteck (von $2 \cdot 3$) wird um die x-Achse geklappt, es erscheint die schwarze Rückseite: „minus“)



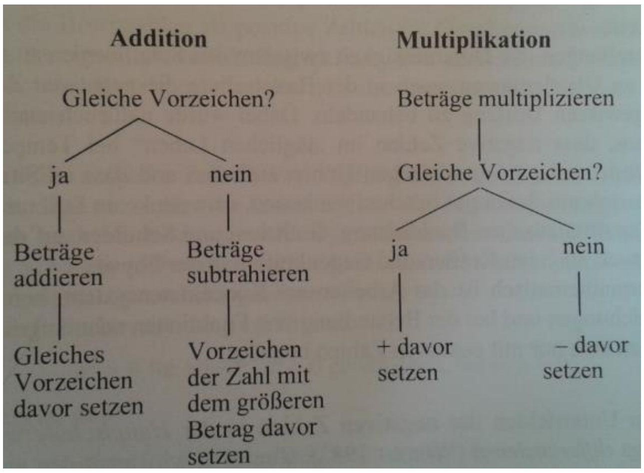
Produkt $(-2) \cdot (-3) = +6$:
(Spiegelt man das Rechteck noch einmal, so erscheint die weiße Vorderseite: „plus“)



Für viele SchülerInnen ist das richtige Formulieren der Regeln schwieriger, als die richtige Durchführung der entsprechenden Rechnungen. (vgl. Vollrath et al. 2007: 57-63)

Ein Grund dafür ist vermutlich, dass man den SchülerInnen häufig nur die Rechenregeln vorgibt und mit ihnen dann die Anwendung der Regeln übt. Bezüglich der richtigen Formulierung von Regeln fehlt ihnen meistens die Übung.

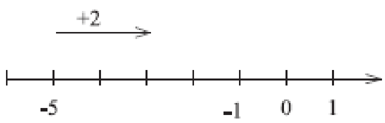
Die Algorithmen lassen sich so notieren:



(Vollrath et al. 2007: 63)

Typische Fehler sind: -7 + 5 = -12 bzw. -7 + 5 = 2 oder auch -4 – 3 = -1.
Die Addition bereitet manchen SchülerInnen Schwierigkeiten, da ihnen oft das Umdenken im negativen Bereich schwer fällt.
Es ist sehr hilfreich - vor allem wenn man bei der Addition Schwierigkeiten hat - sich die Zahlengerade aufzuzeichnen.

Beispiel: -5 + 2 = ?



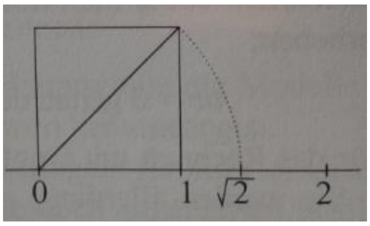
https://www.ph-ludwigsburg.de/uploads/media/did_alg_zt_skript.pdf

Die Regeln der Multiplikation haben die meisten SchülerInnen dagegen oft sehr schnell verinnerlicht. Sie können die Regeln zwar richtig anwenden, denken aber gar nicht mehr darüber nach, warum das eigentlich so ist.

Die rationalen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition, Multiplikation, Division (mit Ausnahme der Null) und Subtraktion.

3.4 Reelle Zahlen im Unterricht

In der 9. Jahrgangsstufe kann den SchülerInnen dann erstmals mit der $\sqrt{2}$ bewusst werden, dass mit den rationalen Zahlen noch nicht alle Punkte der Zahlengeraden besetzt sind. Zum Beispiel anhand folgender Problemstellung:
Bestimme die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.



(Vollrath et al. 2007: 66)

Das Problem der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zeigt sich in der Darstellung der rationalen Zahlen mit Hilfe von gewöhnlichen Brüchen, d.h. in der Frage, ob es einen gekürzten Bruch $\frac{p}{q}$ gibt, sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Man könnte dazu folgenden Satz beweisen:
Ist p eine Primzahl, so gibt es keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$.
Der Beweis dafür erfolgt indirekt, in dem man annimmt, man könne eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ finden mit $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p \ \rightarrow m^2 = n^2p$. In der Primfaktorenzerlegung von m^2 tritt p entweder gar nicht oder in gerader Anzahl auf und p tritt in der Primfaktorenzerlegung von n^2p in ungerader Anzahl auf. Widerspruch, wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung.

Für die numerische Darstellung irrationaler Zahlen erhält man unendliche nicht periodische Dezimalbrüche mit Vorzeichen als Fortsetzung der Dezimalbruchzerlegung.
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann man als Menge aller Punkte der Zahlengeraden betrachten, die man als Dezimalbrüche mit Vorzeichen darstellen kann.
Werden reelle Zahlen als Dezimalbruch dargestellt, dann rechnet man eigentlich mit unendlichen Reihen. In der Praxis rechnet man wie üblich mit endlichen Dezimalbrüchen als Näherungswerte. (vgl. Vollrath et al. 2007: 66-74)

3.5 Anknüpfung an die Hochschulmathematik

Hier betrachte ich den Aufbau des Zahlensystems (von den natürlichen Zahlen zu den komplexen Zahlen) und gehe dabei näher auf die jeweiligen Zahlenbereichserweiterungen ein. Ich brauche dazu nun die folgenden Definitionen:
Die Definitionen und Sätze sind auch für die anderen Kapitel brauchbar.

Definition 1. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

a) Eine *Verknüpfung* (oder binäre Operation) auf M ist eine Abbildung

$f: M \times M \to M, (x, y) \longmapsto f(x, y)$

f wird meist mit einem Operationssymbol bezeichnet, wie z.B. $*$ (oder $+, -, \cdot, \wedge, \ldots$), also $f(x, y) = x * y$.

$x * y$ heißt das *Verknüpfungsergebnis* (Operationsergebnis) von x und y unter $*$.

(M, $*$) heißt ein *Verknüpfungsgebilde* (Magma, Menge mit Verknüpfung, Gruppoid).

b) Sei $*$ eine Verknüpfung auf M und seien $\emptyset \neq N, N' \subseteq M$ nichtleere Teilmengen von M. Dann sei $N * N' := \{x * y | x \in N, y \in N'\}$.

N heißt *abgeschlossen* unter $*$, falls $\forall x, y \in N$ gilt: $x * y \in N$ (bzw. $N * N \subseteq N$).

Ist N abgeschlossen unter $*$, so induziert die Einschränkung von $*$ auf $N \times N$ eine Verknüpfung auf N; (N, $*$) heißt dann *Teil- oder Unterstruktur* (Teilmagma, Teilgruppoid) von (M, $*$).

c) Sei (M, $*$) Verknüpfungsgebilde. Dann heißt $*$

-*assoziativ*, falls $\forall x, y, z \in M$ gilt: $(x * y) * z = x * (y * z)$

-*kommutativ*, falls $\forall x, y \in M$ gilt: $x * y = y * x$.

Ein Element $e \in M$ heißt $\left\{\begin{matrix} \text{linksneutrales} \\ \text{rechtsneutrales} \\ \text{neutrales} \end{matrix}\right\}$ Element für die Operation $*$, falls $\forall x \in M$ gilt:

$\left\{\begin{matrix} e * x = x \\ x * e = x \\ e * x = x * e = x \end{matrix}\right\}$.

Ist $*$ assoziativ und existiert ein neutrales Element $e \in M$ für $*$, so nennt man (M, $*$) eine *Halbgruppe*.

Existiert ein für $*$ neutrales Element $e \in M$, so nennt man ein Element $a \in M$ *invertierbar* bzgl. $*$, falls ein $a' \in M$ existiert mit, $a * a' = a' * a = e$.

In diesem Fall heißt a‘ *Inverses* zu a (und a Inverses zu a‘).

Die Menge aller invertierbaren Elemente von M wird geschrieben als

$M^{\times} := (M,*)^{\times} := \{a \in M | a \text{ ist invertierbar bzgl. } *\}$. (vgl. Baur 2014: 2f)

Definition 2. Eine *Gruppe* ist eine Halbgruppe $(G, \cdot)$ mit $G = G^{\times}$ (d.h. jedes Element ist bzgl. $\cdot$ invertrierbar). $(G, \cdot)$ heißt

-*abelsch* (kommutativ), falls $\cdot$ kommutativ ist.

-*endlich*, falls $|G| < \infty$ ist.

Ein Verknüpfungsgebilde $(\mathrm{G}, *)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn

G1) $*$ ist assoziativ

G2) $\exists$ neutrales Element $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$

G3) $\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}\ \exists \mathrm{g}' \in \mathrm{G}$ mit $\mathrm{g} * \mathrm{g}' = \mathrm{g}' * \mathrm{g} = \mathrm{e}$. (vgl. Baur 2014: 12)

Definition 3. a) Eine nichtleere Menge R mit zwei Verknüpfungen + und ·, d.h. ein Tripel (R, +, ·) heißt *Ring* (mit Einselement), wenn gilt:

R1) (R, +) ist eine abelsche Gruppe

R2) (R, ·) ist eine Halbgruppe (mit Neutralelement $1_\mathrm{R} \in \mathrm{R}$)

R3) $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{R}$ gelten die Distributivgesetze:

$\mathrm{x} \cdot (\mathrm{y} + \mathrm{z}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{x} \cdot \mathrm{z}$ und $(\mathrm{y} + \mathrm{z}) \cdot \mathrm{x} = \mathrm{y} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{z} \cdot \mathrm{x}$.

Mit $\mathrm{R}^\times = (\mathrm{R}, \cdot)^\times$ bezeichnen wir die Menge der bzgl. · invertierbaren Elemente (die *Einheitengruppe* von R).

Ist · eine kommutative Verknüpfung, so heißt (R, +, ·) ein *kommutativer Ring*.

b) Sei (R, +, ·) ein Ring. Eine Teilmenge $\emptyset \neq \mathrm{R}_0 \subseteq \mathrm{R}$ heißt *Teilring (Unterring)* von R, wenn gilt:

(TR1) (R_0, +) ist Untergruppe von (R, +).

(*Untergruppe*: Sei (G, ·) eine Gruppe. Eine Untergruppe H von G (geschrieben H ≤ G) ist eine Unterstruktur (H, ·) von (G, ·), die wieder eine Gruppe ist.)

(TR2) (R_0, ·) ist Teilmagma von (R, ·) mit $1_\mathrm{R} \in \mathrm{R}_0$.

(d.h. R_0 ist mit den auf R_0 eingeschränkten Operationen wieder ein Ring und besitzt dasselbe Einselement wie R).

Ist R_0 ein Unterring von R, so heißt R *Oberring (Erweiterungsring)* von R_0.

(vgl. Baur 2014: 35f)

Definition 4. Sei (R, +, ·) ein kommutativer Ring.

a) Ein Element $\mathrm{a} \in \mathrm{R}$ heißt ein *Nullteiler* von R, falls ein $\mathrm{b} \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$ existiert mit $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 0$.

NT(R)…Menge aller Nullteiler.

b) R heißt ein *Integritätsbereich*, falls NT(R) = {0} ist, d.h. R ist *nullteilerfrei* (das Nullelement ist der einzige Nullteiler).

c) R heißt ein *Körper*, falls $\mathrm{R}^\times = \mathrm{R}\backslash\{0\}$ gilt, d.h. falls jedes Element $\neq 0$ ein multiplikatives Inverses hat. (vgl. Baur 2014: 47)

Definition 5. Sei $\mathrm{M} \neq \emptyset$ eine Menge.

a) Eine (binäre) *Relation* auf M ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{M} \times \mathrm{M}$. Oft bezeichnet man eine Relation $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ mit einem Symbol R (oder $\sim, \cong, =, \subseteq, |, <, \geq, \equiv, \dots$) und schreibt für $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{M}$: $\mathrm{xRy} \Leftrightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathcal{R}$ (d.h. x steht in Relation R zu y)

b) Die Relation R auf M heißt

i) *reflexiv*, falls $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{M}$ gilt: xRx

ii) *symmetrisch*, falls $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{M}$ gilt: $\mathrm{xRy} \Rightarrow \mathrm{yRx}$

ii') *antisymmetrisch*, falls $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{M}$ gilt: xRy und $\mathrm{yRx} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$

iii) *transitiv*, falls $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{M}$ gilt: $(\mathrm{xRy}$ und $\mathrm{yRz}) \Rightarrow \mathrm{xRz}$

Eine Relation R auf M heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und sie heißt *Ordnungsrelation* (oder Teilordnung, Halbordnung, partielle Ordnung), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

c) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann heißt für $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$: $[\mathrm{x}]_\sim := \{\mathrm{y} \in \mathrm{M} | \mathrm{x} \sim \mathrm{y}\}$ die *Äquivalenzklasse von x*.

Jedes $\mathrm{x}' \in [\mathrm{x}]_\sim$ heißt ein Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit $\mathrm{M}/\!\sim := \{[\mathrm{x}]_\sim | \mathrm{x} \in \mathrm{M}\}$ bezeichnet.

Eine Teilmenge $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{M}$ heißt *Repräsentantensystem* für $\sim$, wenn es zu jeder Äquivalenzklasse $[\mathrm{x}]_\sim \in \mathrm{M}/\!\sim$ genau ein $\mathrm{z} \in \mathrm{Z}$ gibt mit $[\mathrm{x}]_\sim = [\mathrm{z}]_\sim$. (vgl. Baur 2014: 9f)

Definition 6. Ein Körper heißt *angeordnet*, wenn es in ihm eine Relation „<“ gibt mit den beiden Eigenschaften

1) für jedes Körperelement a gilt genau eine der Aussagen $a < 0$, $a > 0$ oder $a = 0$,

2) aus $a > 0$ und $b > 0$ folgen $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

Hierbei bedeutet „$a > 0$“ natürlich „$0 < a$“. Die Zahlen > 0 bzw. < 0 heißen die positiven bzw. die negativen Zahlen des Körpers. (vgl. Henn 2003: 185)

Der Aufbau des Zahlensystems: Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen

Für den Aufbau des Zahlensystems sind zwei Typen von Relationen besonders wichtig, nämlich die Äquivalenzrelation und die Ordnungsrelation.

$\mathbb{N}$ ist ein geordnetes Verknüpfungsgebilde mit den Verknüpfungen + und ·, das alle Gruppenaxiome bis auf die Existenz von Inversen erfüllt (als neutrales Element der Addition muss man die Null dazu nehmen).

Bei $\mathbb{Q}^+$ kommen die Inversen bzgl. · hinzu, d.h. $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ist eine komm. Gruppe bzgl. · .

Bei $\mathbb{Z}$ kommen die Inversen bzgl. + hinzu, d.h. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine komm. Gruppe bzgl. +.

Weiters ist $\mathbb{Z}$ sogar ein kommutativer Ring mit Eins.

$\mathbb{Q}$ ist der kleinste Erweiterungskörper von $\mathbb{N}$.
$\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. des Absolutbetrags, d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.
Um $\mathbb{R}$ algebraisch abzuschließen[1], muss man einen Zweierschritt als Vektorraum von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ machen. $\mathbb{R}$ ist noch ein angeordneter Körper, in $\mathbb{C}$ geht diese Eigenschaft verloren.

Cantor definiert wie folgt die Mächtigkeit von Mengen:
Definition 7. Eine Menge M heißt *unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen M und einer echten Teilmenge $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$, $\mathrm{N} \neq \mathrm{M}$, gibt, sonst heißt M *endlich*.
Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung der einen Menge in die andere gibt.
„Gleichmächtig" ist eine Äquivalenzrelation zwischen Mengen, weil die Verkettung zweier Bijektionen wieder bijektiv ist. (vgl. Henn 2003: 164-166)

Ich beginne hier mit den natürlichen Zahlen.
Die natürlichen Zahlen
Im Folgenden sind fünf verschiedene Arten aufgelistet, mit denen man Mengen einführen kann.
<u>1. Konstruktion von $\mathbb{N}$ als Kardinalzahlen</u> (Elementeanzahl von Mengen; wie viele?)
Man ordnet allen gleichmächtigen Mengen ein und dasselbe Symbol a zu, ihre Mächtigkeit/ Kardinalzahl. Eine Kardinalzahl heißt endlich, wenn ihre zugehörigen Mengen endlich sind. Die natürlichen Zahlen sind also alle endlichen Kardinalzahlen.

Die Kardinalzahl der endlichen Menge A wird nun mit card(A) bezeichnet und damit lässt sich definieren:
Addition: $\mathrm{a} + \mathrm{b} \coloneqq \mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ mit $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset, \mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{a}$ und $\mathrm{card}(\mathrm{B}) = \mathrm{b}$
Multiplikation: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \coloneqq \mathrm{card}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ mit $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) | \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$
Anordnung: $\mathrm{a} < \mathrm{b} :\Leftrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ und $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ und mit $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{a}, \mathrm{card}(\mathrm{B}) = \mathrm{b}$.
Das neutrale Element bzgl. + ist $0 \coloneqq \mathrm{card}(\emptyset)$ und bzgl. · ist es $1 \coloneqq \mathrm{card}(\{\emptyset\})$.

[1] Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom von positivem Grad mit Koeffizienten in K eine Nullstelle in K hat.

2. <u>Konstruktion von $\mathbb{N}$ als Ordinalzahlen</u> (Nummerieren, Ordnen; der wievielte?)
Jede natürliche Zahl besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger. Hier wird eine Nachfolgefunktion σ definiert, die jeder Menge eine Nachfolgermenge zuordnet:
Zur Menge A sei $\sigma(A) := A \cup \{A\}$ der Nachfolger von A. Eine Menge aus Mengen heißt *Nachfolgermenge*, wenn sie $\emptyset$ enthält und mit einer Menge A auch $\sigma(A)$.
$\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt aller Nachfolgermengen (der Durchschnitt von Nachfolgermengen ist wieder eine Nachfolgermenge).
Die Existenz einer Nachfolgermenge wird im „Unendlichkeitsaxiom“ (Axiom der Mengenlehre, das die Existenz einer induktiven Menge postuliert) gefordert.

John v. Neumann gibt wie folgt die ersten Elemente jeder Nachfolgermenge an:
$0 = \emptyset,$
$1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\},$
$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\},$
$3 = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\},$
$4 = 3 \cup \{3\} = \{0,1,2\} \cup \{3\} = \{0,1,2,3\},$
$\vdots$
$n = \{0,1,\dots,n-1\}.$
+ und · werden induktiv erklärt, d.h. dass zuerst mit Hilfe der Nachfolgerfunktion definiert wird, was n + 1 bzw. n · 1 ist. Dann wird n + r und n · r für ein beliebiges anderes Element r ≠ 1 definiert, wobei r ein Nachfolger ist, d.h. $r = \sigma(m)$ und die Operationen n + m bzw. n · m schon definiert sind.

Anordnung: $m < n :\Leftrightarrow m \in n$
Addition: $n + 1 := \sigma(n)$ und $n + \sigma(m) := \sigma(n + m)$
Multiplikation: $n \cdot 1 := n$ und $n \cdot \sigma(m) := (n \cdot m) + n$

Ich betrachte nun die ersten Schritte zur Addition und Multiplikation.
Addition:
$n + 2 = n + \sigma(1) = \sigma(n + 1) = \sigma(\sigma(n))$
$n + 3 = n + \sigma(2) = \sigma(n + 2) = \sigma(\sigma(\sigma(n))), \dots$
Multiplikation:
$n \cdot 2 = n \cdot \sigma(1) = (n \cdot 1) + n = n + n,$
$n \cdot 3 = n \cdot \sigma(2) = (n \cdot 2) + n = (n + n) + n, \dots$

3. Der konstruktivistische Ansatz

Hier verwendet man das Strichsymbol: | ist eine natürliche Zahl, Eins genannt.

Beispiel: 2 = ||, 3 = ||| usw.

Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch n| (Nachfolger von n, also n + 1) eine natürliche Zahl.

Jedes n (außer 1) hat einen Vorgänger n*, sodass n = n*|.

n* entsteht aus n durch Abbau des Strichsymbols.

m ist kleiner als n, wenn m aus weniger Strichen aufgebaut ist als n, d.h. wenn m kürzer ist als n.

4. Die axiomatische Charakterisierung

Definition 8. Peano-Axiome

Eine nichtleere Menge N, eine Abbildung $\sigma: N \to N$ und ein ausgezeichnetes Element $1 \in N$ heißen ein *Peano-Tripel* (N, σ, 1), wenn die folgenden drei Axiome gelten:

1) σ ist injektiv,

2) $\forall n \in N$ ist $\sigma(n) \neq 1$,

3) ist $M \subseteq N$ sodass $1 \in M$ und dass mit $n \in M$ auch $\sigma(n) \in M$ gilt, dann ist $M = N$.

Anordnung: $n < m :\Leftrightarrow \exists x \in N \text{ mit } n + x = m$

Addition: $n + 1 := \sigma(n) \text{ und } n + \sigma(m) := \sigma(n + m)$

Multiplikation: $n \cdot 1 := n \text{ und } n \cdot \sigma(m) := n \cdot m + n$

Dedekind und Peano haben gezeigt, dass dieses Axiomensystem vollständig und widerspruchsfrei ist und mit den Definitionen von +, · und der Anordnung alle normalen Eigenschaften von $\mathbb{N}$ folgen. Sie haben auch gezeigt, dass alle Peano-Tripel isomorph sind. Somit sind auch die Modelle 1. - 3. Peano-Tripel.

5. Die g-adische Zahldarstellung

Wir sind es gewöhnt, im Zehnersystem zu rechnen.

Beispiel: $8306 = 8 * 10^3 + 3 * 10^2 + 0 * 10^1 + 6 * 10^0$

Man kann aber eine analoge Darstellung auch mit einer anderen Basiszahl g > 1 und Ziffern $z \in \{0, 1, 2, \dots, g - 1\}$ machen.

Man spricht dann von einer g-adischen Zahldarstellung.

Beispiel: $231_{(5)} = 2 * 5^2 + 3 * 5^1 + 1 * 5^0 = 66_{(10)}$

Der Index „(g)“ ist die verwendete Basiszahl.

Helmut Hasse hat das Wort „g-adisch“ vom Wort „dekadisch“ für das Zehnersystem abgeleitet.
In der Technik verwendet man hauptsächlich das Dualsystem, man hat nur zwei Ziffern, 0 und 1. Beispiel: Zwei Zustände eines elektrischen Stromkreises.

Satz 1. g-adische Zahldarstellung
Zu jeder Basiszahl $g \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ existiert für alle natürlichen Zahlen n eine eindeutige g-adische Darstellung $n = a_r \cdot g^r + a_{r-1} \cdot g^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot g + a_0 = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_{0\,(g)}$ mit Ziffern $a_i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$. (vgl. Henn 2003: 170-175)

Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$
Im abstrakten Aufbau des Zahlensystems betrachtet man die Menge
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}\}$ und auf dieser Menge definiert man die Relation
(a, r) ~ (b, s): ⇔ a + s = b + r.

Man weiß ja, dass zum Beispiel 3 – 5 und 7 – 9 die gleiche negative Zahl ergibt.
In $\mathbb{N}$: 3 + 9 = 7 + 5, d.h. (3, 5) ~ (7, 9)

Die neue Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Transitivität: Es gelte: (a, r) ~ (b, s) und (b, s) ~ (c, t), also a + s = b + r und b + t = c + s.
Man erhält: (a + s) + (b + t) = (b + r) + (c + s) und somit: a + t = c + r, also (a, r) ~ (c, t).
~ ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen bezeichnet man als:
$[a, r]_\sim := \{(b, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (b, s) \sim (a, r)\}$
In der Praxis denkt man aber eigentlich nur an „a – r“.
Und die Menge aller Äquivalenzklassen wird dann $\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen) genannt.

Auf $\mathbb{Z}$ definiert man zwei Verknüpfungen, die die entsprechenden Verknüpfungen in $\mathbb{N}$ dem Permanenzprinzip (die Verknüpfungen + und · für die neuen Zahlen müssen so erklärt werden, dass die „alten“ Rechenregeln - Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze - gültig bleiben) entsprechend fortsetzen:

Im Folgenden bezeichnen die Symbole „+“ und „·“ links von „:=“ jeweils die neu zu definierende Verknüpfung und die Symbole „+“ und „·“ rechts von „:=“ bezeichnen die schon erklärten Verknüpfungen in $\mathbb{N}$.

Addition: $[a,r]_\sim + [b,s]_\sim \coloneqq [a+b, r+s]_\sim$
Sind (a, r) und (b, s) zwei Paare so ist die Äquivalenzklasse der Summe (a + b, r + s) schon durch die Äquivalenzklassen $[a,r]_\sim$ und $[b,s]_\sim$ festgelegt, ist also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.
Sei (c, t) ~ (b, s), also c + s = b + t.
Dann gilt: (a + b) + (r + t) = a + r + b + t = a+ r + c + s = (a + c) + (r + s) also
(a + b, r + s) ~ (a + c, r + t).

Damit lässt sich auf der Menge der Äquivalenzklassen die Addition erklären, die assoziativ und kommutativ ist. Durch wiederholtes Anwenden der Vorgängerfunktion kann man für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten finden, bei dem eine der beiden Komponenten 0 ist: Eine Klasse $[b,s]_\sim$ mit b > s hat einen Repräsentanten der Form (b‘, 0) mit b‘ > 0, ist b < s, so gibt es einen Repräsentanten der Form (0, b‘) mit b‘ > 0.
Die Paare der Form $[b',0]_\sim$ repräsentieren $\mathbb{N}$ und die Paare $[0,a']_\sim$ mit a‘ > 0 repräsentieren $-\mathbb{N}$.

Das neutrale Element der Addition ist die Klasse $[0,0]_\sim$.
Zu der Klasse $[b,s]_\sim$ sei $-[b,s]_\sim \coloneqq [s,b]_\sim$, $-[b,s]_\sim + [b,s]_\sim = [0,0]_\sim$, d.h. jede Klasse hat bzgl. + ein eindeutig bestimmtes Inverses. Das heißt: $\mathbb{Z} \coloneqq \mathbb{N} \times \mathbb{N} /\sim$ mit der Addition.
Für b‘ $\in \mathbb{N}$ schreiben wir die Klasse $[b',0]_\sim$ als b‘ und die Klasse $[0,a']_\sim$ als $-$a‘.

Multiplikation: $[a,r]_\sim \cdot [b,s]_\sim \coloneqq [a \cdot b + r \cdot s, a \cdot s + r \cdot b]_\sim$
Diese Formel ergibt sich aus der Interpretation von $[a,r]_\sim$ als a – r; neutrales Element ist die Klasse $1 = [1,0]_\sim$.

Durch die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \longmapsto [n+1,1]_\sim$ wird $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ eingebettet, d.h. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
(vgl. Henn 2003: 176)

Die Addition macht $\mathbb{Z}$ zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element 0.
Die natürlichen Zahlen bilden jedoch mit der Multiplikation keine Gruppe, da das Axiom (G3) verletzt ist: es gibt keine multiplikativen Inversen.
Die ganzen Zahlen bilden mit der Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring.

Die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$
In der abstrakten Algebra ist $\mathbb{Q}$ der Quotientenkörper des Integritätsbereichs $\mathbb{Z}$.

Henn erläutert: „Unsere anschauliche Vorstellung von Brüchen als Paaren aus einer ganzen und einer natürlichen Zahl und die Erkenntnis, dass Brüche gleich sind, wenn Zähler und Nenner sich durch denselben Zahlfaktor ungleich Null unterscheiden, lässt sich zu einer mathematisch befriedigenden Definition der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ präzisieren.“ (Henn 2003: 177)

Man betrachtet die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times} = \{(a, b) | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^{\times} = \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$ und führt auf dieser Menge die Relation $\sim$ durch (a, b) $\sim$ (c, d): $\Leftrightarrow$ a · d = b · c ein.
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar, die Transitivität erhält man einfach:
Aus (a, b) $\sim$ (c, d) und (c, d) $\sim$ (e, f), also a · d = b · c und c · f = d · e
erhält man: (a · d) ·(c · f) = (b · c) · (d · e) und somit a · f = b · e. Also ist (a, b) $\sim$ (e, f).

Die Menge $\mathbb{Q} \coloneqq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times} / \sim$ der Äquivalenzklassen:
$[a, b]_{\sim} \coloneqq \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\times} | (c, d) \sim (a, b)\}$ (man denkt dabei an $\frac{a}{b}$), ist die Menge der rationalen Zahlen.

Man definiert die Addition und Multiplikation wie folgt:
Addition: $[a, b]_{\sim} + [c, d]_{\sim} \coloneqq [a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d]_{\sim}$
Multiplikation: $[a, b]_{\sim} \cdot [c, d]_{\sim} \coloneqq [a \cdot c, b \cdot d]_{\sim}$
Links stehen die jeweils neu zu definierenden Operationen „+“ und „·“, rechts stehen die schon bekannten Operationen „+“ und „·“ in $\mathbb{Z}$.

Ich zeige nun die Wohldefiniertheit für die Addition:
Seien $[a, b]_{\sim} = [A, B]_{\sim}$, d.h. a · B = b · A und $[c, d]_{\sim} = [C, D]_{\sim}$, d.h. c · D = d · C.
Zu zeigen ist, dass beides Mal die „Bruchadditionsdefinition“ zur selben Äquivalenzklasse führt:
$(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d) \sim (A \cdot D + B \cdot C, B \cdot D)$
$\Leftrightarrow (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (B \cdot D) = (A \cdot D + B \cdot C) \cdot (b \cdot d)$
$\Leftrightarrow \underline{a} \cdot d \cdot \underline{B} \cdot D + b \cdot \underbrace{c} \cdot B \cdot \underbrace{D} = \underline{A} \cdot D \cdot \underline{b} \cdot d + B \cdot \underbrace{C} \cdot b \cdot \underbrace{d}$

Der erste $\Leftrightarrow$ verwendet die Definition der Relation $\sim$, der zweite $\Leftrightarrow$ verwendet die Rechengesetze in $\mathbb{Z}$.

Die unterstrichenen bzw. unterschlängelten Produkte sind nach Voraussetzung gleich, somit ergibt sich unter Verwendung der Rechengesetze in $\mathbb{Z}$ die Wohldefiniertheit der Addition zwischen zwei beliebigen Äquivalenzklassen.

Die so erklärte Verknüpfungsstruktur ($\mathbb{Q}$, +, ·) ist ein (kommutativer) Körper.
Die neutralen Elemente bzgl. + und · sind $[0,1]_{\sim}$ und $[1,1]_{\sim}$.
Für alle ganzen Zahlen a, b mit b ≠ 0 ist $[-a,b]_{\sim}$ additiv invers zu $[a,b]_{\sim}$ und falls auch a ≠ 0 ist, ist $[b,a]_{\sim}$ multiplikativ invers zu $[a,b]_{\sim}$.
Die injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ a \longmapsto [a,1]_{\sim}$ bettet $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ein, d.h. man kann $\mathbb{Z}$ als Unterring von $\mathbb{Q}$ auffassen, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Die Ordnungsstruktur überträgt sind von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ durch $[a,b]_{\sim} < [c,d]_{\sim} :\Leftrightarrow a \cdot d < c \cdot b$.
(vgl. Henn 2003: 177f)

Die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$
In den natürlichen Zahlen und ganzen Zahlen sind die Subtraktion und Division nicht uneingeschränkt möglich. In $\mathbb{Q}$ ist das anders, aber dennoch kann man in $\mathbb{Q}$ nicht alle in der Natur vorkommenden Größen beschreiben.
Zum Beispiel kann die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat keine rationale Zahl sein.

Die reellen Zahlen lassen sich auf verschiedene Arten charakterisieren:
a) $\mathbb{R}$ als angeordneter Körper, in dem jede beschränkte unendliche Teilmenge mindestens einen Häufungspunkt besitzt. (Karl Weierstraß)
b) $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Dedekind-Schnitte, wobei ein Dedekind-Schnitt eine Zerlegung von $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte Teilmengen $A \cup B$ ist mit der Eigenschaft: $\forall a \in A, b \in B$ gilt: a < b. (Richard Dedekind)
c) $\mathbb{R}$ als die Menge der Klassen aller rationalen Intervallschachtlungen (= Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$, die jeweils ineinander liegen und deren Längen eine Nullfolge bilden).
d) $\mathbb{R}$ als archimedisch geordneter Körper, bei dem jede Cauchy-Folge konvergiert. Ein angeordneter Körper heißt archimedisch, wenn $\forall a, b > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}$ mit n·a > b (das Körperelement n·a ist durch 1 · a = a und (n + 1) · a = n · a + a durch vollständige Induktion definiert; die unterschiedliche Bedeutung der „+"-Zeichen ist zu beachten)

Die reellen Zahlen kann man als Cauchy-Folgen rationaler Zahlen definieren.

Eine *Cauchy-Folge* ist eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle n mit der folgenden Eigenschaft: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$, d.h. zu jeder Schranke $\varepsilon > 0$ existiert ein Index n_0, so dass sich die Folgenglieder ab n_0 höchstens um ε unterscheiden.
(vgl. Henn 2003: 182f)

Laut Henn gilt: „Diese nach Augustus Louis Cauchy (1789 - 1857) benannten Folgen mit Elementen aus $\mathbb{Q}$ haben die Eigenschaft, „dass sich die Glieder der Folge mit wachsender Folgenummer immer mehr gleichen". Hieraus wird dann die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge mit Elementen aus $\mathbb{R}$ einen Grenzwert hat." (Henn 2003: 183)

Eine weitere Eigenschaft von Cauchy-Folgen ist, dass jede solche Folge beschränkt ist:
In obiger Definition sei ein $\varepsilon > 0$ mit zugehörigem n_0 gewählt. Dann ist das Maximum der Zahlen $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + \varepsilon$ sicher eine obere Schranke für alle Folgenglieder.

Nun führt man eine Relation in der Menge aller Cauchy-Folgen über $\mathbb{Q}$ ein:
$(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow (a_n - b_n)$ ist Nullfolge.

Das ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar.
Die Transitivität folgt aus den Eigenschaften von Nullfolgen:
Seien $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n) \Rightarrow (a_n - b_n)$ und $(b_n - c_n)$ sind Nullfolgen.
Die Summe von Nullfolgen ist wieder eine Nullfolge, also $(a_n) \sim (c_n)$.

Man schreibt $[a_n]_\sim$ für die Äquivalenzklassen der Folge (a_n) unter $\sim$. Dann wird die Menge aller Äquivalenzklassen $[a_n]_\sim$ - (a_n) Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ - als die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen genannt.

Man kann $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ einbetten durch die Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, a \longmapsto [a]_\sim$, wobei (a) = (a, a, a, …) die konstante Folge ist.

Die Addition und Multiplikation werden in $\mathbb{R}$ elementweise definiert:
$[a_n]_\sim + [b_n]_\sim \ := [a_n + b_n]_\sim$ und $[a_n]_\sim \cdot [b_n]_\sim := [a_n \cdot b_n]_\sim$
Auf der linken Seite steht jeweils die neu zu definierende Verknüpfung und rechts die bereits bekannte Verknüpfung in $\mathbb{Q}$.

Um zu sehen, dass diese Definition von Addition und Multiplikation Sinn macht, muss man nun zeigen:

a) $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ sind jeweils wieder Cauchy-Folgen und

b) die Definition ist wohldefiniert.

<u>Beweis:</u> a) Zuerst zeigt man, dass $(a_n + b_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gewählt und n_0 bzw. m_0 so, dass $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ab n_0 und $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ab m_0.

Für die Summenformel gilt die Cauchybedingung:

$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ab dem Maximum von n_0 und m_0.

Nun zeigt man, dass auch $(a_n \cdot b_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gewählt und es seien alle $|a_n| < A$ und $|b_n| < B$. Wegen der Beschränktheit der Cauchy-Folgen existieren solche Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung seien $A \neq 0$ und $B \neq 0$.

$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| = |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \leq$

$\leq |a_n| \cdot |b_n - b_m| + |b_m| \cdot |a_n - a_m| < A \cdot |b_n - b_m| + B \cdot |a_n - a_m|$

n_0 wählt man groß genug, so dass $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$ und auch $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$ ab n_0 ist, dann gilt: $|a_n b_n - a_m b_m| < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$.

$(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ sind daher wieder Cauchy-Folgen.

b) Seien $(a_n) \sim (A_n)$ und $(b_n) \sim (B_n)$ zwei Paare von äquivalenten Cauchy-Folgen.

Für die Differenz von Summenfolgen gilt: $((a_n+b_n) - (A_n+B_n)) = (a_n - A_n) + (b_n - B_n)$.

Die Summe von Nullfolgen ist wieder eine Nullfolge, also: $(a_n+b_n) \sim (A_n+B_n)$ und damit:

$[a_n + b_n]_\sim = [A_n + B_n]_\sim$

Nun zur Produktfolge:

$|a_n b_n - A_n B_n| = |a_n b_n - A_n b_n + A_n b_n - A_n B_n| \leq |a_n - A_n| \cdot |b_n| + |b_n - B_n| \cdot |A_n|$.

Da (b_n) und (A_n) beschränkt sind, ist $(a_n b_n - A_n B_n)$ wieder eine Nullfolge. Hier folgt:

$[a_n b_n]_\sim = [A_n B_n]_\sim$.

Die Summe und das Produkt von Klassen sind also wohldefiniert.

Bei der Übertragung der Anordnung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ wird definiert, wann ein Klasse $[a_n]_\sim > 0$ bzw. < 0 sein soll. $0 = [0]_\sim$ ist die Nullklasse.

Es sei $[a_n]_\sim \neq 0$, d.h. dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für unendlich viele n gilt: $|a_n| > \varepsilon$. Wobei die Zahl ε jetzt festgehalten wird. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für dieses $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$.
Man wählt eine Zahl a_n mit $|a_n| > \varepsilon$ und $n \geq n_0$. Wegen $|a_n| > \varepsilon$ ist $a_n > 0$ oder $a_n < 0$. Wegen $|a_n - a_m| < \varepsilon$ müssen ab n_0 alle weiteren Folgeglieder a_m dasselbe Vorzeichen wie a_n haben, was dann die Festlegung $[a_n]_\sim > 0$ bzw. < 0 entscheidet.
(vgl. Henn 2003: 183-185)

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$

Gauß hatte die Idee, in Verallgemeinerung der reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden die Punkte der ganzen Ebene als neue Zahlenmenge $\mathbb{C}$ aufzufassen.
William Rowan Hamilton hat die komplexen Zahlen als Zahlenpaare
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a|b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ definiert.
$\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{R}$.
Durch $x \longmapsto (x|0)$ ist $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ eingebettet.

Mit der Multiplikationsvorschrift: $(a|b) \cdot (c|d) \coloneqq (ac - bd|ad + bc)$ wird $\mathbb{C}$ zu einem Körper.
Mit $1 \coloneqq (1|0)$ und $i \coloneqq (0|1)$ lässt sich jedes Element aus $\mathbb{C}$ als $z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + i \cdot b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben und $i^2 = (-1|0) = -1$.
a…Realteil von z
b…Imaginärteil von z (vgl. Henn 2003: 186)

Henn schreibt: „Die „aus dem Himmel gefallene“ Multiplikationsvorschrift für die Zahlenpaare ergibt sich „fast von selbst“, wenn man einen zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ ansetzt, in dem später $\mathbb{R}$ eingebettet wird, die Vektoraddition die neue Körperaddition wird und die Skalarmultiplikation des Vektorraums unter Beachtung des Permanenzprinzips zu einer Körpermultiplikation des ganzen Vektorraums fortgesetzt werden soll.“ (Henn 2003: 187)

Man startet in einem beliebigen Vektorraum $\mathbb{V}$ über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{a_1, a_2\}$.
Man definiert $1 \coloneqq a_1$, d.h. der erste Basisvektor ist das Einselement der Multiplikation.
$\mathbb{R}$ wird in $\mathbb{V}$ eingebettet: $\mathbb{R} \to \mathbb{V}, x \longmapsto x \cdot a_1$
Es wird mit der noch unbekannten Multiplikationsvorschrift gerechnet.
Einselement: $a_1 \cdot a_1 = 1 \cdot 1 = 1$

Man weiß noch nicht, was das Produkt $a_2 \cdot a_2$ ist, auf jeden Fall lässt sich diese Zahl durch die Basis darstellen: $a_2 \cdot a_2 = {a_2}^2 = Aa_1 + Ba_2 = A + Ba_2$ mit noch unbekannten Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$. Ist $B \neq 0$, wählt man als neues zweites Basiselement: $a_2' := a_2 - \frac{B}{2}$.

Damit und mit der geforderten Permanenz muss gelten:

$(a_2')^2 = \left(a_2 - \frac{B}{2}\right)^2 = a_2 \cdot a_2 - Ba_2 + \frac{B^2}{4} = A + Ba_2 - Ba_2 + \frac{B^2}{4} = A + \frac{B^2}{4} \in \mathbb{R}$.

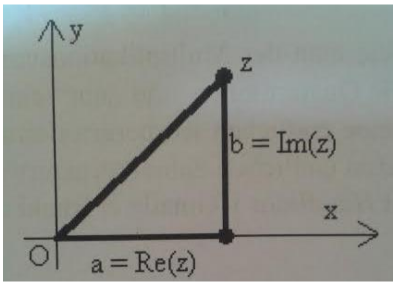
Nach einem Basiswechsel kann vorausgesetzt werden, dass ${a_2}^2 = A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt.

Wäre A > 0, so hätte das Polynom $x^2 - A$ in $\mathbb{V}$ vier verschiedene Nullstellen: die reellen Zahlen $\sqrt{A}$ und $-\sqrt{A}$ und die neuen Zahlen a_2 und $-a_2$ aus $\mathbb{V}\backslash\mathbb{R}$. → Widerspruch dazu, dass ein Polynom von Grad 2 höchstens zwei Nullstellen haben kann. Also muss A < 0 sein.

Dann liefert die neue Substitution ein neues Basiselement $i := \frac{1}{\sqrt{-A}} \cdot a_2$ und es gilt: $i^2 = -1$.

Somit hat man gezeigt, dass sich $\mathbb{R}$ nur in einer bis auf Isomorphie einzigen Weise zu einem Körper $\mathbb{C}$ mit Grad 2 über $\mathbb{R}$ (d.h. $\mathbb{C}$ hat als Vektorraum über $\mathbb{R}$ Dimension 2) fortsetzen lässt.

$\mathbb{C}$ ist wie $\mathbb{R}$ vollständig[2] und ist algebraisch abgeschlossen, jede polynomiale Gleichung ist lösbar, der Absolutbetrag wird fortgesetzt durch die geometrische Sichtweise der Einbettung der komplexen Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene



(Henn 2003: 188)

$|z| := \overline{0z}$

Jedes $z \in \mathbb{C}$ ist ein Punkt der euklidischen Ebene: $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Aus dem Satz von Pythagoras folgt: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diese Betragsfunktion ist die natürliche Fortsetzung des Betrags in $\mathbb{R}$ als Abstand zum Nullpunkt und mit $\bar{z} = a - ib$ (konjugiert komplexe Zahl) gilt: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Satz 2. Eulersche Formel

$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit ist e^{ix} ist ein Punkt auf dem Einheitskreis.

<u>Beweis:</u>

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

[2] Sei X ein metrischer Raum. X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X eine konvergente Folge ist.

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Wegen $i^2 = -1$ und weil die Reihen absolut konvergent sind, kann man umformen:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Wegen der Koordinatendarstellung gilt: $\left|e^{ix}\right| = \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} = 1$, also ist e^{ix} ein Punkt auf dem Einheitskreis. (vgl. Henn 2003: 187-190)

4 Terme

4.1 Die Formelsprache

Man braucht Variablen, um allgemeine Aussagen über Zahlen machen zu können. Die Formelsprache ist Teil von der Fachsprache der Mathematik.
In der Formel $y = 3 \cdot \sin(x + 2\pi)$ sind x und y die Objektvariablen, 2, 3 und π die Zahlnamen, + und · die Operationszeichen, sin ein Funktionsname, es treten auch noch Klammern und das Gleichheitszeichen auf.
Man kann dabei Syntax[3] und Semantik[4] untersuchen.

Der Einfachheit halber sagt man in der Schule statt „Variable“ oft auch „Platzhalter“.

Folgende Bindungen der Variablen sind im Algebraunterricht von Interesse:

- Bindung durch Quantoren: z.B. $\forall x \text{ gilt } x + x = 2x$
- Bindung durch Mengenbildung: z.B. $\{x|2x + 1 = 7\}$ Lösungsmenge einer Gleichung
- Bindung durch Funktionsbildung: z.B. „Die Funktion, welche x in x^2 abbildet“ ($x \to x^2$)
- Bindung durch Kennzeichnung: z.B. „dasjenige $x \in \mathbb{N}$ mit 1 < x < 3“

Bei manchen besonderen Sachverhalten sind formale Quantoren für das Verständnis sehr hilfreich. Zum Beispiel kommt es bei der Formulierung der Existenz eines neutralen Elements bezüglich einer Verknüpfung $*$ wesentlich auf die Reihenfolge der Quantoren an. Richtig formalisiert muss es etwa heißen: $\exists e\ \forall a{:}\ a * e = a$.
Denn $\forall a\ \exists e{:}\ a * e = a$ würde besagen, dass von a abhängige Elemente e vorhanden sind.

Es gibt viele Beispiele, in denen es darum geht, eine Sachsituation in die Sprache der Algebra zu übersetzen. Das ist ein Fall von Modellbildung.

Terme mit Variablen ergeben sich in Sachsituationen meist als Rechenschema (semantische Sicht).
Beispiel: Welchen Preis hat man bei einem Stromverbrauch von x kWh zu einem kWh-Preis von 0,15 €/kWh bei einem Grundpreis von 7 € monatlich zu zahlen?

[3] Form. Die Syntax legt fest, welche Zeichenreihen zulässig sind: 2x + y ist ein Term, nicht dagegen 2x +.
[4] Inhalt. Die Semantik legt z.B. fest, dass beim Einsetzen von Zahlnamen für die Variablen aus einem Term ein Zahlname und aus einer Aussageform eine Aussage wird.

Wenn man Terme zur Berechnung geometrischer Größen hernimmt, kann man dies auch als Bauplan betrachten. Der Bauplan vermittelt Einsichten über die auftretenden Größen und ihre Beziehungen (syntaktische Sicht).
Beispiel: Volumen eines Kreiszylinders: V = $\pi \cdot r^2 \cdot h$. Der Grundkreisradius r geht quadratisch und die Zylinderhöhe h geht linear ein. (vgl. Vollrath et al. 2007: 77-84)

4.2 Schwierigkeiten beim Lernen der Formelsprache

Das Lernen der Formelsprache bereitet vielen Menschen große Schwierigkeiten. Termumformungen macht man nach bestimmten Regeln. Viele Regeln werden verbal formuliert, da man so leichter allgemeine Fälle erfassen kann.

Manche Formeln haben eine Doppelfunktion, einerseits sind sie selbst Objekte einer Termumformung und andererseits sind sie Regeln für bestimmte Termumformungen, so kann man zum Beispiel die Formel a(b + c) = ab + ac als durchgeführte Termumformung betrachten und aber auch als Regel für bestimmte Termumformungen.
Das ist für SchülerInnen oft schwer zu erfassen. Man könnte daher versuchen, diese Ebenen zu trennen, indem man zum Beispiel auf der Regelebene mit anderen Zeichen (Großbuchstaben) arbeitet.

Typische Fehler sind:

- Fehler beim Auflösen der Klammern: 3a – (2a + b) = 3a – 2a + b
- Verwechseln von Termen: x^2 wird mit 2x verwechselt
- Fehler beim Kürzen: $\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$
- Fehler beim Wurzelziehen: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Laut Vollrath verlaufen Schülerfehler überwiegend regelhaft, indem sich die SchülerInnen auf dem Hintergrund von Vorstellungen ihr eigenes Regelwerk konstruieren.
Man sollte keineswegs die SchülerInnen deswegen angreifen und ihre Fehler „moralisch“ abqualifizieren, wie zum Beispiel mit solchen Kommentaren: „Fruchtbar!“, „Schrecklich“, usw. (vgl. Vollrath et al. 2007: 86-94)

Meiner Erfahrung nach ist es wichtig, dass man die SchülerInnen motiviert und dass sie Freude am Lernen haben. Man soll sie auf ihre Stärken hinweisen und hin und wieder auch dafür loben.

Vor allem lernschwache SchülerInnen verdienen sich auch bei nur kleinen Lernerfolgen Lob und Anerkennung, denn nur so kann man erreichen, dass sie nicht aufgeben wollen, sondern weiter machen.
Man soll den SchülerInnen bewusst machen, dass man gut aus eigenen Fehlern lernen kann.
Und manche SchülerInnen brauchen eben länger, bis sie die Inhalte eines Themas verstanden haben, als andere SchülerInnen und sie müssen es vielleicht öfter als einmal erklärt bekommen.
Es ist oft sehr hilfreich, zusätzlich zu den Ausführungen und Erklärungen der LehrerInnen, die SchülerInnen dazu anregen, die Inhalte noch einmal mit den MitschülerInnen zu diskutieren und besprechen, denn das bestärkt sie auch in der Formelsprache.

4.3 Über das Lehren der Formelsprache

Mit der Formelsprache kann man seine eigenen mathematischen Vorstellungen ausdrücken und man kann damit über mathematische Fragen miteinander kommunizieren.

Die geistigen Tätigkeiten, die sich in dieser Sprache vollziehen, kann man so beschreiben: In der algebraischen Formelsprache werden Zahlen und Beziehungen zwischen ihnen allgemein ausgedrückt; es werden Gesetzmäßigkeiten ausgedrückt, begründet oder verworfen und Probleme können präzisiert und gelöst werden. Mit dieser Sprache kann man „Gehirnakrobatik" betreiben. Vielen SchülerInnen wird es gar nicht bewusst sein, dass sie in der Algebra eine Sprache gelernt haben. (vgl. Vollrath et al. 2007: 95-96)

Ziele beim Lehren der Formelsprache sind: (Vollrath et al. 2007: 99)

- Die Schüler sollen mathematische Gedanken in der Formelsprache ausdrücken lernen.
- Sie sollen Ziele von Umformungen angeben und Umformungen selbst durchführen können. Sie sollen aber auch wissen, wann die Benützung eines Computers zweckmäßig ist und ihn dann richtig einsetzen können.
- Die Schüler sollen die gefundenen Ergebnisse mathematisch interpretieren können.

Damit man den SchülerInnen bei solchen Umformungen helfen kann, Fehler zu vermeiden, ist die Ausbildung folgender Fähigkeiten wichtig:
Erkennung von Strukturen, sichere und bewegliche Verwendung eines Regelsystems, sowie der Aufbau von Kontrollmechanismen.

Der Lernprozess spielt hier eine große Rolle. Mit der Unterrichtsgestaltung kann man die Entwicklung dieser Fähigkeiten fördern oder aber auch behindern.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 101)

Förderlich sind nach Vollrath folgende Maßnahmen: (Vollrath et al. 2007: 101)

- Sorgfältige Stufung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben.
- Anschauliche Verankerung der Begriffe, Methoden und Regeln.
- Übergang von einer Aufgabe zur schwierigeren erst dann, wenn der Aufgabentyp beherrscht wird.
- Hilfe bei Fehlern, die den Kern des Problems treffen.
- Ermutigung durch Schaffen von Erfolgserlebnissen.
- Wecken von Freude am Einfachen, Klaren, Übersichtlichen durch Wahl von Aufgaben mit passenden Ergebnissen.

Das Lernen der Formelsprache ist ein langfristiger Prozess, der sich über die gesamte Schulzeit hinzieht.

4.4 Die Formelsprache im Unterricht

Termumformungen können die Gleichwertigkeit zweier Rechenschemata zeigen.
Die SchülerInnen sollen die wichtigsten Umformungstypen kennen lernen, indem sie schrittweise in diese Tätigkeit eingeführt werden sollen, der Schwierigkeitsgrad wird dabei langsam gesteigert.

Die wichtigsten Schritte bei der Erarbeitung von Termumformungen sind:
<u>1. Ordnen:</u> Bei Summen schreibt man die gleichen Summanden in alphabetischer Reihenfolge hintereinander. Produkte werden auch geordnet, indem man Zahlen als Faktoren nach vorne setzt. Bei einer Kombination von Summen und Produkten ordnet man zuerst die Produkte und dann die Summen.

<u>2. Zusammenfassen:</u> Bei Summen werden gleichartige Summanden zusammengefasst. Nun kann man Ordnen und Zusammenfassen kombinieren. Bei Subtraktionen kann man auch zusammenfassen. In Produkten fasst man gleiche Faktoren zu Potenzen zusammen.

3. Klammern auflösen: Bei negativen Zahlen haben die SchülerInnen das Auflösen von Klammern kennen gelernt, man kann sie daran erinnern und das auf Terme mit Variablen übertragen: (-2)a = -2a. Schwieriger wird es bei der Auflösung von Klammern um Summen als Faktoren (mit Hilfe des Distributivgesetzes): 2(x + 3y) = 2x + 6y. Bei Multiplikation von zwei Summen wendet man zweimal das Distributivgesetz an:
(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.
Darauf folgen die drei binomischen Formeln:
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$ (vgl. Vollrath et al. 2007: 113-116)

Die binomischen Formeln bereiten manchen SchülerInnen große Schwierigkeiten, sie brauchen oft sehr lange und enorm viel Übung bis sie diese verstanden haben und richtig anwenden können. Um das Verständnis der binomischen Formeln zu erleichtern, kann man sie mit den SchülerInnen gemeinsam herleiten. Dabei übt man auch gleich das Auflösen von Klammern.

4.5 Anknüpfung an die Hochschulmathematik

Die Anknüpfungspunkte an die Hochschulmathematik bezüglich der Terme wiederspiegeln sich bei denen der Zahlen, Funktionen und Gleichungen.

5 Funktionen

Die Funktionen sind seit Beginn des vorigen Jahrhunderts der wichtigste Themenstrang im Algebraunterricht. Sie drücken Beziehungen zwischen Zahlen und zwischen Größen aus. Terme spielen eine sehr wichtige Rolle für die Darstellung von Funktionen und umgekehrt bilden Funktionsnamen Bausteine von Termen.

5.1 Zum Begriff der Funktion

Man unterscheidet verschiedene **Funktionseigenschaften**:

- Art der Termdarstellung: Eine Funktion in Termdarstellung drückt in der Struktur des Terms eine Eigenschaft der Funktion aus.
  Beispiel: $x \rightarrow ax + b$ ist eine lineare Funktion.

- Funktionalgleichung: In Funktionalgleichungen können sich Eigenschaften von Funktionen ausdrücken.
  Beispiel: In der Definition einer additiven Funktion verlangt man, dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ gilt.

- Aussageformen: Aussageformen kann man mit einer Funktion f als Variable betrachten, in denen die übrigen Variablen gebunden sind.
  Beispiel: Die Definition einer wachsenden Funktion: Folgt aus $x_1 \leq x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, so ist die Funktion f wachsend.

- Eigenschaften der Graphen: Geometrische Eigenschaften der Funktionsgraphen kann man als Eigenschaften der Funktionen ansehen.
  Beispiel: Der Graph von $x \rightarrow x^2$ ist eine Parabel, die symmetrisch zur y-Achse ist.

Der Funktionsbegriff ist nicht nur innerhalb der Mathematik sehr wichtig, sondern auch in deren Anwendungen, denn dort braucht man den Funktionsbegriff zur Modellbildung. Dabei sollte man beachten, dass es sich um einen Anpassungsprozess handelt, indem man versucht, die Wirklichkeit durch bestimmte Funktionen angemessen zu beschreiben. Den SchülerInnen sollte bewusst sein, dass die Annahme eines bestimmen funktionalen Zusammenhangs eine Modellbildung darstellt. (vgl. Vollrath et al. 2007: 131-135)

5.2 Zum Lehren des Funktionsbegriffs

Der Begriff funktionales Denken wird zur Beschreibung bestimmter Denkweisen verwendet, man versteht dabei einen bestimmten gedanklichen Umgang mit Funktionen.

Dafür sind drei grundlegende Sachverhalte wichtig:

- Zuordnungscharakter: Mit Funktionen beschreibt man Zusammenhänge zwischen Größen. Dabei ist einer Größe eine andere Größe zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig von der anderen Größe gesehen wird.
  Beispiel: $x \to x^2$: Mit Hilfe des Terms x^2 wird einer Größe x die Größe x^2 zugeordnet.

- Änderungsverhalten: Man erfasst mit Funktionen, wie sich Änderungen einer Größe auf die Abhängige auswirken.
  Beispiel: Proportionale Funktion: Die Verdoppelung des x-Wertes führt zu einer Verdoppelung des y-Wertes.

- Sicht als Ganzes: Einen gegebenen Zusammenhang betrachtet man mit Funktionen als Ganzes.
  Beispiel: Man betrachtet die Menge aller Wertepaare und nicht nur einzelne Wertepaare. Die Betrachtung des Graphen führt zu einer Sicht des Ganzen.

In vielen Wissenschaften und in der Technik benötigt man Funktionen zur Beschreibung von Zusammenhängen, sie alle leisten einen Beitrag zum Verstehen von Phänomenen unserer Umwelt. Bezüglich der Umwelterschließung mit Funktionen hat die Schule die Aufgabe, ihre SchülerInnen mit grundlegenden Phänomenen ihrer Umwelt vertraut zu machen und ihnen auch jene Fähigkeiten zu vermitteln, mit denen sie die Anforderungen der Umwelt verantwortungsbewusst und angemessen bewältigen.

Die wichtigsten Beiträge von Funktionsbetrachtungen im Mathematikunterricht zu dieser Aufgabe werden nun im Folgenden deutlich gemacht.
Die ersten vier dieser Beiträge werde ich parallel am Beispiel des Zusammenhangs zwischen Seitenlänge und Umfang eines Quadrates illustrieren.
1. Betrachten der Umwelt: Das Entdecken von Zusammenhängen ist wichtig für das funktionale Denken, dies setzt eine bestimmte Sicht voraus. Man darf die Größen nicht isoliert betrachten, sondern man beobachtet, wie sich Änderungen einer Größe auf andere auswirken.

Beispiel: Ändert man bei einem Quadrat die Seitenlänge, so beobachtet man, dass sich der Umfang ändert.

2. Das Beschreiben der Umwelt: Nachdem man Zusammenhänge erkannt hat, lassen sich diese sprachlich ausdrücken.
Beispiel: Der Umfang des Quadrat ist von der Seitenlänge abhängig; Seitenlänge → Umfang; a → U, wobei a eine Variable für die Seitenlänge und U eine Variable für den Umfang bezeichnet. Der beobachtete Zusammenhang lässt sich mit Hilfe einer Funktionsgleichung beschreiben: U = 4a.

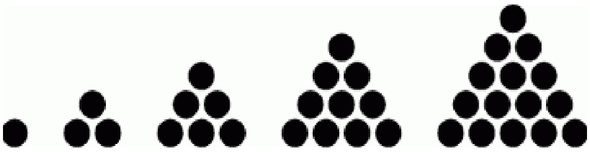
3. Erklären der Umwelt: Mit der gefundenen Gleichung U = 4a kann man die Beobachtung erklären, zum Beispiel dass eine Verdoppelung der Seitenlänge zu einer Verdoppelung des Umfangs führt: $\mathrm{U}_0 = 4\mathrm{a}_0 \rightarrow\ \mathrm{U}_1 = 4(2\mathrm{a}_0) = 2(4\mathrm{a}_0) = 2\ \mathrm{U}_0$.
Dabei sieht man, wie man mit Hilfe von Funktionen argumentieren kann.

4. Rationales Handeln in der Umwelt: Durch die Einsicht in den Zusammenhang zwischen Seitenlänge und Umfang eines Quadrats, kann man auf der Grundlage dieses Wissens rationale Entscheidungen treffen.
Beispiel: Wie lang muss die Seitenlänge a eines Quadrats sein, damit der Umfang 20 cm ist? Diese Problemstellung kann man mit der Gleichung 20 = 4a lösen.
Bei Kenntnis des Zusammenhangs kann man also vorhersagen, wie groß der Umfang bei einer bestimmten Seitenlänge ist.

5. Erforschung der Umwelt: Bei den bisherigen Beispielen ist einem der Zusammenhang ins Auge gestochen, in vielen Fällen ist das aber nicht so einfach. Da bildet man dann Hypothesen, diese werden kontrolliert und eventuell wieder verworfen. Es werden neue Hypothesen gebildet usw., bis man eine befriedigende Antwort bekommt.
Beispiel: Man lässt aus einer Tonne Wasser auslaufen und man beobachtet die Wasserhöhe H in Abhängigkeit von der Zeit t. Je mehr Zeit vergangen ist, umso geringer ist die Wasserhöhe.
Durch Überlegung versucht man den Ansatz: $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 - \mathrm{ct}$
H_0 ist die Höhe zu Beginn. Wenn man c als konstant annimmt, dann hat man eine lineare Funktion angenommen. Ob das berechtigt ist, muss ein Versuch zeigen. Es ist zum Beispiel bei einem kegelförmigen Behälter, der sich nach unten verjüngt, berechtigt, nicht aber bei einer zylindrischen Tonne.

In allen empirisch arbeitenden Wissenschaften braucht man diese forschende Haltung. Teile davon lassen sich auch im Mathematikunterricht einbauen. So kann man bei den SchülerInnen das entdeckende Lernen fördern.

<u>6. Kreatives Handeln in der Umwelt:</u> Bisher haben wir Zusammenhänge entdecken lassen, es können aber auch Zusammenhänge durch Funktionen gestiftet werden.
Man denke an Zahlenfolgen mit einer bestimmten Gesetzmäßigkeit, das Herstellen von Mustern, denen ein bestimmtes Bildungsgesetz zugrunde liegt, das sich als Funktion ausdrücken kann.
Beispiel: Figurierte Zahlen, wie die Dreieckszahlen:



http://www.schulportal.bremerhaven.de/mathezirkel/lsg_dez02.html

Hier hat man Ansatzpunkte zu kreativem Handeln. In der bildenden Kunst und in der Architektur sind häufig solche Gesetzmäßigkeiten eingebaut, die warten auf die Entdeckung durch den Betrachter.

Im Mathematikunterricht behandelt man hauptsächlich nur Funktionen mit einer freien Veränderlichen, was für die Umwelterschließung eine starke Einschränkung ist. Da es ein Bildungsziel ist, den SchülerInnen die gegenseitigen Abhängigkeiten in der Komplexität unserer Umwelt bewusst zu machen, sollten bereits in der Sekundarstufe Funktionen mit mehreren Variablen betrachtet werden.

Bei der Behandlung von Funktionen kann ein graphikfähiger Taschenrechner sehr hilfreich sein, da er die drei zentralen Darstellungen einer Funktion (Gleichung, Tabelle, Graph) erzeugen kann. Man kann damit die Darstellungen einfach variieren, indem man Gleichungen abändert, mehrere Graphen in ein Koordinatensystem zeichnet oder Tabellenwerte verändert. Vor allem bei der Modellierung von Umweltsituationen eröffnen sich Zugänge zu Funktionstypen, die bis vor kurzem im Algebraunterricht nur selten behandelt wurden. Auch der Computer lässt sich sehr gut als Werkzeug für Funktionen einsetzen. Durch das systematische Variieren der Parameter in der allgemeinen Termdarstellung erleichtert sich das Verständnis des Funktionsbegriffs deutlich, weiters kann auch das Entdecken und das Erfassen von Funktionseigenschaften gefördert werden. (vgl. Vollrath et al. 2007: 136-153)

Meine SchülerInnen waren anfangs etwas skeptisch, was den Computereinsatz im Mathematikunterricht betrifft. Sie waren dann aber sehr begeistert, als ich ihnen gezeigt habe, wie man Funktionen mit GeoGebra schnell graphisch darstellen kann.
Bei den linearen Funktionen hat GeoGebra einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis des k- und d-Wertes beigetragen. Die Variation dieser Werte lässt sich schnell und einfach veranschaulichen. Auch bei der Kosten- und Preistheorie ist der Computereinsatz sehr hilfreich, man spart sich außerdem viel Zeit und Aufwand, als wenn man die Graphen alle händisch zeichnen müsste.

Zur Entwicklung des Funktionsbegriffs im Unterricht:
Früher haben sich die Mathematiker in ihren Lehrbüchern für den Schulunterricht mit allgemeinen Beschreibungen des Funktionsbegriffs zufrieden gegeben.
Zum Beispiel: „Wenn jedem Wert einer Veränderlichen x, der zu dem Wertebereich dieser Veränderlichen gehört, durch eine eindeutige Vorschrift je ein bestimmter Zahlenwert y zugeordnet ist, so sag man, y sei eine Funktion der Veränderlichen x oder kürzer, y sei eine Funktion von x.“ (Mangoldt, Knopp 1965, S. 337, zit. n. Vollrath et al. 2007: 159)

Das hat sich über die Jahre stark geändert.
In einem neueren Lehrbuch steht:
„A und B seien Mengen. Eine Funktion oder Abbildung f von A in B ist ein Tripel (A, B, G) mit den Eigenschaften: (1) $G \subseteq A \times B$ und (2) Für alle $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.“ (Liedl, Kuhnert 1992, S. 36, zit. n. Vollrath et al. 2007: 159)

In der ersten Definition wird die Intuition bewusst angesprochen. Es werden Vorstellungen geweckt, aber Einiges bleibt vage. In der zweiten Definition bleibt dagegen alles Vage und Intuitive ausgeschaltet, sie gründet sich auf wohldefinierte Begriffe und Aussagen.

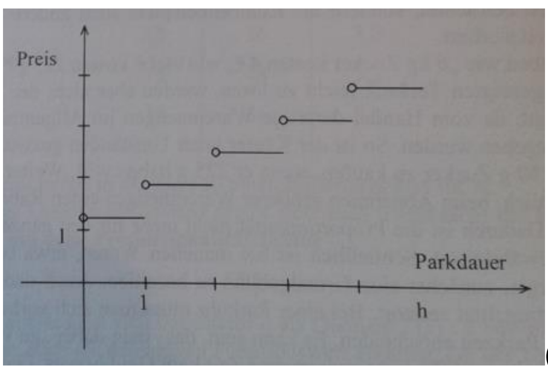
Im Mathematikunterricht ist es wichtig, den SchülerInnen zu helfen, Begriffe zu verstehen und den korrekten Umgang mit ihnen zu lernen. Wesentlich ist also das Wecken angemessener Vorstellungen und auf dieser Grundlage geht es dann um korrektes Arbeiten mit dem Begriff.
Es besteht zum Beispiel die Möglichkeit, den Begriff der Relation anschaulich fundiert und mengentheoretisch korrekt zu definieren und die Funktionen lassen sich dann als spezielle (linkstotale und rechtseindeutige) Relationen definieren. Aber dieser Zugang setzt viel Vorstellungsvermögen und formale Kenntnisse voraus. (vgl. Vollrath et al. 2007: 159)

5.3 Der Funktionsbegriff im Unterricht

Man wählt den Funktionsbegriff als Leitbegriff, an dem man sich im Unterricht orientieren kann. Bei der Behandlung von Größen dienen Funktionsbetrachtungen für das Aufdecken von Zusammenhängen.

Das Lehren eines *Leitbegriffs* ist ein langfristiger Prozess. Das Begriffsverständnis und die Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff entwickeln sich über den Lehrgang hin. Zugleich müssen Querverbindungen zu anderen Kernthemen hergestellt werden.
Bei der Behandlungen einzelner Abschnitte eines Themas, ergeben sich Unterrichtssequenzen, in denen ein Begriff von bestimmten Unterbegriffen her erschlossen werden kann. Zum Beispiel übernehmen bei der Schlussrechnung die proportionalen und antiproportionalen Funktionen eine solche Schlüsselrolle. In diesem Zusammenhang spricht man von *Schlüsselbegriffen*, mit welchen man mittelfristig planen kann.
Im Zusammenhang mit Funktionen sind auch Begriffe im Unterricht zu lehren, die von den SchülerInnen ohne Schwierigkeiten in einer Unterrichtseinheit erfasst werden können. Diese Unterrichtseinheiten werden kurzfristig geplant. Ein Beispiel für solche Begriffe sind etwa wachsende bzw. fallende Funktionen. Solche Begriffe nennt man *Standardbegriffe*.

Um das Kapitel mit einem schönen Beispiel abzuschließen, betrachte ich hier noch die Treppenfunktion. Eine Treppenfunktion ist eine stückweise konstante Funktion.
Bezüglich der Treppenfunktionen bringen die SchülerInnen Erfahrungen aus ihrem Alltag mit, so kennen alle Parkhäuser und viele von ihnen werden auch schon mitbekommen haben, wie es dort mit den zu entrichtenden Tarifen abläuft.
Meist ist ein Grundbetrag G zu entrichten, der das Parken bis zu einer Zeitdauer von 1 Stunde gestattet. Für jede weitere Stunde ist ein bestimmter Betrag p zu entrichten. Natürlich können auch Sondervereinbarungen in Kraft treten.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 162-180)
Daraus kann sich folgender Graph ergeben:



(Vollrath et al. 2007: 180)

5.4 Anknüpfung an die Hochschulmathematik

In diesen Abschnitt betrachte ich als Funktionen speziell die Polynome in einer (oder mehreren) Variablen. Diese bilden einen Ring, nämlich den Polynomring.
Die Definitionen und Sätze aus diesem Kapitel sind auch wieder für die anderen Kapitel brauchbar.

Definition 9. Sei R ein (kommutativer) Ring. Ein *Polynom* über R in der Variablen x ist eine Funktion p der Form $\mathrm{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$, wobei $\mathrm{n} \in \mathbb{N}_0, \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}$ und $\mathrm{a_n} \neq 0$.
n heißt der *Grad* des Polynoms und $\mathrm{a_0, \dots, a_n}$ sind die *Koeffizienten* des Polynoms.
Die Funktion p ordnet jedem Wert $\mathrm{x_0} \in \mathrm{R}$ den Wert p($\mathrm{x_0}$) $\in \mathrm{R}$ zu, ist also eine Funktion von R nach R.
Man definiert dann R[x] als die Menge aller Polynome über dem Ring R in der Variablen x.
(vgl. Mayr 2010: 1)

Wie konstruiert man nun R[x]?
Dazu sei R ein kommutativer Ring. Es seien $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$[5] die Abbildungen f: $\mathbb{N}_0 \to \mathrm{R}$, für die gilt: f(i) = 0 für fast alle i $\in \mathbb{N}_0$.
Man definiert $\mathrm{R[x]} \coloneqq \mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$ als Menge.

Wie sieht die Ringstruktur von $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$ aus?
Man kann eine Abbildung f: $\mathbb{N}_0 \to \mathrm{R}$ mit der zugehörigen Folge $(\mathrm{f(i)})_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}_0}$ der Bilder in R identifizieren: $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)} = \{(\mathrm{a_i})_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}_0} | \mathrm{a_i} \in \mathrm{R}, \mathrm{a_i} = 0 \text{ für fast alle } \mathrm{i} \in \mathbb{N}_0\}$.
Darauf definiert man die Addition und Multiplikation, um eine Ringstruktur zu erhalten.
Seien $(\mathrm{a_i}) = (\mathrm{a_i})_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}_0}, (\mathrm{b_i}) = (\mathrm{b_i})_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}_0}$ zwei Elemente von $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$.
Die Addition ist dieselbe wie für Abb($\mathbb{N}_0$, R): $(\mathrm{a_i}) + (\mathrm{b_i}) \coloneqq (\mathrm{a_i} + \mathrm{b_i})$.
Die Multiplikation wird wie bei der Multiplikation von polynomialen Funktionen definiert: $(\mathrm{a_i}) \cdot (\mathrm{b_i}) \coloneqq (\mathrm{c_i})$ für $\mathrm{c_i} \coloneqq \sum_{\mu+\nu=\mathrm{i}} \mathrm{a}_\mu \mathrm{b}_\nu$.
Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$ einen Ring.
Nullelement ist die Nullfolge (0, 0, …) und das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist (1, 0, 0, …).

[5] $\mathrm{R}^{(\mathbb{N}_0)}$ ist Teilmenge vom Ring der Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach R.

Man definiert also $R[x] := R^{(\mathbb{N}_0)}$ und nennt dies den *Ring der Polynome in einer Variablen* x *über R*.
Für $(a_i) \in R[x]$ schreibt man: $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i x^i$ oder $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, wobei n genügend groß ist, sodass $a_i = 0$ für i > n. Die Variable x fasst man als die Folge (0, 1, 0, 0, 0,…) auf.

Addition: $\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i = \sum_i (a_i + b_i) x^i$
Multiplikation: $\sum_i a_i x^i \cdot \sum_i b_i x^i = \sum_i (\sum_{k+l=i} a_k \cdot b_l) x^i$

Man beachte, dass der Polynomring R[x] Beispiel einer Ringerweiterung ist, d.h. man kann R als Unterring von R[x] auffassen. Das geht, indem man die Elemente von R als die konstanten Polynome in R[x] auffasst. Das heißt man identifiziert R mit seinem Bild unter der Abbildung $\varphi: R \hookrightarrow R[x], a \longmapsto ax^0$.
Das ist ein Beispiel eines injektiven Ringhomomorphismus. (vgl. Baur 2014: 54f)

Ringhomomorphismen sind folgendermaßen definiert:
Definition 10. Es seien (R, +, ·) und (R‘, +, ·) Ringe.
a) Eine Abbildung $\varphi: R \to R'$ mit den Eigenschaften:
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
$\varphi(1_R) = 1_{R'}$
heißt ein *Ringhomomorphismus* von R nach R‘.
b) $\varphi: R \to R'$ sei ein Ringhomomorphismus.
φ heißt *Ring-*$\left\{\begin{matrix} mono \\ epi \\ iso \end{matrix}\right\}$*- morphismus*, wenn φ $\left\{\begin{matrix} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{matrix}\right\}$ ist.
R und R‘ heißen *zueinander isomorph*, R ≅ R‘, wenn φ ein Ringisomorphismus ist.
(vgl. Baur 2014: 43)

Definition 11. Sei $f = \sum a_i x^i \in R[x]$ ein Polynom über R. Ist f verschieden vom Nullpolynom, dann ist der *Grad von f* definiert durch: $\deg f := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$.
(vgl. Baur 2014: 55)

Satz 3. Division mit Rest im Polynomring und Euklidischer Algorithmus
Sei k ein Körper. Zu f(x), g(x) $\in k[x]$ mit g(x) $\neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome q(x), r(x) $\in k[x]$ mit f(x) = q(x) · g(x) + r(x) und r(x) = 0 oder deg r(x) < deg g(x).

Für $r(x) = 0$ ist das Polynom $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$.
Der Euklidische Algorithmus führt als wiederholte Anwendung der Polynomdivision mit Rest zu dem eindeutig bestimmten größten gemeinsamen Teiler $t(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$ und dessen Linearkombination aus $f(x)$ und $g(x)$.

Beweis: **Existenz**: Es seien $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ mit $b_m \neq 0$, wobei o.B.d.A. $m > 0$ sei.
Nun wird die vollständige Induktion nach dem Grad n von $f(x)$ angewandt:
Für $n < m$ ist die Aussage trivialerweise richtig, weil $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$.
Der Satz sei richtig für alle natürlichen Zahlen $n \leq N$ und $f(x)$ habe den Grad $N + 1$.
Dann hat das Polynom $F(x) = f(x) - g(x) \cdot a_{N+1} \cdot {b_m}^{-1} \cdot x^{N+1-m}$ einen Grad $\leq N$, es lässt sich daher schreiben als $F(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ mit $r(x) = 0$ oder $\deg r(x) < \deg g(x) = m$.
Das heißt: $f(x) - g(x) \cdot a_{N+1} \cdot {b_m}^{-1} \cdot x^{N+1-m} = q(x) \cdot g(x) + r(x)$
Anders gesagt: $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x) + g(x) \cdot a_{N+1} \cdot {b_m}^{-1} \cdot x^{N+1-m}$
Daraus erhält man die gewünschte Darstellung:
$f(x) = (q(x) + a_{N+1} \cdot {b_m}^{-1} \cdot x^{N+1-m})g(x) + r(x)$.

Eindeutigkeit: Seien $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ und $f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x)$ zwei solche Darstellungen, dann ist: $0 = f(x) - f(x) = [q(x) - Q(x)] \cdot g(x) + [r(x) - R(x)]$ eine Darstellung des Nullpolynoms, aus der sofort folgt: $q(x) = Q(x)$ und $r(x) = R(x)$.

Der **Euklidische Algorithmus** ist durch die Polynomkette $h_1(x), h_2(x), \dots, h_s(x)$ definiert mit $h_1(x) = f(x)$ und $h_2(x) = g(x)$.
Für $i \geq 3$ ist $h_i(x)$ das Restpolynom bei der Division von $h_{i-2}(x)$ durch $h_{i-1}(x)$.
Der Grad von $h_i(x)$ wird immer kleiner, es muss daher irgendwann der Rest 0 auftauchen, $h_s(x)$ ist dann das letzte Restpolynom $\neq 0$.
Man erhält also eine Darstellung:
$f(x) = q_1(x)g(x) + h_3(x)$,
$g(x) = q_2(x)h_3(x) + h_4(x)$,
$h_3(x) = q_3(x)h_4(x) + h_5(x)$,
$\vdots$
$h_{s-2}(x) = q_{s-2}(x)h_{s-1}(x) + h_s(x)$,
$h_{s-1}(x) = q_{s-1}(x)h_s(x)$.
Jeder gemeinsamer Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ teilt auch alle Polynome $h_i(x)$.

$h_s(x)$ teilt das Polynom $h_{s-1}(x)$, wegen der vorletzten Zeile also auch $h_{s-2}(x)$ usw., bis man am Schluss $h_s(x) \mid g(x)$ und $h_s(x) \mid f(x)$ erhält.
Zusammen folgt, dass $h_s(x)$ der ggT von g(x) und f(x) ist.

Das sukzessive Auflösen führt
$h_s(x) = h_{s-2}(x) - q_{s-2}(x)h_{s-1}(x) = h_{s-2}(x) + q_{s-2}(x)[h_{s-3}(x) - q_{s-3}(x)h_{s-2}(x)] =$
$= A_{s-3}(x)h_{s-3}(x) + B_{s-3}(x)h_{s-2}(x) = \text{usw.}$ mit Polynomen $A_i(x)$ und $B_i(x)$ zur gewünschten Linearkombination $h_s(x) = A_1(x)f(x) + B_1(x)g(x)$.

Bemerkung: Aus der Tatsache, dass der Polynomring k[x] über einem Körper k ein Hauptidealring ist, folgt die lineare Kombinierbarkeit des ggT zweier Polynome.
(vgl. Henn 2003: 140-142)

Beispiel: Gegeben seien $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 2$ und $g(x) = x^4 + 2x^3$
Ich bestimme mit dem euklidischen Algorithmus den $\mathrm{ggT}\big(f(x), g(x)\big)$ und die Linearkombination davon. $f(x) = h_1(x), g(x) = h_2(x)$.

Ich führe nun die Polynomdivision für f(x) dividiert durch g(x) durch:
$f(x) : g(x) = (x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 2) : (x^4 + 2x^3) = \underbrace{x}_{q_1(x)}$ mit Rest $x^2 + x - 2 = h_3(x)$

$f(x) = q_1(x)g(x) + h_3(x) = x(x^4 + 2x^3) + x^2 + x - 2 = x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 2$

$g(x) : h_3(x) = (x^4 + 2x^3) : (x^2 + x - 2) = \underbrace{x^2 + x + 1}_{q_2(x)}$ mit Rest $x + 2 = h_4(x)$

$g(x) = q_2(x)h_3(x) + h_4(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) + x + 2 = x^4 + 2x^3$

$h_3(x) : h_4(x) = (x^2 + x - 2) : (x + 2) = \underbrace{x - 1}_{q_3(x)}$mit Rest 0

$h_3(x) = q_3(x)h_4(x) + 0 = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$

Nach dem euklidischen Algorithmus existiert der $\mathrm{ggT}\big(f(x), g(x)\big) = x + 2$.

Rückwärts einsetzen:
$f(x) = q_1(x)g(x) + h_3(x) \rightarrow h_3(x) = f(x) - q_1(x)g(x)$, also $(x^2 + x - 2) \doteqdot f(x) - xg(x)$
$g(x) = q_2(x)h_3(x) + h_4(x) \rightarrow h_4(x) = g(x) - q_2(x)h_3(x)$
also $(x + 2) \doteqdot g(x) - (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2)$

Somit gilt:

$$\mathrm{ggT}\big(f(x), g(x)\big) = x + 2 \ddot{=} g(x) - (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) \dddot{=} g(x) - (x^2 + x + 1)(f(x) - xg(x))$$
$$= g(x) - (f(x)(x^2 + x + 1) - g(x)(x^3 + x^2 + x)) = (-x^2 - x - 1)f(x) + (x^3 + x^2 + x + 1)g(x)$$
$$h_4(x) = \underbrace{(-x^2 - x - 1)}_{A_1(x)} f(x) + \underbrace{(x^3 + x^2 + x + 1)}_{B_1(x)} g(x)$$

Probe: $(-x^2 - x - 1)(x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 2) + (x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + 2x^3) = x + 2$

Die Angabe dieses Beispiels stammt vom Link:

http://www.benedikt-wolters.de/uploads/blog/ggt_polynome-vollst-rechnung.pdf

Polynomringe in mehreren Veränderlichen können durch

$R[x_1, \dots, x_n] \coloneqq R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ rekursiv definiert werden.

Man betrachtet also Polynome in der Variablen x_n mit Koeffizienten aus dem Polynomring $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Jedes Element von $R[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich eindeutig schreiben als:

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n} a_{(k_1,\dots,k_n)} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

Definition 12. Ein Integritätsbereich R heißt ein *euklidischer Ring*, falls eine Abbildung $\delta: R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}_0$ (die *Gradabbildung* oder *euklidische Norm*) existiert mit den folgenden Eigenschaften:

Zu beliebigen a, b ∈ R, b ≠ 0, existieren q, r ∈ R mit a = q · b + r und falls r ≠ 0 ist, $\delta(r) < \delta(b)$.

Bemerkungen: -Jeder Körper ist ein euklidischer Ring (Wahl: q = ab^{-1}, r = 0, δ beliebig).

-Sei k ein Körper. Dann ist der Polynomring k[x] mit der üblichen Polynomdivision mit Rest (Satz 3) ein euklidischer Ring, mit der Gradabbildung δ aus Definition 11.

Satz 4. Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealbereich.

Bevor ich zum Beweis dieses Satzes komme, definiere ich noch die dazu benötigten Begriffe Ideal und Hauptideal.

Definition 13. Sei (R, +, ·) ein Ring.

Eine Teilmenge $\emptyset \neq I \subseteq$ R heißt ein *Ideal von R* ($I \lhd$ R), falls gilt:

(I1) I ist Untergruppe von (R, +)

(I2) $\forall a \in I,\ r \in$ R ist $ar \in I$ und $ra \in I$.

Definition 14. Sei (R, +, $\cdot$) ein kommutativer Ring.
Für $a \in$ R heißt (a) = aR = Ra = {ar| $r \in$ R} das *von a erzeugte Hauptideal von R*.
Ein Ideal $I \lhd$ R heißt *Hauptideal*, falls ein $a \in$ R existiert mit I = (a).
Ist R ein Integritätsbereich und jedes Ideal von R ein Hauptideal, so heißt R ein *Hauptidealbereich*. (vgl. Baur 2014: 49)

Beweis: R sei euklidischer Ring, $\delta: R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}_0$ sei eine euklidische Norm.
Weiters sei $I \lhd$ R, o.E. sei $I \neq (0)$. Wähle $0 \neq b \in I$ mit $\delta(b) = \min\{\delta(x) \mid x \in I\setminus\{0\}\}$.
Für jedes $x \in I$ erhaltet man: $\exists q, r \in$ R: $x = qb + r$ und r = 0 oder $\delta(r) < \delta(b)$.
Aus $x = qb + r$ folgt $r = x - qb \in I$, da $x \in I, b \in I$. Nach der Wahl von b, kann $\delta(r) < \delta(b)$ nicht auftreten, also ist r = 0 und damit $x = qb$ ($x \in I$ beliebig). Also ist $I = b \cdot R = (b)$ ein Hauptideal. (vgl. Baur 2014: 57f)

Definition 15. a) Ein Polynom heißt *irreduzibel* über k[x], wenn es sich in k[x] nicht in ein Produkt zweier nichttrivialer Polynome zerlegen lässt.
b) Ein Polynom heißt *separabel*, wenn es in $\mathbb{C}$ nur einfache Nullstellen hat.

Satz 5. Einfache Aussagen über Nullstellen von Polynomen f(x) $\in \mathbb{Q}[x]$
a) Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ Lösung von f(x) = 0, so ist das Polynom $(x - \alpha)$ Teiler von f(x).
b) Eine algebraische Gleichung vom Grad n hat höchstens n verschiedene Lösungen.
c) Mehrfache Nullstellen eines Polynoms f sind genau die gemeinsamen Nullstellen von f(x) und seiner Ableitungsfunktion f'(x). Das Polynom $\frac{f(x)}{ggT(f(x),f'(x))}$ ist separabel.
d) Ist f(x) irreduzibel, so ist f(x) auch separabel.

Beweis: a) Nach dem Satz über die Polynomdivision kann man schreiben:
f(x) = q(x) $(x - \alpha)$ + r(x) mit r(x) = 0 oder deg r(x) < 1. Also ist auf jeden Fall r(x) = $r_0 \in \mathbb{Q}$.
Setzt man α ein so ergibt das 0 = f(α) = q(α) ($\alpha - \alpha$) + r_0, woraus r_0 = 0 folgt und somit gilt: $(x - \alpha) \mid f(x)$.

b) Die Aussage folgt durch sukzessives Anwenden der Aussage a).

c) Die Nullstelle α von f(x) habe die Vielfachheit m, d.h. es gilt:
$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x),\ g(\alpha) \neq 0$. Wegen: $f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1}g(x) + (x - \alpha)^m g'(x)$ folgt, dass α genau für m > 1 gemeinsame Nullstelle von f(x) und f'(x) ist.

Die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf $f(x)$ und $f'(x)$ zeigt, dass die mehrfachen Nullstellen genau die Nullstellen des ggT von $f(x)$ und $f'(x)$ sind.
Für $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sind auch $f'(x)$ und ggT($f(x)$, $f'(x)$) aus $\mathbb{Q}[x]$, so dass man auch bei unbekannten, nicht rationalen Nullstellen die Frage „gibt es mehrfache Nullstellen?“ einfach beantworten kann. Aus $f(x)$ kann man durch Abspalten des Faktors ggT($f(x)$, $f'(x)$) ein separables Polynom erhalten.

d) Wenn das Polynom $f(x)$ irreduzibel ist, hat es über $\mathbb{Q}[x]$ nur triviale Teiler. Insbesondere ist der ggT($f(x)$, $f'(x)$) = 1, daraus folgt nach Aussage c) die Separabilität von $f(x)$.
(vgl. Henn 2003: 140-143)

6 Gleichungen

6.1 Gleichungen in den Themensträngen der Algebra

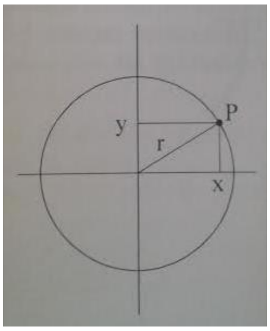
Wenn man Terme mit dem Gleichheitszeichen verbindet, entstehen syntaktisch gesehen Gleichungen, in semantischer Sicht interessiert man sich vor allem für die Wirkung von Einsetzungen. Die Aussageform wird zur Aussage und besonders interessant sind die Einsetzungen, die zu wahren Aussagen führen.

Mit Gleichungen kann man grundlegende Eigenschaften von Zahlen formulieren, wie zum Beispiel die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität. Das sind allgemeingültige Gleichungen, die für alle Einsetzungen von Zahlen aus dem gegebenen Bereich wahre Aussagen ergeben.

Die beiden Seiten einer Gleichung sind Terme und die Termumformungen drücken sich in allgemeingültigen Gleichungen aus. Terme sind oft Rechenschemata, zum Beispiel wird der Umfang einer Rechtecks mit den Seitenlängen a und b nach dem Schema 2(a + b) berechnet und daraus erhält man eine Formel, wenn man für den Umfang die Variable U schreibt: U = 2(a + b). Aus dieser Formel lassen sich weitere Formeln ableiten.
Mit Gleichungen kann man Funktionen als Formelabstrakte betrachten.

Funktionen bieten viele Problemstellungen, bei denen Gleichungen zu lösen sind.
So etwa bei Fragestellungen wie:
„Wo schneidet der Graph von $x \to x^2 + 2x - 3$ die x-Achse?“, zu lösen ist: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

In der 8. Jahrgangsstufe betrachtet man die Gleichungen von Geraden, in der 9. Jahrgangsstufe die Gleichungen von quadratischen Parabeln und in der 10. Jahrgangsstufe die Gleichungen von Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung, dann die Gleichungen der Graphen von Exponential- und Logarithmusfunktionen und schließlich die Gleichungen von trigonometrischen Funktionen.
Die Gleichung des Kreises bleibt hier ausgeschlossen. Hier geht man anders vor:
Für den Kreis findet man in der 9. Jahrgangsstufe eine Gleichung als Anwendung des Satzes von Pythagoras, wenn man ihn geschickt - wie im Buch von Vollrath et al. - in ein Achsenkreuz legt:



Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = r^2$

Die Menge $\{(x, y) | \, x^2 + y^2 = r^2\}$ ist eine Relation, d.h. der Kreis ergibt sich als Graph einer Relation. Diese Überlegungen können gut die Bildung des Relationsbegriffs und auch die Beziehung zwischen den Begriffen Funktion und Relation unterstützen.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 218-224)

6.2 Über das Lernen des Umgangs mit Gleichungen

Vor allem das Umformen von Gleichungen spielt in der Schule eine wichtige Rolle, es ist zielgerichtet und folgt bestimmten Regeln. Das Lernen im Zusammenhang mit Gleichungen lässt sich unter dem Aspekt des Lernens von Algorithmen betrachten.
Im Unterricht geht es darum, den SchülerInnen Algorithmen zu lehren, mit deren Hilfe sie Gleichungen lösen bzw. Formeln auflösen können.

Dabei sind folgende Überlegungen in Betracht zu ziehen:

- Gleichungen sicher und schnell zu lösen ist nur möglich, wenn man eine algorithmische Lösungsstrategie besitzt.
- Erkennen die SchülerInnen bei Algorithmen nicht die entscheidenden Ideen, so vergessen sie die Algorithmen wieder schnell.
- Algorithmen werden mit wachsender Übung verkürzt.
- Es setzt eine Hierarchie von Fähigkeiten voraus, wenn man einen Algorithmus sicher beherrschen will.
- Es ist eine kreative mathematische Leistung, wenn die SchülerInnen einen Algorithmus zur rationellen Lösung einer Klasse von gleichartigen, häufig auftretenden Aufgaben entwickeln.
- Eine Überbetonung des algorithmischen Arbeitens, bei dem Algorithmen nur abzuarbeiten sind, führt zu einer geistigen Verödung der Klasse. Um dem entgegenzuwirken sollte man beim Lehren von Algorithmen darauf achten, dass die SchülerInnen möglichst selbstständig aus Aufgabenstellungen und geeigneten Situationen heraus Algorithmen entwickeln.

Beim Umformen von Gleichungen besteht oft das Problem, dass die SchülerInnen nicht klar zwischen dem Ziel und dem einzuschlagenden Weg unterscheiden können, sie sind sich aber bewusst, dass das Umformen Spuren hinterlässt.

Ein typischer Fehler: Bei der Gleichung x + 3 = 5 sagt ein Schüler: „Ich muss 3 auf die andere Seite bringen, dabei geht das, was oben ist, nach unten.“ Also: $x = \frac{5}{3}$.
Um solche Fehler zu vermeiden, ist es für die SchülerInnen hilfreich, wenn sie das Ziel und den einzuschlagenden Weg korrekt formulieren: „Ich will 3 auf die andere Seite bringen, dazu subtrahiere ich 3 auf beiden Seiten.“
Eine Möglichkeit, hier Klarheit zu vermitteln ist, dass man Umformungen durch beidseitige Rechnung mit einer Waage oder mit Längenvergleichen veranschaulicht.

Ein besonderes Problem für die SchülerInnen sind die Sachaufgaben, die mit Gleichungen zu lösen sind, diese sind bei ihnen sehr gefürchtet.
Die Hauptschwierigkeit besteht im Aufstellen der Gleichungen. Diese dann zu lösen, bereitet nach viel Übung meistens keine Schwierigkeiten mehr.
Es gibt konkrete Situationen des täglichen Lebens, die gut illustrieren können, wie ein Problem auf eine Gleichung führen kann.
Beispiel: Ein Haushalt hat die Wahl zwischen zwei Stromtarifen: Tarif 1: Bei einem Grundpreis von 4 € im Monat, beträgt der Preis pro kWh 0,15 €; Tarif 2: Bei einem Grundpreis von 8 € beträgt der kWh-Preis 0,13€. Welcher Tarif ist günstiger?

Eine Möglichkeit, das Interesse von SchülerInnen zu wecken ist, dass man als Sachaufgaben zu Gleichungen Umweltprobleme heranzieht.

Anforderungen an solche Beispiele sind:
1. Sie sollten einfach und klar formuliert sein, sodass Angaben und Probleme unmittelbar zu erkennen sind.
2. Es sollte klar ersichtlich sein, dass diese Angaben ohne mathematische Hilfsmittel nicht oder nur schwer lösbar sind. Damit leuchtet den SchülerInnen der Vorteil von mathematischen Modellen leichter ein.

Den SchülerInnen steht beim Lösen von Gleichungen ein bestimmter Vorrat an Umformungs-Regeln zur Verfügung. Die größere Schwierigkeit jedoch ist, einen passenden Ansatz zu finden.

Um das zu schaffen, brauchen die SchülerInnen folgende Fähigkeiten, die hier stichwortartig notiert sind:

Relationen zwischen Termen aus dem Text entnehmen können → Aus dem Text Terme gewinnen können (Leerstellen im Text erkennen und benennen können bzw. Zahlnamen im Text erkennen und symbolisieren) → Reihenfolge von Operationen erkennen können → Verbalisierte Operationen in die Formelsprache übersetzen können.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 225-230)

Die SchülerInnen bevorzugen im Wesentlichen zwei Strategien:

- Die SchülerInnen entscheiden, welche Größe gefragt ist; sie bezeichnen sie mit x. Damit werden dann Terme zusammengesetzt und die Terme werden in Relation gesetzt. Hier steht die gesuchte Größe im Vordergrund.
- Die SchülerInnen erkennen die Relation, die der Aufgabe zugrunde liegt (zum Beispiel Eine Größe ist das 3-fache der anderen Größe). Er werden Terme in Relation zueinander gebildet (zum Beispiel x und 3x). Die Relation wird mit Hilfe der Terme ausgedrückt. Die Beziehung zwischen den auftretenden Größen steht im Vordergrund.

Die Wahl der Strategie hängt vom Aufgabentyp, von den mathematischen Fähigkeiten und von der Klassenstufe ab. (vgl. Vollrath 1974: 106f)

6.3 Gleichungen im Unterricht

Der Umgang mit Gleichungen beginnt bereits in der Grundschule. Dort werden Aufgaben mit Variablen gestellt, bei denen eine bestimmte Zahl zu bestimmen ist.
Beispiel: Bestimme die Zahl x: $3 + 5 = x$.
Hier erwartet man keine formale Lösungen, sondern eine Übersetzung der Aufgabe in eine Formulierung, die unmittelbar eine Lösung liefert.
Zum Beispiel: $5 + x = 7$ Welche Zahl muss ich zu 5 addieren um 7 zu erhalten?

Auch zu Beginn der 5. Jahrgangsstufe kann man einfache Gleichungen lösen, man wird aber stärker argumentativ vorgehen, indem man zum Beispiel zur Gegenaufgabe übergeht:
Beispiel.: $5 + x = 7$ Gegenaufgabe: $7 – 5 = x$.

In der 6. Jahrgangsstufe treten in den Gleichungen dann Brüche als Koeffizienten und als Lösungen auf, auch hier wird vor allem argumentativ gelöst.

Ab der 7. Jahrgangsstufe treten in den Gleichungen negative Zahlen als Lösungen und als Koeffizienten auf, hier folgt dann schon bald im Rahmen von Termumformungen das Lösen von Gleichungen mit Äquivalenzumformungen.

Bis daher entwickelten sich die Gleichungen mit dem Aufbau des Zahlensystems, nun aber entwickeln sie sich mit dem Funktionsbegriff.
Im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts folgen lineare Gleichungen, Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen, Wurzelgleichungen, Gleichungen höheren Grades, Exponentialgleichungen und trigonometrische Gleichungen.

In der Folge werde ich Gleichungen in den verschiedenen Zahlenbereichen thematisieren.

Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{N}$

In der 5. Jahrgangsstufe kommen - wegen der engen Verbindung zu $\mathbb{N}$ - Gleichungen auf drei verschiedene Arten vor:

- Formulierung von Rechengesetzen: In der 5. Jahrgangsstufe wiederholt und vertieft man das Rechnen mit natürlichen Zahlen, dabei spielen die Rechengesetze eine sehr wichtige Rolle, wie zum Beispiel:

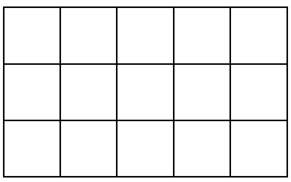
$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Formulierung von Rechenaufgaben: Aufgaben zur Sicherung und Vertiefung werden in Form von Gleichungen gestellt, zum Beispiel: „Bestimme x“, „Löse die (Un-)Gleichung“, „Bestimme die Lösungen“, usw.

- Formeln: Hier bietet sich als Einstieg sehr gut die Ermittlung des Flächeninhalts eines Rechtecks (zusammengesetzt aus Quadraten) durch geschicktes Zählen an:



Hier sind 3 Streifen zu je 5 Quadraten, also 3 · 5 Einheitsquadrate.
Das heißt ein Rechteck mit a Streifen von je b Einheitsquadraten enthält a · b Einheitsquadrate, somit ergibt sich der Flächeninhalt A = a · b.

Gleichungen in $\mathbb{B}$

Die Bereiche zur Verwendung von Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{N}$ setzen sich bei der Bruchrechnung fort.

Hier führe ich nun einige Bemerkungen dazu an:

- Bruchrechenregeln: Auch diese werden mit Gleichungen formuliert:

  $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$

  $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

  $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

  Die Variablen stehen für natürliche Zahlen, obwohl es um das Rechnen mit Bruchzahlen geht. Dies kann vielleicht für die SchülerInnen irritierend sein, jedoch kommt hier deutlich zum Vorschein, dass Brüche eben aus natürlichen Zahlen als Baustein gebildet werden.

  Weiters: r + s = s + r und r · s = s · r für r, s ∈ $\mathbb{B}$

- Formulierung von Rechenaufgaben: Auch die Aufgaben bzgl. der Bruchrechenregeln kann man in Form von Gleichungen stellen.

  Es ergeben sich zwei Möglichkeiten, was die verwendeten Variablen betrifft:

  Die Gleichung $\frac{2}{5}+\frac{x}{3}=\frac{11}{15}$ wird für $x \in \mathbb{N}$ betrachtet und die Gleichung $\frac{2}{5}+x=\frac{11}{15}$ für $x \in \mathbb{B}$.

- Formeln: Wenn die Dezimalbrüche eingeführt worden sind, können im Rechteck die Seitenlängen gemessen werden. Somit erhält man durch Multiplikation der Seitenlängen den Flächeninhalt A = a · b.

  Für den Rauminhalt eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c findet man V = a · b · c.

  Die Ungleichungen spielen bei der Frage der Abgeschlossenheit von $\mathbb{B}$ bzgl. „–" eine Rolle: r – s ∈ $\mathbb{B}$ genau dann, wenn s < r.

  Auch bei der Frage der Anordnung von $\mathbb{B}$ kommen Ungleichungen vor, denn die Menge der Bruchzahlen ist dicht, d.h. zwischen je zwei Bruchzahlen liegt wieder eine:

  r < $\frac{r+s}{2}$ < s für r < s.

Gleichungen in $\mathbb{Q}$ als Rechenregeln

Die Gleichung ax = b wurde mit den Bruchzahlen immer lösbar, dagegen ist die Gleichung a + x = b nur für a < b lösbar und genau diesen Mangel hat man mit Hilfe der negativen Zahlen behoben. Analog ist der Schritt von $\mathbb{B}$ zu $\mathbb{Q}$.

Hier stelle ich die Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen vor. Seien $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{B}$.

$(+\mathrm{m}) + (+\mathrm{n}) = +(\mathrm{m} + \mathrm{n})$

$(-\mathrm{m}) + (-\mathrm{n}) = -(\mathrm{m} + \mathrm{n})$

$$(+\mathrm{m}) + (-\mathrm{n}) = \begin{cases} +(\mathrm{m} - \mathrm{n}), & \text{falls } \mathrm{m} > \mathrm{n} \\ 0, & \text{falls } \mathrm{m} = \mathrm{n} \\ -(\mathrm{n} - \mathrm{m}), & \text{falls } \mathrm{m} < \mathrm{n} \end{cases}$$

$$(-\mathrm{m}) + (+\mathrm{n}) = \begin{cases} +(\mathrm{n} - \mathrm{m}), & \text{falls } \mathrm{m} < \mathrm{n} \\ 0, & \text{falls } \mathrm{m} = \mathrm{n} \\ -(\mathrm{m} - \mathrm{n}), & \text{falls } \mathrm{m} > \mathrm{n} \end{cases}$$

$(+\mathrm{m}) \cdot (+\mathrm{n}) = +(\mathrm{m} \cdot \mathrm{n})$

$(-\mathrm{m}) \cdot (-\mathrm{n}) = +(\mathrm{m} \cdot \mathrm{n})$

$(-\mathrm{m}) \cdot (+\mathrm{n}) = -(\mathrm{m} \cdot \mathrm{n})$

$(+\mathrm{m}) \cdot (-\mathrm{n}) = -(\mathrm{m} \cdot \mathrm{n})$

Formulierungen dieser Art sind oft verantwortlich für ein Missverständnis, denn die SchülerInnen behaupten, dass –a negativ sein muss. Für $\mathrm{a} \in \mathbb{B}$ ist das richtig, aber das ist eben eine unsinnige Einschränkung.

Es wird auch oft nicht verstanden, dass gilt: $|\mathrm{x}| = -\mathrm{x}$ für $\mathrm{x} < 0$.

Nachdem die Rechenregeln für $\mathbb{Q}$ aufgestellt sind, beschreibe ich nun **das Lösen von Gleichungen in $\mathbb{Q}$:**

Als ersten müssen die Begriffe klar sein: Die verwendeten Begriffe der Gleichungslehre sollen auf das für das Verstehen wirklich notwendige Minimum beschränkt werden. Darunter fallen die Begriffe Gleichung, Ungleichung, Lösung (Eine Zahl, die beim Einsetzen zu einer wahren (Un-)Gleichung führt), Lösungsmenge (Menge aller Lösungen einer (Un-)Gleichung), Äquivalenzumformung (Umformung einer (Un-)Gleichung, bei der sich die Lösungsmenge nicht ändert).

In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass der Begriff der Grundmenge sehr problematisch ist. Denn die Lösungsmenge ist von der Grundmenge abhängig. Und es ist wichtig, dass man das den SchülerInnen bewusst macht.

Sinnvoll ist es, mit den SchülerInnen zu vereinbaren, dass die Grundmenge im Unterricht der jeweils größte bekannte Zahlbereich ist.

Danach kann man mit dem Umformen beginnen: Beim Lösen von Gleichungen wird man vorerst wieder das Verfahren mit Gegenoperatoren anwenden.

Beispiel: 2x + 3 = 13

$$\mathrm{x} \xrightarrow{\cdot 2} 2\mathrm{x} \xrightarrow{+3} 2\mathrm{x}+3$$

$$=$$

$$5 \xleftarrow{:2} 10 \xleftarrow{-3} 13$$

Dreht man das Schema um (Umkehroperatoren auf beiden Seiten notieren und das Gleichheitszeichen setzen), so sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} -3|\ \ 2\mathrm{x}+3 &= 13\ \ |-3 \\ :2|\ \ 2\mathrm{x} &= 10\ \ |:2 \\ \mathrm{x} &= 5 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile kann man die Lösung ablesen. (vgl. Vollrath et al. 2007: 233-244)

Vollrath ergänzt dieses Beispiel: „Hieraus ergibt sich das Ziel und andererseits ein Hinweis auf den möglichen Weg. Ziel ist es, die Gleichung oder Ungleichung so umzuformen, dass sich die Lösungsmenge nicht ändert, bis man schließlich die Lösung aus einer einfachen Gleichung oder Ungleichung ablesen kann.“ (Vollrath et al. 2007: 244)

Ein wichtiger Punkt sind die Umformungsregeln: Diese müssen den SchülerInnen allgemein als Eigenschaften rationaler Zahlen bewusst gemacht und mit Variablen formuliert werden:

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

$a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$

$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$, für $c \neq 0$

$a = b \Leftrightarrow a : c = b : c$, für $c \neq 0$

Diese Regeln gelten auch für die Ungleichungen, bei Multiplikation und Division braucht man jedoch die Fallunterscheidungen $c > 0$ und $c < 0$.

Dabei ist eine Äquivalenzumformung eine Umformung einer Gleichung bei der sich die Lösungsmenge nicht ändert. Die wichtigen Äquivalenzumformungen sind also Termumformung, beidseitige Addition oder Subtraktion einer Zahl und beidseitige Multiplikation oder Division mit einer Zahl $\neq 0$.

Die angestrebten Ziele sind dann: Sichere Beherrschung der Umformungsformeln, Sicherheit bei der Erfassung von (Un-)Gleichungstypen, sichere Beherrschung von Lösungsstrategien, Zielsicherheit bei Umformungen, Beherrschen der Umkehrumformungen und Schnelligkeit bei der Lösung von Gleichungen.

Gleichungstypen in $\mathbb{Q}$

In $\mathbb{Q}$ unterscheidet man verschiedene Gleichungstypen. Einige werden hier kurz vorgestellt:

1. Lineare (Un-)Gleichungen: Die Gleichung ax + b = c wird auch in Verbindung mit der Funktionsgleichung y = ax + b gebracht. Solche Gleichungen kann man gut allgemein auf Lösbarkeit diskutieren:
Falls a = 0: Dann steht da y = b, man erhält also als Graph eine Parallele zur x-Achse.
Für b = c erhält man $\mathbb{Q}$ als Lösungsmenge, da für jeden x-Wert der y-Wert c angenommen wird.
Für c ≠ b ist die Lösungsmenge leer.
Falls a ≠ 0 erhält man als Graph eine Gerade, bei der der y-Wert c genau einmal angenommen wird.

Die allgemeine Form einer linearen Gleichung ist: Ax + By + C = 0
Hier sind die Lösungen Paare (x, y) ∈ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Für B ≠ 0 kann man die Menge {(x, y)| Ax + By + C = 0} auffassen als eine Funktion x → y. Ihr Graph ist eine Gerade.
Für B = 0 und A ≠ 0 erhält man als Lösungsmenge keine Funktion, geometrisch handelt es sich aber auch um eine Gerade, nämlich eine Parallele zur y-Achse.

2. Lineare (Un-)Gleichungssysteme: Wenn man zwei Gleichungen mit zwei Variablen x und y durch „und“ verbindet, erhält man ein Gleichungssystem:

$a_1x + b_1y = c_1$
und
$a_2x + b_2y = c_2$.

Die Grundmenge ist dabei $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, die Lösungen eines solchen Gleichungssystems sind Paare (x, y).

Durch jede einzelne der Gleichungen ist eine Gerade als Lösungsmenge gegeben. Die Bestimmung der Lösungsmenge eines Gleichungssystems kann als Suche nach gemeinsamen Punkten der Geraden gedeutet werden.

Es können drei verschiedene Fälle eintreten:

- Die Lösungsmenge besteht aus einem Paar, falls die Geraden genau einen Schnittpunkt haben.
- Die Lösungsmenge ist leer, falls die Geraden parallel zueinander sind und eben keinen Schnittpunkt haben.
- Die Lösungsmenge ist die Gerade, wenn die Geraden zusammenfallen und daher unendlich viele Schnittpunkte haben.

Als Lösungsverfahren werden meistens das Gleichsetzungsverfahren, das Einsetzungsverfahren und das Additionsverfahren verwendet.
Solche Aufgaben können sehr gut mit Algebraprogrammen vom Computer gelöst werden und zum Beispiel mit GeoGebra anschaulich dargestellt werden.

3. Bruchgleichungen: Hier stellt sich das Problem, dass die Terme für bestimmte Einsetzungen oft nicht definiert sind, weil die Nenner dabei 0 werden. Aus diesem Grund muss man den Definitionsbereich der Gleichung beachten.
Bei Bruchgleichungen werden die Brüche traditionell als erstes durch beidseitige Multiplikation mit dem Hauptnenner beseitigt und zwar durch eine Gewinnumformung.

Einschub: Es gibt drei Arten von Umformungen:
-Gewinnumformungen (z.B. Quadrieren, Multiplikation mit 0, Multiplikation mit Variablen).
x = 3 hat in $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge 3, quadriert man die Gleichung so erhält man $x^2 = 9$ und diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge {-3, 3}. Man gewinnt Lösungen dazu.
-Verlustumformungen (z.B. Radizieren, Division durch Variable).
$x^2 + 2x = 0$ hat die Lösungsmenge {-2, 0}, dividiert man durch x so erhält man x + 2 = 0 und diese Gleichung hat die Lösungsmenge {-2}. Man verliert Lösungen.
-Äquivalenzumformungen (z.B. beidseitige Addition von Termen, beidseitige Multiplikation mit von 0 verschiedenen Zahlen). Die Lösungsmengen ändern sich nicht.

---

4. <u>Formeln:</u> Formeln sind Gleichungen mit mehreren Variablen, die für Größen stehen.
Vier wichtige Schritte beim Behandeln von Formeln sind:

- Aufstellen einer Regel,
- Interpretation einer Formel,
- Auflösen einer Formel und
- Einsetzen.

Als Sachbereiche bieten sich geometrische Berechnungen, physikalische oder wirtschaftliche Zusammenhänge an.

Gleichungstypen in $\mathbb{R}$

Das Quadrieren und Wurzelziehen lernen die SchülerInnen im Bereich der reellen Zahlen (9. Schuljahr). Bei den Funktionen betrachtet man quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen. Die quadratischen Gleichungen ergeben sich aus der Frage nach dem Schnitt von Parabeln mit der x-Achse. Die Wurzelgleichungen sind als Beispiele für Gewinnumformungen beim Quadrieren interessant.
Beim Potenzieren spielen Gleichungen höheren Grades und bei der Exponentialfunktion auch Exponentialgleichungen eine Rolle, dies gilt auch bei trigonometrischen Gleichungen.

Hier werden einige Typen von Gleichungen vorgestellt.
1. <u>Quadratische Gleichungen:</u> Diese ergeben sich aus der Frage nach Nullstellen quadratischer Funktionen: $x^2 + px + q = 0$.
Betrachtet man die zugehörigen Parabeln, so erkennt man, dass es für die Lösungsmenge die folgenden Möglichkeiten gibt: keine Schnittpunkte, 1 Schnittpunkt, 2 Schnittpunkte.

Für quadratische Gleichungen kann man die Lösungsformel im Unterricht herleiten.
Zum Beispiel so:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + px = -q \Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

Für $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ gilt $\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, daraus folgt: $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ oder $x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$,

also $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ oder $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Manche LehrerInnen meinen, dass es besser sei, sich die Lösungsformel für die allgemeine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu merken.

Hier ist zu bemerken, dass es heutzutage ganz leicht möglich ist sich von einem CAS die Lösungen einer quadratischen Gleichung geben zu lassen.

<u>2. Wurzelgleichungen:</u> Hier muss man den SchülerInnen bewusst machen, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist.

<u>3. Algebraische Gleichungen höheren Grades (≥ 3):</u> Man ist nach den Ergebnissen der Galoistheorie und dem Satz von Abel gezwungen, sich hier auf Sonderfälle zu beschränken.

<u>4. Systematische Fehlersuche:</u> Das Umformen von (Un-)Gleichungen ist sehr fehleranfällig. Es lassen sich gut Beispiele für „intelligente“ Fehler im Unterricht einsetzen, damit die SchülerInnen lernen, Ergebnisse kritisch zu betrachten, Umformungsregeln auf Anwendbarkeit zu überprüfen und Umformungen auf richtige Durchführung zu überprüfen.

<u>5. Näherungsverfahren:</u> Bei der näherungsweisen Bestimmung einer Lösung ist die Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms am Computer zweckmäßig. In der Sekundarstufe II leitet man das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen her.

Auch beim Lösen von Gleichungen spielen Taschenrechner und Computer eine wichtige Rolle. Denn durch den Einsatz eines graphikfähigen Taschenrechners erweitern sich die Strategien zum Lösen von Gleichungen, es gewinnen graphische Verfahren an Bedeutung und es lassen sich numerische Lösungsverfahren anwenden.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 244-262)

6.4 Anknüpfung an die Hochschulmathematik

Hier beschäftige ich mich mit algebraischen Gleichungen einer Variablen.
Zuerst betrachte ich die sogenannte Auflösung durch Radikale, wobei ich auf Lösungen und Lösungsformeln für algebraische Gleichungen vom Grad $n \leq 4$ eingehe.
Weiters schaue ich mir die Galoistheorie an, die hinter dem Beweis der Nichtauflösbarkeit für allgemeine Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ steckt. Abschließend befasse ich mich noch mit dem Fundamentalsatz der Algebra. Dazu brauche ich nun die folgenden Definitionen:

Definition 16. (M, $*$) und (N, $\circ$) seien Verknüpfungsgebilde.
Eine Abbildung $\varphi: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ heißt *Homomorphismus*, falls $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{M}$ gilt:
$\varphi(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = \varphi(\mathrm{x}) \circ \varphi(\mathrm{y})$.
$\varphi: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ ist ein $\begin{Bmatrix} \mathit{Monomorphismus} \\ \mathit{Epimorphismus} \\ \mathit{Isomorphismus} \end{Bmatrix}$, wenn $\varphi \begin{Bmatrix} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{Bmatrix}$ ist.
M und N heißen zueinander *isomorph* (M $\cong$ N), falls es einen Isomorphismus $\varphi: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ gibt. (vgl. Baur 2014: 7)

Definition 17. Sei (G, $\cdot$) eine Gruppe mit Neutralelement e.
a) Für g $\in$ G ist ord(g) $\coloneqq$ inf {n $\in \mathbb{N}$ | $\mathrm{g}^{\mathrm{n}} = \mathrm{e}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die *Ordnung des Gruppenelements* g. g $\in$ G heißt *Torsionselement* von G, wenn ord(G) $\in \mathbb{N}$ ist (d.h. wenn g endliche Ordnung hat).
b) Für g $\in$ G heißt $\langle \mathrm{g} \rangle \leq \mathrm{G}$ die *von g erzeugte zyklische Untergruppe von G*. G heißt *zyklische Gruppe*, wenn ein g $\in$ G existiert, mit G = $\langle \mathrm{g} \rangle$. (vgl. Baur 2014: 19)

Definition 18. Sei (G, $\cdot$) eine Gruppe.
a) Für $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ heißt die Abbildung $\kappa_{\mathrm{a}}: \mathrm{G} \to \mathrm{G}, \mathrm{g} \longmapsto \mathrm{aga}^{-1}$ die *Konjugation mit dem Element* $a \in G$. Zwei Elemente g, h $\in \mathrm{G}$ heißen *zueinander konjugiert*, wenn es ein $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ gibt mit $\mathrm{h} = \kappa_{\mathrm{a}}(\mathrm{g}) = \mathrm{aga}^{-1}$.
„Zueinander konjugiert sein“ definiert eine Äquivalenzrelation auf G.
Ihre Äquivalenzklassen werden die *Klassen konjugierter Elemente* genannt.
Zwei Untergruppen U, V $\leq$ G heißen *zueinander konjugiert*, wenn es ein $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ gibt mit $\mathrm{V} = \kappa_{\mathrm{a}}(\mathrm{U}) = \mathrm{aUa}^{-1} = \{\mathrm{aua}^{-1} | \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}$.
b) Eine Untergruppe H $\leq$ G heißt *Normalteiler* von G (H $\lhd$ G), wenn für alle $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ gilt:
$\mathrm{H} = \kappa_{\mathrm{a}}(\mathrm{H})$ (d.h. H bleibt bei Konjugation mit beliebigen $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ invariant).
(vgl. Baur 2014: 22f)

Definition 19. Sei (G, $\cdot$) eine Gruppe, N $\lhd$ G ein Normalteiler von G. Dann wird durch (aN) $\cdot$ (bN) $\coloneqq$ (ab)N (a, b $\in \mathrm{G}$) eine Operation auf G/N definiert und (G/N, $\cdot$) ist eine Gruppe mit Neutralelement N (= eN).
(G/N, $\cdot$) heißt die *Faktorgruppe von G nach N*. (vgl. Baur 2014: 23f)

Definition 20. Seien (G, ·) und (G‘, ∗) Gruppen.
Ein *Gruppenhomomorphismus* φ von G nach G‘ ist ein Homomorphismus. (d.h. eine Abbildung, die verträglich mit den Strukturen ·, ∗ ist).
Ist φ ein Gruppenhomomorphismus, der ein Mono- (Epi-, Iso-)morphismus ist, so heißt φ *Gruppen-mono-(-epi-, -iso-)morphismus*.
Existiert ein Gruppenisomorphismus $\varphi: G \to G'$, so heißen G und G‘ zueinander *isomorph* (G ≅ G‘). (vgl. Baur 2014: 25)

Definition 21. Sei (G, ·) eine Gruppe.
Ein *Automorphismus von G* ist ein Gruppenisomorphismus $\varphi: G \to G$.
Aut(G) bezeichnet die Menge aller Automorphismen von G und Inn(G) $:= \{\kappa_a | \, a \in G\}$ die Menge aller Konjugationen (die inneren Automporphismen). (vgl. Baur 2014: 30)

Definition 22. Sei R ein kommutativer Ring, seien a, b, c, p ∈ R.
a) Man sagt, a teilt b (a | b), wenn es ein d ∈ R gibt mit ad = b. Dann heißt a ein *Teiler* von b und b ein *Vielfaches* von a.
b) Ein Element c ∈ R heißt *irreduzibel*, wenn c ≠ 0 ist, c keine Einheit ist und aus c = ab folgt, dass a eine Einheit ist oder b eine Einheit ist.
c) p ∈ R heißt *prim*, wenn p ≠ 0 ist, p keine Einheit ist und aus p | ab folgt: p | a oder p | b.
d) Ein Element a ∈ R heißt zu b ∈ R *assoziiert*, falls a = bu ist für eine Einheit u ∈ R.
(Einheiten von R sind invertierbare Elemente bzgl. der Multiplikation.)
(vgl. Baur 2014: 58)

Definition 23. Sind k ⊂ K zwei Körper, so ist K ein *Erweiterungskörper* von k (geschrieben als K/k oder K : k).
Bemerkung: Ist K ein Erweiterungskörper von k, so ist K ein Vektorraum über k (die Addition von Vektoren ist die übliche Addition in K und die Skalarmultiplikation ist die übliche Multiplikation in K).
Sind $v_1, \dots, v_n$ Vektoren eines Vektorraums V über k und lässt sich jedes v ∈ V als Linearkombination der v_i schreiben, so sagt man, $\{v_1, \dots, v_n\}$ spannt V über k auf.
Eine Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ⊂ V heißt linear unabhängig über k, falls aus $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ ($c_i \in k$) folgt, dass $c_1 = \dots = c_n = 0$ ist. Anderenfalls heißt die Menge linear abhängig.
Spannt eine linear unabhängige Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ den Vektorraum V auf, so heißt die Menge eine Basis von V.

Ist V ein k-Vektorraum, so besitzt jede Basis von V dieselbe Anzahl Elemente.
Hat V eine endliche Basis, so nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis die Dimension von V über k (für die Dimension von V über k schreiben wir [V : k]).
Hat V keine endliche Basis, so heißt V unendlich-dimensional über k.
Sei K ein Erweiterungskörper von k. K heißt eine *endlich-dimensionale Erweiterung* von k, falls K, als k-Vektorraum aufgefasst, endlich-dimensional ist. (vgl. Baur 2013: 43)

Definition 24. Sei K ein Körper, k ein Unterkörper von K und u ∈ K. Dann heißt der Körper k(u) eine *einfache Erweiterung von k*.
Bemerkung: k(u) ist der Durchschnitt aller Unterkörper von K, die k und u enthalten; mindestens K ist ein solcher, also ist die Familie solcher Unterkörper $\neq \emptyset$; der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Unterkörpern von K ist ein Körper → k(u) ist ein Körper; k(u) liegt in jedem Unterkörper von K, der k und u enthält, also ist k(u) der kleinste solche Körper.

Definition 25. Ein Element u eines Erweiterungskörpers K von k heißt *algebraisch* über k, falls u eine Nullstelle eines Polynoms $\neq 0$ aus k[x] ist.
Gibt es kein Polynom $\neq 0$ in k[x] für das u Nullstelle davon ist, so heißt u *transzendent* über k. (vgl. Baur 2013: 49)

Definition 26. Eine Körpererweiterung K von k heißt *algebraische Erweiterung* von k, falls jedes Element von K algebraisch ist über k.

Definition 27. Sei (R, +, ·) ein Ring. Der kleinste Unterring $\mathrm{R}_0 = \{\mathrm{k} \cdot 1_\mathrm{R} | \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} \leq \mathrm{R}$ von R heißt der *Primring von R*. Die eindeutig bestimmte Zahl n ∈ $\mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{R}_0 \cong \mathbb{Z}/(\mathrm{n})$ heißt die *Charakteristik des Ringes R* (char(R) = n).
Insbesondere ist char($\mathbb{Z}/(\mathrm{n})$) = n $\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0$ und
char($\mathbb{Q}$) = char($\mathbb{R}$) = char($\mathbb{C}$) = 0 = char($\mathrm{M}_{\mathrm{nxn}}(\mathbb{R})$). (vgl. Baur 2014: 46f)

Definition 28. Sei k ein Körper und f(x) ein Polynom in k[x], vom Grad n > 0. Dann heißt eine Körpererweiterung K ⊃ k ein *Zerfällungskörper* (Wurzelkörper) von f(x) über k, falls gilt:
i) f(x) zerfällt über K
Zum Beispiel: f(x) = c(x – u_1)(x – u_2) … (x – u_n)) mit $\mathrm{u}_\mathrm{i} \in \mathrm{K}$
ii) K = k($\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n}$). (vgl. Baur 2013: 58)

Algebraische Gleichungen in einer Variablen

Auflösung durch Radikale

Es sind Algorithmen und Formeln wünschenswert, mit denen man die Lösungen von Gleichungen bestimmen kann. Zum Beispiel kann man mit dem Gauß-Algorithmus lineare Gleichungssysteme lösen und mit der „Mitternachtsformel“ quadratische Gleichungen.

Der Name dieser Formel kommt daher, dass die SchülerInnen diese Formel auch um Mitternacht, wenn sie aus tiefstem Schlaf geweckt werden, sofort aufsagen können müssen.
In diesem Abschnitt behandeln wir nun für algebraische Gleichungen einer Variablen existierende Lösungsformeln, die aus Radikalen (gewisse Wurzelausdrücke) gebildet sind.

Zu den Begriffen Lösungen und Lösungsformeln: In vielen mathematischen Problemstellungen geht es darum, Gleichungen zu lösen. Man unterscheidet zwischen der Existenz von Lösungsformeln und der Existenz von Lösungen.
Lösungsformeln gibt es in den wenigsten Fällen (Ausnahme: lineare Gleichungssysteme; quadratische Gleichungen einer Variablen), dafür gibt es aber meistens genaue Aussagen über die Existenz und die Anzahl von Lösungen.

Bei Gleichungen einer Variablen ist der Zusammenhang zwischen der algebraischen Sichtweise (Wurzel (Lösung) einer Gleichung), der analytischen Sichtweise (Nullstelle einer Funktion) und der geometrischen Sichtweise (Schnitt des Graphen der Funktion mit der x-Achse) sehr hilfreich: Gleichungen der Form $g(x) = h(x)$ lassen sich auch als $f(x) = g(x) - h(x) = 0$ schreiben. Damit man eine Übersicht über die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ bekommt, zeichnet man den Graphen der Funktion f ($y = f(x)$) und untersucht f auf Nullstellen.

Dies lässt sich auch auf Gleichungen in zwei Variablen übertragen $f(x, y) = 0$.
Der Graph der Funktion f ($z = f(x, y)$) ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und der Schnitt dieser Fläche mit der x-y-Ebene liefert die Lösungen der Gleichung. Bei einer „vernünftigen“ Funktion f ist das eine Kurve in der Ebene (vgl. Höhenlinien auf einer Landkarte).

Bei linearen Gleichungssystemen sind die Lösungen einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten die Punkte einer Geraden, die Lösungsmenge solcher Gleichungen ist die Schnittmenge von Geraden, woraus alle Lösungsfälle resultieren.

Bei drei Variablen muss man den Schnitt von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ betrachten und im allgemeinen Schnitte von Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$.

Eine wichtige Rolle spielt die Definitionsmenge, da die Lösungsmenge einer Gleichung von ihr abhängt: z.B. ist die Gleichungen $x^2 - 2 = 0$ über $\mathbb{Q}$ nicht lösbar, aber dafür über $\mathbb{R}$. Aus algebraischer Sicht betrachtet man Gleichungen über einem Ring oder einem Körper (z.B. über $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Ich betrachte nun die algebraischen Gleichungen von Grad n ≤ 4:
Bei quadratischen Gleichungen kommen in der Schule zum ersten Mal Wurzeln als Lösungen von Gleichungen vor. Die Wurzel einer Gleichung ist eine Lösung dieser Gleichung. „Auflösung durch Radikale" bedeutet eine durch geeignete n-te Wurzel darstellte Lösungsformel.

Die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen (erste Typ, der mehr als eine Lösung hat):
$ax^2 + bx + c = 0$ mit a, b, c ∈ $\mathbb{R}$ und $a \neq 0$ hat die beiden Lösungen $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x^2 + px + q = 0$ mit p, q ∈ $\mathbb{R}$ hat die beiden Lösungen $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Für die algebraischen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind diese Gleichungen wichtig, dort sind a, b, c, p und q ∈ $\mathbb{Q}$.

Wenn man in der Schule nur reelle Lösungen in Betrachtung zieht, muss man zuerst die Diskriminante (Term unter der Wurzel) untersuchen: $D = b^2 - 4ac$ (bzw. $D = \frac{p^2}{4} - q$)
Man unterscheidet hier nach den 3 Fällen: D < 0, D > 0 und D = 0.

In der Schule können die Koeffizienten a, b, c bzw. p, q reelle Zahlen sein, im Sinne der Algebra handelt es sich dann aber nicht mehr um algebraische Gleichungen (über $\mathbb{Q}$), die beim Aufbau des Zahlensystems eine Rolle spielen, denn eine Zahl heißt *algebraisch* (über $\mathbb{Q}$), wenn sie Nullstelle einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ ist. Diese Zahlen bilden eine Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ mit $\mathbb{Q} < \overline{\mathbb{Q}} < \mathbb{C}$, den algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$. Die Zahlen aus $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ heißen *transzendent* (z.B. π, e).

Es gibt Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, wie z.B. biquadratische Gleichungen $ax^4 + bx^2 + c = 0$ durch Substitution $z = x^2$,
$ax^5 + bx^4 + cx^3 = 0$ durch Ausklammern von x^3, also $x^3(ax^2 + bx + c = 0)$.

Die Cardanoschen Formeln: Die übersichtlichen Lösungen der Gleichungen vom Typ $w^n - A = 0$ sind die Grundbausteine dieser Formeln.
Unter „Radikalen“ versteht man die Lösungen von Gleichungen der Form
$w^n - A = 0, \text{mit } n \in \mathbb{N}, A \in k$, wobei $k = \mathbb{Q}$ (oder eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$).
Wenn man eine Lösung w_1 gefunden hat, so sind $w_i = \xi_n^{i-1} w_1$, i = 1,…,n – wobei
$\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die ausgezeichnete primitive n-te Einheitswurzel ist – die anderen Lösungen.

Die Bezeichnung „Einheitswurzel“ erklärt sich aus der Eulerschen Formel, nach der diese komplexe Zahl auf dem Einheitskreis liegt und ihre n-te Potenz gerade 1 ergibt. Eine Einheitswurzel ξ_n ist „primitiv“, falls keine kleinere Potenz von ξ_n zu 1 führt.

Hier betrachte ich die allgemeine algebraische Gleichung vom Grad 3:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{Q} \text{ und } a \neq 0.$

O.B.d.A. vereinfacht man diese Gleichung, indem man durch a dividiert:
$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \text{ mit } B, C, D \in \mathbb{Q}$.

Man substituiert: $x = z - \frac{B}{3}$ und das ergibt dann die äquivalente, aber einfachere Gleichung: $z^3 + pz + q = 0 \text{ mit } p, q \in \mathbb{Q}$.

Nach der Idee von Francois Vieta substituiert man weiter $z = w - \frac{p}{3w}$:

$$\left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p\left(w - \frac{p}{3w}\right) + q = w^3 - 3w^2\frac{p}{3w} + 3w\frac{p^2}{9w^2} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q =$$

$$= w^3 - pw + \frac{p^2}{3w} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q = w^3 - \frac{p^3}{27w^3} + q = 0 \mid \cdot w^3$$

$$\rightarrow (w^3)^2 + qw^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man:

$$w^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} =: A^{\pm}$$

Die beiden rein kubischen Radikalgleichungen für w haben sechs Lösungen:

$$w_1 = \sqrt[3]{A^+},\ \ w_2 = \rho_1 \sqrt[3]{A^+},\ \ w_3 = \rho_2 \sqrt[3]{A^+}$$

$$w_4 = \sqrt[3]{A^-},\ \ w_5 = \rho_1 \sqrt[3]{A^-},\ \ w_6 = \rho_2 \sqrt[3]{A^-}$$

$\sqrt[3]{A^{+/-}}$ ist eine spezielle Lösung und $\rho_1 = \xi_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist die ausgezeichnete Einheitswurzel.

Einschub zu den kubischen Einheitswurzeln: $\rho_k = e^{\frac{2\pi i k}{3}}$, k = 0, 1, 2

Mit der Formel von Euler erhält man: $\rho_0 = e^0 = 1$

$$\rho_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\rho_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Und ρ_2 ist die konjugiert komplexe Zahl zu ρ_1, d.h. $\rho_2 = \overline{\rho_1}$.

Um die gesuchten Lösungen der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ zu erhalten, muss man rückwärts die 6 w-Lösungen in die Substitutionsgleichung $z = w - \frac{p}{3w}$ einsetzen.

Nach der Nebenrechnung:

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{A^+}} = \sqrt[3]{\frac{p^3}{27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{p^3 \cdot A^-}{27\left(\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)\right)}} = \sqrt[3]{-A^-} = -\sqrt[3]{A^-}$$

ergeben sich sechs Werte für die z-Lösungen:

$$z_1 = \sqrt[3]{A^+} - \frac{p}{3\sqrt[3]{A^+}} = \sqrt[3]{A^+} + \sqrt[3]{A^-}$$

$$z_2 = \rho_1 \sqrt[3]{A^+} - \frac{p}{3\rho_1 \sqrt[3]{A^+}} = \rho_1 \sqrt[3]{A^+} + \frac{1}{\rho_1}\sqrt[3]{A^-} = \rho_1 \sqrt[3]{A^+} + \rho_2 \sqrt[3]{A^-}$$

$$z_3 = \rho_2 \sqrt[3]{A^+} - \frac{p}{3\rho_2 \sqrt[3]{A^+}} = \rho_2 \sqrt[3]{A^+} + \frac{1}{\rho_2}\sqrt[3]{A^-} = \rho_2 \sqrt[3]{A^+} + \rho_1 \sqrt[3]{A^-}$$

$$z_4 = \sqrt[3]{A^-} - \frac{p}{3\sqrt[3]{A^-}} = \sqrt[3]{A^-} + \sqrt[3]{A^+} = z_1$$

$$z_5 = \rho_1 \sqrt[3]{A^-} - \frac{p}{3\rho_1 \sqrt[3]{A^-}} = \rho_1 \sqrt[3]{A^-} + \frac{1}{\rho_1} \sqrt[3]{A^+} = \rho_1 \sqrt[3]{A^-} + \rho_2 \sqrt[3]{A^+} = z_3$$

$$z_6 = \rho_2 \sqrt[3]{A^-} - \frac{p}{3\rho_2 \sqrt[3]{A^-}} = \rho_2 \sqrt[3]{A^-} + \frac{1}{\rho_2} \sqrt[3]{A^+} = \rho_2 \sqrt[3]{A^-} + \rho_1 \sqrt[3]{A^+} = z_2.$$

Insgesamt ist also folgender Satz bewiesen:

Satz 6. Cardanosche Formeln

Die Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ hat drei Lösungen

$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$ mit $d = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$,

$z_2 = \rho_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \rho_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$,

$z_3 = \rho_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \rho_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$.

Dabei ist $\rho_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ eine primitive dritte Einheitswurzel und $\rho_2 = \overline{\rho_1}$.

Wenn man die zur kubischen Gleichung gehörige Funktion und ihren Graphen ansieht, so ist klar, dass es mindestens eine reelle Nullstelle gibt. Bei einer komplexen Nullstelle z_1 ist auch die konjugiert komplexe Zahl $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle.

Damit ergeben sich genau die zwei Varianten, die man am Vorzeichen der Diskriminante $d = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ablesen kann:

- 3 reelle Lösungen (die Lösungen können zusammenfallen, so dass es nur eine oder zwei verschiedene Lösungen gibt):
  $d \leq 0$: Es gibt drei verschiedene Lösungen für $d < 0$, zwei verschiedene Lösungen für $d = 0$ und $p \cdot q \neq 0$ und genau eine Lösung für $d = p = q = 0$.
  Die Lösungen z_i sind reell, da sie gleich ihrer konjugiert komplexen Zahlen sind:
  Weil $d \leq 0$ gilt, ist $\sqrt{d} = \pm i\sqrt{|d|}$ und daher $\overline{\sqrt{d}} = -\sqrt{d}$, außerdem gilt: $\overline{\rho_2} = \rho_1$, $\overline{\rho_1} = \rho_2$, woraus $\overline{z_j} = z_j$ für j = 1, 2, 3 folgt.
- 3 verschiedene Lösungen, eine davon ist reell, die zwei anderen konjugiert komplex:
  $d > 0$, d.h. $\sqrt{d}$ ist reell, also sind auch alle dritten Wurzeln reell, so dass:
  $z_1 \in \mathbb{R}$ und $z_2 = \overline{z_3} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Nun komme ich zu den algebraischen Gleichungen vom Grad 4.
Nach Ferraris Idee werden die algebraischen Gleichungen 4. Grades auf Lösungen kubischer Gleichungen zurückgeführt.
Die allgemeine algebraische Gleichung vom Grad 4 sieht so aus:
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$ und $a \neq 0$.

Dividiert man durch a, so erhält man:
$x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ mit $B, C, D, E \in \mathbb{Q}$.

Man substituiert: $x = z - \frac{B}{4}$ und das ergibt dann die einfachere Gleichung:
$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}$.

Die Idee ist nun, dass man dieses Polynom 4. Grades als Produkt zweier Polynome 2. Grades schreibt.
Dazu macht man den Ansatz mit den Parametern P, Q, R:
$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + Pz + Q) \cdot (z^2 - Pz + R) =$
$= z^4 - Pz^3 + Rz^2 + Pz^3 - P^2z^2 + PRz + Qz^2 - PQz + QR =$
$= z^4 + (Q + R - P^2)z^2 + P(R - Q)z + QR$

Ein Koeffizientenvergleich liefert: $Q + R - P^2 = p$, $P(R - Q) = q$, $QR = r$
Man kann $P \neq 0$ voraussetzen, sonst wäre nach der 2. Gleichung q = 0 und $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ wäre eine biquadratische Gleichung, deren Lösung bekannt ist.

Also: $R + Q = p + P^2$ und $R - Q = \frac{q}{P}$ und weiter $R = \frac{1}{2}\left(p + P^2 + \frac{q}{P}\right)$ und $Q = \frac{1}{2}\left(p + P^2 - \frac{q}{P}\right)$.
Damit lässt sich $Q \cdot R$ auf zwei Arten darstellen: $r = Q \cdot R = \frac{1}{4}\left(p + P^2 + \frac{q}{P}\right) \cdot \left(p + P^2 - \frac{q}{P}\right)$.

Ausmultiplizieren und Multiplizieren mit den Hauptnenner P^2 ergibt eine Gleichung 6. Grades für P: $P^6 + 2p \cdot P^4 + (p^2 - 4r) \cdot P^2 - q^2 = 0$.

Für die Variable $y := P^2$ ergibt sich eine Gleichung 3. Grades, welche die zugehörige „kubische Resolvente[6]" der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ heißt:
$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0$.

[6] Resolvente ist die zur Auflösung einer algebraischen Gleichung benötigte Hilfsgleichung.

Die kubische Resolvente hat nach den Cardanoschen Formeln drei Lösungen, die zu sechs Lösungen $\pm P_1, \pm P_2$ und $\pm P_3$ der Gleichung $P^6 + 2pP^4 + (p^2 - 4r)P^2 - q^2 = 0$ führen.

Aus der P-Lösung ergeben sich mit den Gleichungen
$R = \frac{1}{2}\left(p + P^2 + \frac{q}{P}\right)$ und $Q = \frac{1}{2}\left(p + P^2 - \frac{q}{P}\right)$
die zugehörige R- und Q-Lösung, und man hat das Polynom 4. Grades von der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ in ein Produkt zweier quadratischer Polynome zerlegt:
$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + Pz + Q) \cdot (z^2 - Pz + R)$.

Mit den je zwei bekannten Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen kommt man zu den vier Lösungen der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.
Nimmt man eine andere P-Lösung, so kommt man möglicherweise zu einer anderen Zerlegung in quadratische Faktoren der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$. Aber man erhält natürlich die vier gleichen Lösungen.

Für den praktischen Gebrauch sind die Formeln für den Fall n = 4 noch untauglicher, als die Formel für den Fall n = 3.
Viele CAS haben Lösungsformeln für algebraische Gleichungen vom Grad n = 2, 3, 4 implementiert. (vgl. Henn 2003: 126-135)

Die Nichtauflösbarkeit für n ≥ 5
Die allgemeine Gleichung n-ten Grades für n ≥ 5 ist nicht durch Radikale lösbar (Abelsche Satz), den Beweis dieser Behauptung liefert die Galoistheorie, die eine Verbindung zwischen den Zwischenkörpern algebraischer Körpererweiterungen K eines Körpers k und den Untergruppen der Automorphismengruppe G = Aut(K/k) (die Körperautomorphismen von K, die k elementweise festlassen) herstellt.
Erinnerung: Ein Automorphismus von K ist ein Körperisomorphismus K → K.

Die Körper, die im Folgenden betrachtet werden, sind Teilkörper von $\mathbb{C}$.
Es würde ausreichen, dass die Körper die Charakteristik Null haben. Denn als Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ haben alle dieselbe Charakteristik wie $\mathbb{Q}$, also Charakteristik Null.

Nun zu den Körpererweiterungen K/k: Im einfachsten Fall ist k der kleinste Körper, der die Koeffizienten einer polynomialen Gleichung f(x) = 0 enthält und K ist der Körper, der eine oder alle Lösungen dieser Gleichungen enthält. Definitionsgemäß sind dann die Lösungen algebraisch über k. Setzt man $k \leq \mathbb{C}$ voraus, ist die Existenz solcher Lösungen und dadurch von $K \leq \mathbb{C}$ über den Fundamentalsatz der Algebra gesichert.

Sei $f(x) \in k[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n > 1, wir wissen schon aus dem Satz 5 d), dass f(x) dann sogar separabel ist (d.h. es hat nur einfache Nullstellen).
Zu k gibt es einen echten Erweiterungskörper L, in dem f(x) eine Nullstelle hat:
Wenn $k \leq \mathbb{C}$ ist, so hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom (auch f(x)) mindestens eine Nullstelle α und $L = k(\alpha)$ ist der kleinste Erweiterungskörper von k, der α enthält. Wenn man L als k-Vektorraum betrachtet, sind wegen der Irreduzibilität von f(x) die Elemente 1, α, α^2, …,α^{n-1} linear unabhängig über k und das letzte Element α^n hängt von ihnen durch den Term f(x) linear ab, und zwar so dass sie sogar eine Vetorraum-Basis bilden. Für den Körpergrad gilt: [L : k] = n.
Man kann $L = k(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$ schreiben.
Nach dem Satz 5 a) lässt sich im Polynomring L[x] der Linearfaktor (x- α) ausklammern und es gilt daher: f(x) = (x- α)f_1(x).

Wenn man dieses Verfahren mehrfach anwendet, so erhält man eine Körperkette:
$L_1 = k(\alpha_1)$ mit f(x) = (x- α_1)f_1(x) in L_1[x],
$L_2 = L_1(\alpha_2)$ mit f(x) = (x- α_1)(x- α_2)f_2(x) in L_2[x],
⋮
$L_n = L_{n-1}(\alpha_n)$ mit f(x) = a_n(x- α_1)…(x- α_n) in L_n[x].

Die Körper L_i müssen nicht verschieden sein, da in einem der Körper L_i mehrere Nullstellen von f(x) hinzukommen könnten, es hat nur der erste Schritt L_1 über k den Körpergrad n, wegen der Irreduzibilität von f(x).
Es gibt aber in jedem Fall einen Zerfällungskörper K = L_n, in dem f(x) in Linearfaktoren zerfällt, dieser ist als kleinste Körpererweiterung von k, die alle Nullstellen von f enthält, bis auf Isomorphie eindeutig.
Der Zerfällungskörper von f(x) lässt sich schreiben als K = k(α_1, α_2, …,α_n), dabei sind α_1, α_2, …,α_n die n verschiedenen Nullstellen des irreduziblen Polynoms f.

Im Folgenden wird der Satz vom primitiven Element benötigt (er wird nur verwendet und nicht begründet):

Satz 7. Sei K/k eine endliche und separable Körpererweiterung. Dann gibt es ein sogenanntes primitives Element z ∈ K mit K = k(z).

Seine Kernaussage ist also, dass sich K sogar von einem einzigen Element erzeugen lässt, also: K = k(β) mit g(β) = 0, g(x) ∈ k[x] ist irreduzibel vom Grad m ≥ n und [K : k] = deg g(x) = m.

Wegen k ≤ L_1 ≤ K und der „Körpergradformel[7]" ist n ein Teiler von m.

Hier: $\underbrace{[K:k]}_{=m} = [K:L_1]\cdot \underbrace{[L_1:k]}_{=n}$.

Die Elemente $\beta^0, \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{m-1}$ sind eine (Vektorraum-)Basis von K/k, jedes Element z ∈ K lässt sich schreiben als $z = \sum_{i=0}^{m-1} b_i\beta^i$ mit $b_i \in k$.

Der Zerfällungskörper K eines Polynoms ist *normal*, d.h. jedes Polynom aus k[x], das in K mindestens eine Nullstelle hat, zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren.

Nun zu den relativen Automorphismen von K über k, d.h. Körperautomorphismen von K, die jedes Element von k fest lassen (Automorphismen von K über k):

K sei der Zerfällungskörper K = k(β) zu dem irreduziblen Polynom g(x) mit der Eigenschaft g(β) = 0 (wie oben), mit Nullstellen β_j.

Es gilt, dass für jedes j = 1, …,m durch K → K, $z = \sum_{i=0}^{m-1} b_i\beta^i \longmapsto \sum_{i=0}^{m-1} b_i\beta_j^i$, ein Automorphismus von K über k definiert wird, es gibt mindestens m verschiedene solche Automorphismen.

Die Automorphismen von K über k bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung (*Automorphismengruppe Aut(K/k)*): Aut(K/k) = {σ ∈ Aut(K)| $\forall c \in k: \sigma(c) = c$}.

Ich begründe das kurz:

Die Identitätsabbildung i: K → K liegt in Aut(K/k), d.h. Aut(K/k) ≠ ∅. Die Abbildung i ist das neutrale Element. Sind σ, τ ∈ Aut(K/k), so ist auch deren Verknüpfung $\sigma \circ \tau$ ∈ Aut(K/k), d.h. Aut(K/k) ist abgeschlossen. Die Verknüpfung von Funktionen ist assoziativ.

[7] Seien k, K und L Körper mit $k \subset K \subset L$. Sind [K : k] und [L : K] endlich, so ist auch L eine endlich-dimensionale Erweiterung von k und es gilt: [L : k] = [L : K] · [K : k].

Jede bijektive Funktion hat ein Inverses: Ist $\sigma: K \to K \in$ Aut(K/k), dann ist auch σ^{-1} ein Isomorphismus von K nach K. $\sigma^{-1}(c) = c \ \forall c \in k$, also ist σ^{-1} Aut(K/k).

Ist jetzt $\sigma \in$ Aut(K/k), so lässt σ das Polynom g(x) fest. Also muss σ die Zahl $\beta = \beta_1$ auf eine andere Nullstelle β_j von g(x) abbilden und ist damit ein Automorphismus der gerade beschriebenen Art.

Auf diese Weise hat man schon ganz Aut(K/k) gefunden und $|\mathrm{Aut}(K/k)|$ = [K : k] = m.

Jeder Automorphismus $\sigma \in$ Aut(K/k) lässt auch das Ausgangspolynom f(x), als dessen Zerfällungskörper wir K gewonnen hatten, fest, er führt also die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von f(x) ineinander über. Lässt σ alle n Nullstellen fest, so ist σ notwendig die identische Abbildung auf K. Aut(K/k) operiert also treu auf der Menge $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ und jedes σ ist eindeutig als Permutation der Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmt.

Das heißt: G = Aut(K/k) $\leq \mathbb{S}_n$[8] lässt sich als Untergruppe der symmetrischen Gruppe von n Elementen darstellen.
Die Automorphismengruppe G heißt *Galoissche Gruppe* des Zerfällungskörpers K von f(x) (oder des irreduziblen Polynoms f(x) bzw. der Gleichung f(x) = 0).

Bemerkung: Ist K eine endlich-dimensionale, normale, separable Körpererweiterung des Körpers k, so sagt man, dass K *galoissch* ist über k.

Satz 8. Hauptsatz der Galoistheorie
K/k sei endlich-dimensionale, normale Körpererweiterung, genauer sei K Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms f(x) $\in$ k[x]. G = Aut(K/k) sei die zugehörige Galoisgruppe. Dann entsprechen die Zwischenkörper Z mit k $\leq$ Z $\leq$ K umkehrbar eindeutig den Untergruppen von G.

Genauer gelten die folgenden Beziehungen:

- Für jeden Zwischenkörper Z ist Aut(K/Z) = $\{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a, \forall a \in Z\}$ eine Untergruppe von G mit $|\mathrm{Aut}(K/Z)|$ = [K : Z].

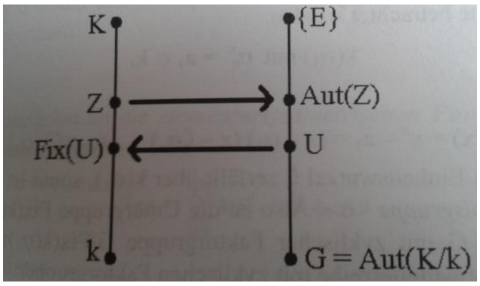
[8] $\mathbb{S}_n$ ist Gruppe, die aus allen Permutationen einer n-elementigen Menge besteht.

- Für jede Untergruppe U ≤ G ist Fix(U) := {a ∈ K| $\sigma(a) = a, \forall\sigma \in U$} ein Zwischenkörper mit k ≤ Fix(U) ≤ K und $|U|$ = [K : Fix(U)].
  Der Zwischenkörper Fix(U) wird *Fixkörper* der Untergruppe U von G genannt.

- Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Zwischenkörper der Erweiterung und den Untergruppen der Galoisgruppe:
  Die Abbildungen Aut(*): {Zwischenkörper} → {Untergruppen} und
  Fix(*): {Untergruppen} → {Zwischenkörper} sind bijektiv und zueinander invers, d.h. es gilt: Fix(Aut(K/Z)) = Z, ∀ Z mit k ≤ Z ≤ K und Aut(K/Fix(U)) = U, ∀ U ≤ G.

- Die Inklusionsbeziehungen werden umgedreht:
  Aus k ≤ $Z_1 \leq Z_2$ ≤ K folgt Aut(K/Z_1) ≥ Aut(K/Z_2),
  aus {e} ≤ $U_1 \leq U_2$ ≤ G folgt Fix(U_1) ≥ Fix(U_2).

- Die Normalteiler von G entsprechen umkehrbar eindeutig den Zwischenkörpern Z, die selbst über k galoissch sind:
  Ist N ⊲ G Normalteiler, so ist Fix(N) galoissch über k mit der Faktorgruppe G/N als Galoisgruppe. Ist Z über k galoissch, so ist Aut(K/Z) ⊲ G mit G/Aut(K/Z) ≅ Aut(Z/k).



(Henn 2003: 149)

Der Hauptsatz der Galoistheorie ermöglicht einem, anstatt Zwischenkörper von K und k zu finden (was sehr kompliziert ist), Untergruppen einer endlichen Gruppe zu bestimmen.

Mit Hilfe der Galoistheorie lässt sich nun die Nichtauflösbarkeit (durch Radikale) der allgemeinen Gleichungen n-ten Grades für n ≥ 5 beweisen.

Was versteht man unter einer „Lösungsformel aus Wurzelausdrücken“?

Definition 29. K heißt *Radikalerweiterung* von k, wenn es Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in$ K mit Exponenten $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:
K = $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit ${\alpha_1}^{n_1} \in k, {\alpha_i}^{n_i} \in k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ für i = 2, …,r.
Anders gesagt: Ein Körper K heißt Radikalerweiterung des Körpers k, falls eine Kette $k = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_t = K$ von Körpern existiert, sodass ∀ i = 1, …, t gilt:
$Z_i = Z_{i-1}(u_i)$ und eine Potenz von u_i liegt in Z_{i-1}.
Eine Gleichung f(x) = 0 mit f(x) ∈ k[x] heißt *durch Radikale auflösbar*, wenn der Zerfällungskörper K von f(x) eine Radikalerweiterung ist.
Diese rein körpertheoretischen Eigenschaften von K über k hängen nun via Galoistheorie von der rein gruppentheoretischen Eigenschaft „Auflösbarkeit" ab:

Definition 30. Eine endliche Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Reihe von Normalteilern G = $N_1 \rhd N_2 \rhd \cdots \rhd N_s = \{e\}$ derart gibt, dass die Faktorgruppen N_i/N_{i+1} für jedes i = 1, ... s-1 kommutativ sind.
Ist G auflösbar, so lässt sich jede solche Reihe vereinfachen zu der bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmten *Kompositionsreihe*, bei der alle Faktorgruppen sogar zyklisch vom Primzahlgrad sind.

Den gesuchten Zusammenhang liefert der folgende Satz:
Satz 9. Die Gleichung f(x) = 0 mit irreduziblen Polynom f(x) ∈ k[x] ist genau dann durch Radikale lösbar, wenn die Galoisgruppe G des Zerfällungskörpers von f(x) auflösbar ist.

Beweisidee: Zur technischen Erleichterung wird vorausgesetzt, dass k die $|G|$-ten Einheitswurzeln enthält.
„⇒" Sei nun K über k eine Radikalerweiterung, deren erste beiden Schritte betrachtet werden: $k(\alpha_1)$ mit ${\alpha_1}^n = a_1 \in k$.
Das Polynom $f_1(x) = x^n - a_1 = (x - \alpha_1) \cdot (x - \xi\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \xi^{n-1}\alpha_1)$ mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel ξ zerfällt über $k(\alpha_1)$, somit ist $k(\alpha_1)$ über k galoissch mit einer zyklischen Galoisgruppe $< \sigma >$. Also ist die Untergruppe Fix($k(\alpha_1)$) der Galoisgruppe von K ein Normalteiler von G mit zyklischer Faktorgruppe G/Fix($k(\alpha_1)$). Die Fortsetzung des Verfahrens liefert eine Normalteilerreihe mit zyklischen Faktorgruppen.

„⇐" Umgekehrt sei nun G = Aut(K/k) auflösbar mit Kompositionsreihe
$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_s = \{e\}$.

Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gehört hierzu eine Zwischenkörperkette:
$k = Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_s = K$ mit Z_i über Z_{i-1} galoissch mit Galoisgruppe
Aut(Z_i/Z_{i-1}) $\cong G_{i-1}/G_i \cong \mathbb{Z}_{p_i}$ für i = 2, …, s und mit Primzahlen p_i.

Jetzt fehlt noch der Nachweis, dass sich die Erweiterung Z_i über Z_{i-1} als
$Z_i = Z_{i-1}(\alpha_i)$, ${\alpha_i}^{p_i} = a_i$ und $a_i \in Z_{i-1}$ erzeugen lässt. Dies folgt aus dem Hilfssatz:

Satz 10. Ist K über k zyklisch, d.h. galoissch mit G = Aut(K/k) ≅ <σ> ≅ $\mathbb{Z}_n$, so existiert ein erzeugendes Element β mit K = k(β), $\beta^n = b \in k$.

<u>Beweis:</u> Sei α irgendein erzeugendes Element mit K = k(α). Wegen der vereinfachten Voraussetzung enthält k die n-ten Einheitswurzeln; ξ sei eine primitive n-te Einheitswurzel.
Für i = 0, …, n-1 wird die Zahl $\alpha_i \coloneqq \sigma^i(\alpha)$ definiert. Nach einer Idee von Lagrange setzt man $\beta \coloneqq \alpha_o + \xi\alpha_1 + \xi^2\alpha_2 + \ldots + \xi^{n-1}\alpha_{n-1}$.
Man rechnet nach, dass gilt:
$\sigma(\beta) = \alpha_1 + \xi\alpha_2 + \cdots + \xi^2\alpha_3 + \cdots + \xi^{n-1}\alpha_n =$
$= \xi^{-1}(\alpha_o + \xi\alpha_1 + \xi^2\alpha_2 + \ldots + \xi^{n-1}\alpha_{n-1}) = \xi^{-1}\beta$
also auch $\sigma^i(\beta) = \xi^{-i}\beta \neq \beta$ für i = 1, …, n-1 und erstmals $\sigma^n(\beta) = \xi^{-n}\beta = \beta$.
Also erzeugt die Zahl β den Körper K.
Wegen $\sigma(\beta^n) = (\sigma(\beta))^n = \xi^{-n}\beta^n = \beta^n$ muss $\beta^n \in k$ sein und β erfüllt die behauptete Gleichung $\beta^n = b \in k$. Somit ist sowohl der Satz als auch der vorherige Satz bewiesen.

Einschub: Elementarsymmetrische Funktionen:
Zerfällt das o.B.d.A. normierte Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n = 1$ in seinem Zerfällungskörper in $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ so erhält man durch Ausmultiplizieren:
$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$
$a_{n-2} = +(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$
$\vdots$
$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$.

Die Koeffizienten der Gleichung sind bis auf das Vorzeichen gerade die elementarsymmetrischen Funktionen $s_k \coloneqq \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k}$ für k = 1, …, n.
Für n = 2 steht hier der in der Schule behandelte Satz von Vieta.

Wenn f(x) irreduzibel und K sein Zerfällungskörper ist, dann permutieren die Automorphismen der Galoisgruppe die Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und lassen daher die elementarsymmetrischen Funktionen dieser Nullstellen elementweise fest.

Dies nutzt man aus, um zu zeigen, dass die sogenannte „allgemeine“ Gleichung n-ten Grades $(n \geq 1)$ die volle $\mathbb{S}_n$ als Galoisgruppe hat:
Seien $y_1, \dots, y_n$ genau n über k algebraisch unabhängige transzendente Elemente und $f(x) \coloneqq (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_n) \in k(y_1, \dots, y_n)[x]$ das (auf höchsten Koeffizienten 1 normierte) „allgemeine Polynom n-ten Grades“.
Man soll sich konkret k = $\mathbb{Q}$ und $y_1, \dots, y_n$ transzendente Zahlen aus $\mathbb{C}$ vorstellen, die über $\mathbb{Q}$ unabhängig sind. Man bildet die „elementarsymmetrischen Funktonen“:
$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}, 1 \leq k \leq n.$
Damit kann man schreiben: $f(x) = x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} \pm \dots + (-1)^n s_n$.
Nach Definition ist das Polynom separabel.

Mit den Definitionen $\check{k} \coloneqq k(s_1, \dots, s_n)$ und $K \coloneqq k(y_1, \dots, y_n)$ gilt, dass K der Zerfällungskörper von f(x) über $\check{k}$ ist und dass K über $\check{k}$ galoissch mit der vollen $\mathbb{S}_n$ als Galoisgruppe ist. Jede Permutation der Elemente $y_1, \dots, y_n$ definiert einen Automorphismus über K. Da hierbei die elementarsymmetrischen Funktionen $s_1, \dots, s_n$ alle unverändert bleiben, bleibt auch $\check{k}$ elementweise unverändert. Damit ist gezeigt, dass es für jedes n Polynome gibt, deren Galoisgruppe die $\mathbb{S}_n$ ist.

Die Nichtauflösbarkeit der $\mathbb{S}_n$ für n ≥ 5 folgt aus der Tatsache, dass ihr einziger nichttrivialer Normalteiler die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_n$[9] ist.
Die Kompositionsreihen der symmetrischen Gruppen $\mathbb{S}_n$ für n = 2, 3, 4 sind:
$\mathbb{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \rhd_2 \{e\}$
$\mathbb{S}_3 \rhd_2 \mathbb{A}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rhd_3 \{e\}$
$\mathbb{S}_4 \rhd_2 \mathbb{A}_4 \rhd_3 \mathbb{V}_4 \rhd_2 \mathbb{Z}_2 \rhd_2 \{e\}$
Dabei ist $\mathbb{V}_4$ die Kleinsche Vierergruppe[10].

Die algebraischen Gleichungen vom Grad 2, 3, 4 sind also durch Radikale auflösbar.

[9] $\mathbb{A}_n$ besteht aus allen geraden Permutationen einer n-elementigen Menge.
[10] Die Kleinsche Vierergruppe ist die kleinste nicht zyklische Gruppe.

Dagegen ist für $n \geq 5$ wegen der Einfachheit der alternierenden Gruppe $\mathbb{A}_n$:

$\mathbb{S}_n \rhd_2 \mathbb{A}_n \rhd_m \{e\}$ mit Index $m := \frac{n!}{2}$ die einzige Kompositionsreihe.

Weil dieser Index m für $n \geq 5$ keine Primzahl ist, sind die algebraischen Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ nicht mehr durch Radikale auflösbar. (vgl. Henn 2003: 138-152)

Der Fundamentalsatz der Algebra (FSA)

Dieser Satz garantiert für alle algebraischen Gleichungen die Existenz von Lösungen in $\mathbb{C}$ (dadurch hat er die allgemeine Anerkennung der komplexen Zahlen stark gefördert).

Für den FSA existieren verschiedene äquivalente Formulierungen:

-Jedes nichttriviale Polynom aus $\mathbb{C}[x]$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

-Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom aus $\mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren.

-$\mathbb{C}$ hat keinen echten algebraischen Erweiterungskörper.

-$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Aus dem FSA ergeben sich einige wichtige Folgerungen:

- Jede algebraische Gleichung vom Grad n hat n Lösungen aus $\mathbb{C}$. Diese müssen nicht notwendig verschieden sein.
- Jedes Polynom f(x) aus $\mathbb{R}[x]$ kann über $\mathbb{R}$ in quadratische und lineare Faktoren zerlegt werden.

Zum FSA gibt es mehrere Beweise. Ich sehe mir hier den Beweis an, der mit Hilfe der Galoistheorie skizziert wird.

<u>Galoistheoretischer Beweis des FSA</u>

Hiermit wird der FSA in der Formulierung „$\mathbb{C}$ hat keinen echten algebraischen Erweiterungskörper“ bewiesen.

Zuerst braucht man zwei Vorbemerkungen:

1. Es gibt keine quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{C}$.

Diese Bemerkung ist klar, da nach der „Mitternachtsformel“ jede quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ Lösungen hat.

2. Es gibt keine Erweiterungen K von $\mathbb{R}$ ungeraden Grades.

Diese Bemerkung folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, es gibt also für ungerades $n > 1$ keine über $\mathbb{R}$ irreduziblen Polynome vom Grad n.

Sei nun K der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms über $\mathbb{C}$. Daher ist K über $\mathbb{C}$ galoissch. Wegen [$\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$] = 2 ist auch $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ galoissch und nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist also auch K über $\mathbb{R}$ galoissch. Es sei [K : $\mathbb{R}$] = $|\mathrm{Aut}(K/\mathbb{R})| = 2^m \cdot q$ und $2 \nmid q$. Nach der zweiten Vorbemerkung ist m > 0.
Jetzt benötigt man eine Aussage des Satzes von Sylow. Dieser Satz beschäftigt sich mit den p-Sylowgruppen. Das sind Untergruppen der Ordnung p^m einer endlichen Gruppe der Ordnung $p^m \cdot n$, wobei $p \nmid n$ gilt, d.h. Untergruppen der höchsten möglichen Potenzordnung der Primzahl p. Eine der Aussagen ist, dass es für jeden Primteiler p der Gruppenordnung (mindestens) eine p-Sylowgruppe gibt.

Hier gibt es also eine Untergruppe $U \leq \mathrm{Aut}(K/\mathbb{R})$ mit $|U| = 2^m$. Dann gibt es aber auch einen Zwischenkörper Z mit Aut(K/Z) = U, also mit [Z : $\mathbb{R}$] = q, was für q > 1 ein Widerspruch zur zweiten Vorbemerkung ist. Folglich ist q = 1 und [K : $\mathbb{R}$] = 2^m.
Jetzt ist aber K über $\mathbb{C}$ galoissch mit dem Körpergrad [K : $\mathbb{C}$] = 2^{m-1}.
Jede Gruppe der Primpotenz-Ordnung p^s, also mit p Primzahl und s ∈ $\mathbb{N}$, hat (mindestens) eine Untergruppe der Ordnung p^{s-1}.
Auf diesen Fall angewandt gibt es für m – 1 ≥ 2 eine Untergruppe der Ordnung 2^{m-2}, was zu einem weiteren Zwischenkörper F mit [K : F] = 2^{m-2} führen würde.
Dies ist aber in der ersten Vorbemerkung nicht möglich, denn nach dieser ist der Fall m – 1 = 1 unmöglich. Also ist m – 1 = 0 und K ist gleich $\mathbb{C}$. Insgesamt folgt, dass es überhaupt keinen endlich-algebraischen Erweiterungskörper von $\mathbb{C}$ gibt.

7 Erkenntnisse im Algebraunterricht

Das Lehren von Kalkülen - ein sehr zentraler Aspekt des Algebraunterrichts - vermittelt den SchülerInnen das Gefühl, dass es in der Mathematik hauptsächlich um Verfahren geht, die nach bestimmten Regeln durchzuführen sind.
Für die SchülerInnen besteht der Wert der Algebra vor allem in der Wirksamkeit ihrer Verfahren. Der Nutzen steht sowohl innerhalb der Mathematik und ihrer Anwendungen als auch im Hinblick auf das schulische Weiterkommen der SchülerInnen im Vordergrund.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 267)

7.1 Sätze im Algebraunterricht

In Axiomen und Sätzen zeigen sich die mathematischen Erkenntnisse. Die Sätze haben unterschiedliches Gewicht, zum Beispiel gilt ein Hauptsatz als ein besonders wichtiger Satz.
In der Geometrie spricht man von Sätzen (z.B. Satz des Pythagoras), im Algebraunterricht aber eher von Regeln bzw. Formeln (z.B. binomische Formeln).
Die Regeln über die Multiplikation von Summen (z.B. (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd) sind die ersten, die im Unterricht im Zusammenhang mit den rationalen Zahlen bewiesen werden. Aufgrund der häufigen Verwendung und des Gewichts der binomischen Formeln, lässt es sich rechtfertigen, sie als Satz aufzuschreiben:

Satz In $\mathbb{Q}$ gelten die binomischen Formeln:
1) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$
2) $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$
3) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$
Diese ergeben sich im Unterricht aus Herleitungen, in dem man zum Beispiel schaut, was sich aus (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd für den Spezialfall (a + b)(a + b) ergibt. Verallgemeinerungen führen zu neuen Formeln.

Beweise sind bei den SchülerInnen nicht sehr beliebt, denn sie verlangen einiges an Einsicht und Anforderungen an die SchülerInnen:
<u>1. Erkennen der Beweisbedürftigkeit:</u> Manche Regeln und Formeln sind so offensichtlich, dass die Notwendigkeit eines Beweises gar nicht gesehen wird. Weiters gibt es Sätze, die sich aus Herleitungen ergeben.

In diesem Fall sollte man zumindest deutlich machen, dass man mit den jeweiligen Überlegungen den Satz bewiesen hat.
Mathematische Sachverhalte werden oft auch anschaulich vorbereitet, wie zum Beispiel die Veranschaulichung der binomischen Formeln durch Flächeninhalte von Rechtecken und Quadraten. Beweise sollen Einsichten in die durch sie bewiesenen Sätze vermitteln. Die Formeln der Algebra sind oft Verallgemeinerungen, es ist also wichtig, den SchülerInnen bewusst zu machen, dass das Problem in dem „Für alle…“ liegt.
(vgl. Vollrath et al. 2007: 268-277)

Vollrath erläutert dazu: „Die Schüler sollten erkennen, dass der Sinn des Beweisens in der Sicherung der Wahrheit einer mathematischen Aussage liegt.“ (Vollrath et al. 2007: 277)

2. Bewusstsein der Hierarchie von Einsichten: Das Beweisen setzt ein Bewusstsein von der Hierarchie der Einsichten voraus und trägt auch zu dieser Bewusstseinsbildung bei.

3. Formalisierungsfähigkeit: Die Ausprägung der Formalisierungsfähigkeit ist variabel. In der Schule soll man das Formalisierungsniveau der psychologischen Entwicklung der SchülerInnen anpassen.

4. Kenntnis logischer Regeln: Kinder sind bereits sehr früh in der Lage, logisch richtig zu argumentieren. Gewisse Schlussweisen müssen die SchülerInnen natürlich erst lernen, wie zum Beispiel den indirekten Beweis oder die vollständige Induktion.
Die Entwicklung der Argumentationsfähigkeit ist ein durchaus wichtiges Lernziel des Mathematikunterrichts.

5. Heuristische Fähigkeiten: Die heuristischen Fähigkeiten können in der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen geschult werden.

Beweise sind ein wichtiger Bestandteil für das Verständnis der Algebra. Ziel dabei ist, dass die SchülerInnen selbst das Beweisen lernen. (vgl. Vollrath et al. 2007: 277-279)

7.2 Begriffsbildung im Algebraunterricht

Verschiedene Begriffe bilden sich im Laufe des Algebraunterrichts heraus, wie zum Beispiel der Zahlbegriff, der Funktionsbegriff usw.

Die SchülerInnen sollen den Eindruck vermittelt bekommen, dass diese Begriffsbildungen nicht abgeschlossen sind, dass man immer weiter an den Begriffen arbeiten kann und Neues schaffen.
Zu den grundlegenden Begriffen Zahl, Verknüpfung, Term, Funktion und Gleichungen lernen die SchülerInnen viele Unterbegriffe (z.B. Primzahl, kommutative Verknüpfung, quadratischer Term, lineare Gleichung, Potenzfunktion). Diese Begriffe werden durch Definitionen gelernt.

Für **das Lernen der Begriffe aus Definitionen** braucht es folgende Fähigkeiten:
1. Erkennen des Wesens von Definitionen: Definitionen legen Begriffe fest und man kann ihnen die notwendigen Informationen über den Begriff entnehmen. Hier müssen die SchülerInnen zwischen dem definierten Begriff und der definierenden Eigenschaft unterscheiden können.

2. Erkennen des Begriffsinhalts: Die definierende Eigenschaft ist der Inhalt des Begriffs. Einen Begriff kann man nur dann verstehen, wenn man seinen Inhalt erfasst.

3. Einschlägiges Vorwissen: Das Verstehen der algebraischen Formelsprache wird vorausgesetzt.

4. Erkennen des Begriffsumfangs: Es ist schwierig, den Umfang (d.h. die Menge der Objekte, die unter einen Begriff fallen, z.B. Umfang des Begriffs Primzahl: {2, 3, 5,…}) eines Begriffs zu überblicken.

5. Argumentationsfähigkeit: Der Nachweis, dass ein Objekt unter einen bestimmen Begriff fällt, erfordert einen Beweis, in dem gezeigt wird, dass das Objekt die definierende Eigenschaft besitzt.

6. Begriffshierarchie: Neue Begriffe werden einem Begriffsnetz hinzugefügt, dafür sollen die SchülerInnen zwischen dem neuen Begriff und den anderen Begriffen Verknüpfungen herstellen.

7. Routinen zur Aneignung eines Begriffs**:** Die SchülerInnen sollen sich selbst Routinen aneignen, mit denen sie gut die Begriffe nach Definitionen lernen können.

8. Definieren können: Die SchülerInnen sollen nicht nur Begriffe nach Definitionen lernen, sondern auch versuchen, selbst Definitionen bekannter Begriffe zu bilden.

Eine Definition führt erst durch intensivere Betrachtungen zum Verständnis. Im Mathematikunterricht kann man die Begriffsbildungsprozesse in Problemzusammenhänge einbetten. (vgl. Vollrath et al. 2007: 280-284)

7.3 Algebra als Theorie im Unterricht

Dazu führt Vollrath an: „Algebra ist seit den 1930er-Jahren Theorie der algebraischen Strukturen. Die in der Schule behandelten Zahlenbereiche und Funktionenmengen stellen zwar wichtige Modelle algebraischer Strukturen dar, liefern auch Muster für strukturelle Betrachtungen, die Strukturen selbst spielen jedoch im Unterricht kaum eine Rolle.“ (Vollrath et al. 2007: 288)

Definitionen, Sätze und Beweise sind in Theorien sehr eng miteinander verbunden.

Begriffe werden definiert, die Eigenschaften der Begriffe, sowie die Beziehung zwischen den Begriffen werden in Sätzen zum Ausdruck gebracht und diese werden unter Verwendung der definierenden Eigenschaften, bereits bewiesener Sätze und Axiome bewiesen.

Dieses theoretische Beziehungsgefüge muss mit den SchülerInnen erarbeitet werden. Toll ist es, wenn sich die Lehrenden auf das Abenteuer einer echten Theorieentwicklung mit den SchülerInnen einlassen, so können sie sich gegenseitig beraten, Hinweise geben und korrigieren. Dadurch vermeidet man das öde, starre Vorgehen das durch Theoriemuster ausgelöst wird. (vgl. Vollrath et al. 2007: 288f)

Mir ist aufgefallen, dass vor allem eher die lernschwachen SchülerInnen große Schwierigkeiten beim Beweisen haben und dass sie die Beweise lieber meiden wollen. Sie kommen mit dem doch sehr hohen Abstraktionsniveau nicht gut zurecht. Jedoch sind die guten SchülerInnen oft am Hintergrund einer Formel oder eines Satzes interessiert und wollen wissen, warum das so ist. Das trägt natürlich zu einem noch besseren Verständnis bei.

8 Resümee

Ich finde das Nachdenken über den Aufbau der Algebra in der Sekundarstufe sehr interessant. Ich habe mich dabei vor allem an das Buch von Vollrath und Weigand *Algebra in der Sekundarstufe*, sowie an meine eigenen Erfahrungen gehalten. Das Buch *Algebra in der Sekundarstufe* ist didaktisch gesehen wirklich super aufgebaut. Die Autoren weisen immer wieder auf typische Fehler und Lernschwierigkeiten der SchülerInnen hin, die auch mir schon sehr oft aufgefallen sind und sie gehen dabei auch auf Hinweise ein, wie man diesen Fehlern und Schwierigkeiten entgegenwirken kann bzw. wie man sie überwinden kann. Ich konnte für mich des Öfteren Vergleiche aufstellen, wie ich das in meinem Unterricht handhabe und wie es die Autoren vorschlagen.
Vollrath und Weigand diskutieren den Einsatz von graphikfähigen Taschenrechnern und Computern im Mathematikunterricht sehr ausführlich. Zu meiner Schulzeit spielten sämtliche Mathematikprogramme für Computer noch kaum eine Rolle, als Lehrerin bemühe ich mich nun aber sehr, Programme wie z.B. GeoGebra oder Excel in meinem Unterricht sinnvoll einzubauen. Dabei erlebe ich, dass die SchülerInnen sehr erfreut sind, wenn sie an Arbeitsaufwand einsparen können.

Bei einzelnen Themenbereichen der Algebra fiel es mir teilweise schwer, Verbindungen zur Hochschulmathematik herzustellen. Ich habe hierfür als Arbeitsgrundlage hauptsächlich die Skripten von Frau Prof. Dr. Baur und das Buch Elementare Geometrie und Algebra von Henn herangezogen. Diese Arbeitsunterlagen waren sehr hilfreich, sie brachten gute Anknüpfungspunkte und Erklärungen.
Ich habe festgestellt, dass teilweise viel Hochschulmathematik hinter der Algebra in der Sekundarstufe steckt. Bei den Termen konnte ich konkret keine Anknüpfungspunkte an die Hochschulmathematik finden, jedoch stehen die Terme ja eng in Verbindung mit Zahlen, Funktionen und Gleichungen, sodass sich dort ihre Anknüpfungspunkte wiederspiegeln.
Durch die Beschäftigung mit dieser Arbeit konnte ich wieder sehr viele neue Anregungen und Ideen für meinen Unterricht sammeln.
Alles in allem hat mir die tiefere Auseinandersetzung mit der Algebra in der Sekundarstufe viel Freude bereitet und das Schöne ist, dass von solchen Arbeiten auch der eigene Unterricht profitieren kann.
Abschließend möchte ich mich noch bei Frau Prof. Dr. Karin Baur bedanken, die mir während der Verfassung meiner Diplomarbeit immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden ist.

9 Literaturverzeichnis

Baur, Karin (2013): Algebra I (WS 2013). KFU Graz. (http://www.uni-graz.at/~baurk/lehre/WS2013-Alg-I/Skript.pdf)

Baur, Karin (2014): Einführung in die Algebra (SS 2014). KFU Graz. (http://www.uni-graz.at/~baurk/lehre/SS2014-EinfAlg/Skript-I.pdf)

Henn, Hans-Wolfgang (2003): Elementare Geometrie und Algebra. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH.

Mayr, Ernst (2010): Polynome. TU München. (http://wwwmayr.informatik.tu-muenchen.de/lehre/2010WS/ds/2010-12-07.pdf)

Vollrath, Hans-Joachim (1974): Didaktik der Algebra. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Vollrath, Hans-Joachim; Weigand, Hans-Georg (2007): Algebra in der Sekundarstufe. 3. Auflage. München: Elsevier GmbH.