Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 42

Übungsaufgaben

Aufgabe 42.1. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ definiert einen Endomorphismus $\mu_z \colon x \to zx$. Skizziere in der Ebene $\mathbb{C}$ diejenigen komplexen Zahlen mit der Eigenschaft, dass μ_z eine Isometrie, selbstadjungiert, eine selbstadjungierte Isometrie bzw. normal ist.

Aufgabe 42.2. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ definiert eine Streckung $\mu_z \colon v \to zv$ auf dem $\mathbb{C}^n$. Für welche Zahlen z handelt es sich dabei um eine Isometrie, einen selbstadjungierten Endomorphismus, einen normalen Endomorphismus?

Aufgabe 42.3. Wann ist eine Scherung $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf dem $\mathbb{R}^2$ ein normaler Endomorphismus?

Aufgabe 42.4. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus und

$$U \subseteq V$$

ein φ-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass auch die Einschränkung

$$\varphi|_U \colon U \longrightarrow U$$

normal ist.

Aufgabe 42.5. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Zeige, dass φ genau dann normal ist, wenn der adjungierte Endomorphismus $\hat{\varphi}$ normal ist.

Aufgabe 42.6.*

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{kern} \hat{\varphi}.$$

Aufgabe 42.7. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2, die zueinander orthogonal seien. Es seien

$$\varphi_1 \colon V_1 \longrightarrow V_1$$

und

$$\varphi_2 \colon V_2 \longrightarrow V_2$$

normale Endomorphismen und

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

die Summe davon. Zeige, dass auch φ normal ist.

Aufgabe 42.8. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass die Menge der normalen Endomorphismen von V keinen Untervektorraum in $\operatorname{End}(V)$ bilden.

Aufgabe 42.9. Die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

Aufgabe 42.10. Die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

Aufgabe 42.11.*

Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 3\mathrm{i} & 4 + 5\mathrm{i} \\ 11 - 3\mathrm{i} & 6 + 9\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 42.12. Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 - 5\mathrm{i} & 3 - 4\mathrm{i} & 1 + 5\mathrm{i} \\ 0 & 1 - \mathrm{i} & 2 + 9\mathrm{i} \\ 6 + 3\mathrm{i} & \mathrm{i} - 7 & -4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 42.13. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus und Ψ_φ die zugehörige Sesquilinearform im Sinne von Lemma 41.12. Wie verhält sich die beschreibende Matrix von φ zur Gramschen Matrix zu Ψ_φ? Welche Beziehung besteht zur Gramschen Matrix der Form Θ_φ, die durch

$$\Theta_\varphi(v, w) = \langle v, \varphi(w) \rangle$$

definiert wird.

Aufgabe 42.14.*

Es sei $X^2 + (3 - 2\mathrm{i})X - 6\mathrm{i}$ das charakteristische Polynom eines normalen Endomorphismus $\varphi \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Bestimme das charakteristische Polynom des adjungierten Endomorphismus $\hat{\varphi}$.

Aufgabe 42.15.*

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem fixierten Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Wir nennen eine Sesquilinearform Ψ auf V *orthogonalisierbar*, wenn es eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ (bezüglich des Skalarproduktes) von V mit

$$\Psi(u_i, u_j) = 0$$

für alle $i \neq j$ gibt. Zeige, dass bei der Korrespondenz

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{Sesq}(V),\ \varphi \longmapsto \Psi_\varphi,$$

die normalen Endomorphismen den orthogonalisierbaren Sesquilinearformen entsprechen.

Aufgabe 42.16. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Zeige, dass V eine Orthogonalbasis besitzt.

Aufgabe 42.17. Beweise den Trägheitssatz von Sylvester für eine komplex-hermitesche Form.

Aufgabe 42.18. Der $\mathbb{R}^4$ sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^4$ an, die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis ist.

Aufgabe 42.19. Der $\mathbb{R}^2$ sei (neben dem Standardskalarprodukt) mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Bestimme sämtliche Basen des $\mathbb{R}^2$, die bezüglich des Skalarproduktes eine Orthonormalbasis und bezüglich der Minkowski-Form eine Orthogonalbasis sind.

Aufgabe 42.20. Bestimme den Typ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -6 & 3-2\mathrm{i} & -1+3\mathrm{i} \\ 3+2\mathrm{i} & 1 & 5 \\ -1-3\mathrm{i} & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.21. (2 Punkte)

Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ beschrieben. Handelt es sich um einen normalen Endomorphismus?

Aufgabe 42.22. (2 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus. Zeige, dass auch $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ normal ist.

Aufgabe 42.23. (3 Punkte)

Entscheide, ob es für die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4+\mathrm{i} & 6-7\mathrm{i} & 6+3\mathrm{i} \\ 4-\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 5+3\mathrm{i} & 2\mathrm{i}-11 & 4+3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 42.24. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein normaler Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zeige, dass φ genau dann selbstadjungiert ist, wenn alle Eigenwerte von φ reell sind.

Aufgabe 42.25. (3 Punkte)

Bestimme den Typ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 3-\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ 3+\mathrm{i} & 2 & 7\mathrm{i} \\ -4-\mathrm{i} & -7\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$