Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 14

Die Transformationsformel für Integrale

KOROLLAR 14.1. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det (D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter achsenparalleler Quader. Dann gilt

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q |(J(\varphi))(x)| \, d\lambda^n.$$

Beweis. Da φ stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto j(x) = |(J(\varphi))(x)| = |\det (D\varphi)_x|\,,$$

stetig und daher nach Satz 36.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader Q. D.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $j(B(x,\delta)) \subseteq B(j(x),\epsilon)$ für alle $x \in Q$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass für alle kompakten Teilquader $K \subseteq Q$ mit maximaler Kantenlänge $\leq \tilde{\delta}$ das Bild $j(K)$ in einem abgeschlossenen Intervall der Länge 2ϵ liegt. Damit ist die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum von $\{j(x) \mid x \in K\}$ maximal gleich 2ϵ.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir unterteilen Q in k^n kompakte Teilquader, indem wir jede Quaderkante in k gleichlange Teile unterteilen, und wählen dabei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass die entstehenden k^n Teilquader die oben beschriebene Eigenschaft haben. Es sei I eine Indexmenge zu dieser Unterteilung, es ist also $Q = \bigcup_{i\in I} K_i$ und damit $\varphi(Q) = \bigcup_{i\in I} \varphi(K_i)$. Diese beiden Vereinigungen sind nicht disjunkt, jedoch sind die Schnittmengen der Quader nach Lemma 6.11 und die Schnittmengen der $\varphi(K_i)$ als Bilder von Quaderseiten nach Korollar 13.6 Nullmengen. Wir wenden Lemma 13.7 auf die Teilquader K_i an und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \lambda^n(K_i)\cdot \min\,(j(x), x\in K_i) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \sum_{i\in I}\lambda^n(\varphi(K_i)) \\ &\leq \sum_{i\in I}\lambda^n(K_i)\cdot \max\,(j(x), x \in K_i).\end{aligned}$$

Dabei ist die Differenz zwischen links und rechts durch

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) 2\epsilon \,=\, 2\epsilon\lambda^n(Q)$$

beschränkt, kann also durch $\epsilon \to 0$ beliebig klein gemacht werden. Die gleichen Abschätzungen gelten wegen der Monotonie des Integrals auch für das Integral $\int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$, so dass

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \,=\, \int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$$

gilt. □

Satz 14.2. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) \,=\, \det\,(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $S \subseteq G$ eine messbare Menge. Dann ist $\varphi(S)$ ebenfalls messbar und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(S)) \,=\, \int_S |J(\varphi)|\; d\lambda^n.$$

Beweis. Ein Diffeomorphismus und seine Umkehrabbildung sind stetig, daher liegt eine Bijektion der messbaren Teilmengen von G und von H vor. Wir betrachten die beiden Zuordnungen

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, S \longmapsto \int_S |J(\varphi)(x)|\; d\lambda^n(x),$$

also das Maß auf G mit der Dichte $|J(\varphi)(x)|$, und

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, S \longmapsto \lambda^n(\varphi(S)),$$

also das Bildmaß von λ^n unter der Umkehrabbildung φ^{-1}, und müssen zeigen, dass diese beiden Maße gleich sind. Nach Korollar 14.1 gilt die Gleichheit für alle kompakten achsenparallelen Quader. Aufgrund von Aufgabe 9.3 bzw. Korollar 13.6 gilt die Gleichheit auch für alle offenen bzw. „nach oben halboffenen“ achsenparallelen Quader, also Produkte von nach oben halboffenen Intervallen. Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von diesen zuletzt genannten Quadern bilden einen Mengen-Präring im $\mathbb{R}^n$. Diese Menge ist auch ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für das System der Borelmengen. Daher müssen nach Satz 3.7 die beiden Maße generell übereinstimmen. □

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale.*

Satz 14.3. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) \,=\, \det{(D\varphi)}_x$$

für $x \in G$. Es sei

$$f\colon\, H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f auf H genau dann integrierbar, wenn die Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi$ auf G integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_H f \, d\lambda^n \,=\, \int_G (f \circ \varphi)\, |J(\varphi)| \; d\lambda^n .$$

Beweis. Die Zuordnung $S \mapsto \lambda^n(\varphi(S))$ für messbare Mengen $S \subseteq G$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}(G)$ und zwar handelt es sich um das Bildmaß $\varphi_*^{-1}\lambda^n$ von λ^n unter der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon\, H \longrightarrow G.$$

Nach Satz 14.2 besitzt dieses Maß die Dichte $x \mapsto |(J(\varphi))(x)|$. Daher gilt nach Aufgabe 13.20 und der allgemeinen Transformationsformel

$$\begin{aligned}\int_G (f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)| \; d\lambda^n \;&=\; \int_G (f \circ \varphi)\, d(\varphi_*^{-1}\lambda^n)\\ &=\; \int_H (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})\, d\lambda^n\\ &=\; \int_H f \, d\lambda^n .\end{aligned}$$

□

Beispiele zur Transformationsformel

Wenn bei einem Diffeomorphismus der Betrag der Jacobi-Determinante überall 1 ist, so ist er maßtreu. Es ist einfach, maßtreue, nichtlineare Abbildungen zu konstruieren.

Beispiel 14.4. Es sei $h \in \mathbb{R}[y]$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen y. Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+h(y),y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von φ ist ja

$$\operatorname{Jak}(\varphi)_{(x,y)} \,=\, \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von x und y vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu $\varphi(x,y) = (x+y^2, y)$ und $\psi(x,y) = (x, y+x^3)$ die Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(x,y) &= \psi(\varphi(x,y)) \\ &= \psi\left(x+y^2,\, y\right) \\ &= \left(x+y^2,\, y+\left(x+y^2\right)^3\right) \\ &= \left(x+y^2,\, y+x^3+3x^2y^2+3xy^4+y^6\right).\end{aligned}$$

Korollar 14.5. *Es sei*

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei

$$f\colon\, H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Dann ist

$$\int_H f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot |r|\; d\lambda^2(r,\theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\, d\theta\, dr.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det\left(D\varphi\right)_{(r,\theta)} \;=\; \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} \;=\; r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \;=\; r$$

direkt aus Satz 14.3. □

Lemma 14.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 1.$$

Nennen wir dieses Integral I. Nach Korollar 13.2 ist

$$I^2 \;=\; \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ ist dieses Integral nach Korollar 14.5 und nach einer erneuten Anwendung von Korollar 13.2 gleich

$$= \;\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^2(r,\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{[0,2\pi]} 1\, d\lambda^1(\theta)\right)\left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, d\lambda^1(r)\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, d\lambda^1(r)\\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr\\
&= -e^{-\frac{r^2}{2}}|_0^\infty\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Damit ist auch $I = 1$. □

Beispiel 14.7. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned}
& f'(t)f'(t)+g'(t)g'(t)-r(g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t)) \\
= \;& 1-r(g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t)).
\end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s]\times[-a,a]} |1-r(g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t))| \, d\lambda^2 \, .$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t)| \;\leq\; \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 13.2 geich

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,s]\times[-a,a]} 1-r(g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t)) \, d\lambda^2 \\
= \;& 2as-\left(\int_{-a}^{a} r \, dr\right)\left(\int_0^s g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t) \, dt\right) \\
= \;& 2as-0\cdot\left(\int_0^s g''(t)f'(t)-f''(t)g'(t) \, dt\right) \\
= \;& 2as.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

Abbildungsverzeichnis