

AUTOMATENTHEORIE UND FORMALE SPRACHEN

Hausaufgabe 5

Aufgabe

Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, wie die Automaten für die Sprachen $L(R_1 + R_2)$, $L(R_1 \cdot R_2)$ und $L(R_1^*)$ systematisch aus den Automaten für die Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ konstruiert werden können.

$L(R_1 + R_2) =$ Vereinigung aus $L(R_1)$ und $L(R_2)$

Eine Vereinigung der endlichen Automaten zweier Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ impliziert, dass zwei Kanten vom Startzustand abgehen müssen, da so verhindert wird, dass die beiden Sprachen untereinander gemischt werden. Um eine korrekte Vereinigung zu gewährleisten, werden ϵ -Übergänge verwendet.

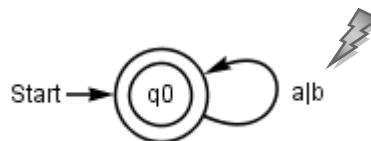
Das folgende Beispiel illustriert zunächst, warum das Zusammenführen der Startzustände zweier endlicher Automaten unter Umständen nicht ausreicht, um eine korrekte Vereinigung zu bewirken.

Beispiel: $L(a^* + b^*) =$ Vereinigung aus $L(R_1) = L(a^*)$ und $L(R_2) = L(b^*)$

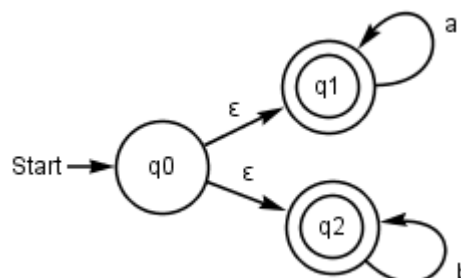
Die endlichen Automaten für die beiden Sprachen $L(a^*)$ und $L(b^*)$ sehen wie folgt aus:



Ein Automat, bei dem lediglich die Startzustände zusammengeführt werden, stellt jedoch nicht die Vereinigung aus $L(a^*)$ und $L(b^*)$, d.h. $L(a^* + b^*)$ dar, sondern erkennt vielmehr die Sprache $L((a + b)^*)$:

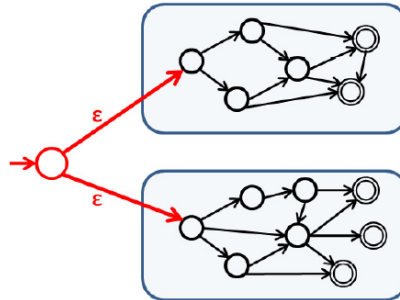


Um diese Option auszuschließen, wird daher ein neuer Startzustand eingefügt und durch zwei ϵ -Übergänge mit den vorherigen Startzuständen der Automaten der beiden Sprachen verbunden, so dass der folgende Automat entsteht:



Dieser Automat wäre nun imstande, sowohl die Sprache $L(a^*)$ als auch $L(b^*)$, jedoch keine Kette aus Elementen beider Sprachen, zu erkennen. Er stellt damit die korrekte Vereinigung $L(a^* + b^*)$ aus den beiden Sprachen dar.

Im Zuge der systematischen Konstruktion des endlichen Automaten für die Sprache $L(R_1 + R_2)$ muss daher ein neuer Startzustand eingefügt und dieser über ϵ -Übergänge mit den Startzuständen der Automaten der Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$ verbunden werden. Dieser Vorgang wird durch die folgende Abbildung veranschaulicht:



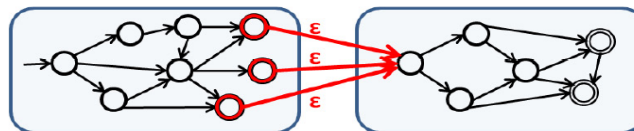
(Quelle: Vorlesungsskript, Folie 6)

$L(R_1 \bullet R_2)$ = Konkatenation aus $L(R_1)$ und $L(R_2)$

Um den Automaten einer Sprache $L(R_1 \bullet R_2)$, d.h. der Konkatenation zweier Sprachen $L(R_1)$ und $L(R_2)$, systematisch zu konstruieren, werden ϵ -Übergänge von allen Endzuständen des ersten zum Startzustand des zweiten Automaten ergänzt.

Entscheidend ist, dass sämtliche Endzustände des ersten Automaten nach erfolgter Konkatenation keine Endzustände mehr sind, denn nur so kann die Verkettung zweier Sprachen gewährleistet werden.

Die folgende Graphik stellt diesen systematischen Konstruktionsprozess bildlich dar:



(Quelle: Vorlesungsskript, Folie 7)

$L(R_1^*)$ = Kleenscher Stern für $L(R_1)$

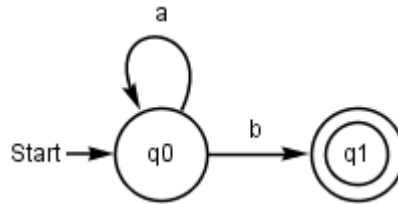
Die systematische Konstruktion eines Automaten für eine Sprache $L(R_1)$ mit Kleenschem Stern, d.h. $L(R_1^*)$, erfolgt durch die Generierung eines Kreislaufs.

Hierfür wird zunächst ein neuer Startzustand eingefügt, der auch gleichzeitig Endzustand ist, damit auch die leere Kette ϵ erkannt wird. Eine ϵ -Kante ist auf den bisherigen Startzustand gerichtet. Gleichzeitig weisen ϵ -Übergänge von den Endzuständen auf den neuen Startzustand.

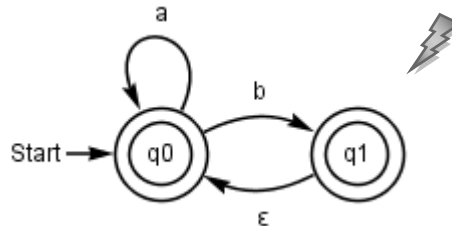
Das folgende Beispiel verdeutlicht, warum ein einzelner ϵ -Übergang vom Endzustand auf den bisherigen Startzustand nicht zum gewünschten Ergebnis führt.

Beispiel: $L((a^*b)^*)$ = Kleenscher Stern für $L(R_1) = L(a^*b)$

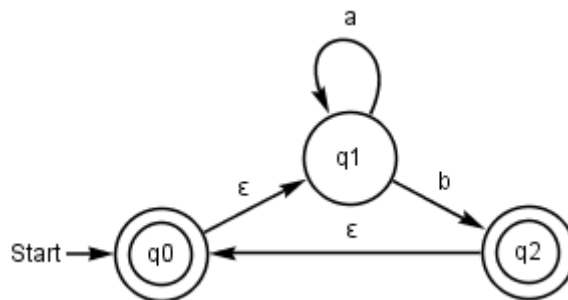
Der endliche Automaten für die Sprache $L(a^*b)$ sieht wie folgt aus:



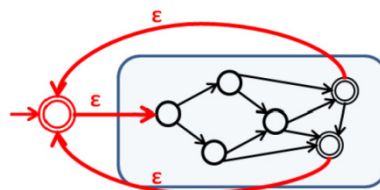
Ein Automat, bei dem lediglich ein einzelner ϵ -Übergang vom Endzustand auf den bisherigen Startzustand weist, der zudem zu einem Endzustand umgewandelt wird, erkennt jedoch die Sprache $L(a^*b^*)$ und nicht etwa $L((a^*b)^*)$:



Um dies zu verhindern, wird also ein neuer Startzustand eingefügt, der über eine ϵ -Kante auf den bisherigen Startzustand weist und auf den ein ϵ -Übergang vom Endzustand gerichtet ist. Der folgende Automat stellt somit die Sprache $L((a^*b)^*)$ dar:



Die systematische Konstruktion eines Automaten für eine Sprache mit Kleenschem Stern erfolgt daher durch das Hinzufügen eines neuen Startzustandes, der auch gleichzeitig Endzustand ist, durch einen ϵ -Übergang auf den bisherigen Startzustand verweist und auf den ϵ -Kanten von den Endzuständen des Automaten gerichtet sind. Dieser Sachverhalt wird durch die folgende Abbildung veranschaulicht:



(Quelle: Vorlesungsskript, Folie 8)