Quadratische Matrizen

sei jetzt $n = m$, $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \ldots, n$

Definition 2.3.2 *Eine quadratische Matrix A heißt* invertierbar *genau dann, wenn es eine quadratische Matrix B gibt, so dass gilt*

$$AB = BA = I.$$

In diesem Fall heißt B inverse Matrix *zu A.*

Beispiele : **(a)** Für $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ist $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ inverse Matrix, denn

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn für jede Matrix $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ gilt

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} + 2d_{21} & d_{12} + 2d_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I$$

Satz 2.3.3 *Sind B und C inverse Matrizen zu A, so folgt $B = C$.*

Beweis : Def. 2.3.2 $\curvearrowright$ $AB = BA = I = AC = CA \underset{\text{Satz 2.3.1}}{\Longrightarrow} C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$

$\square$

Bezeichnung: Die (eindeutig bestimmte) inverse Matrix zu A wird mit A^{-1} bezeichnet, für sie gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Beispiel : sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0 \curvearrowright A^{-1}$ existiert, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Satz 2.3.4 **(i)** *Seien A und B invertierbare (quadratische) Matrizen. Dann ist auch AB invertierbar und es gilt*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) *Für eine invertierbare Matrix A ist auch ihre inverse Matrix A^{-1} invertierbar, es gilt*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

(iii) *Eine $n \times n$-Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$ gilt.*

Bemerkung*: Eine $n \times n$-Matrix mit maximalem Rang, $\mathrm{rg}(A) = n$, heißt *regulär*.

Beweis*: nur zu (i), (ii):

zu (i): $(AB)B^{-1}A^{-1} = A\overbrace{(BB^{-1})}^{I}A^{-1} = \overbrace{AA^{-1}}^{I} = I = B^{-1}B = B^{-1}\overbrace{(A^{-1}A)}^{I}B = B^{-1}A^{-1}(AB)$

$\curvearrowright$ AB invertierbar, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

zu (ii): $AA^{-1} = A^{-1}A = I \underset{\text{Def. 2.3.2}}{\Longrightarrow} A^{-1}$ invertierbar, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ □

Berechnung der inversen Matrix

sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, betrachten *erweiterte Matrix*

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

verwenden Gauß-Verfahren:

I : $(A|I) \xrightarrow[\text{Vorwärtselimination}]{\text{Gauß-Verfahren}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & * & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \bullet & * & \cdots & * \end{array}\right)$ Zeilen-Stufen-Form

II : $r = \operatorname{rg}(A) = n$, *siehe* Satz 2.3.4(iii) $\curvearrowright$ Lösbarkeitsentscheidung ✓

III : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & * & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \bullet & * & \cdots & * \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Rückwärtssubstitution}]{\text{linker Block}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \bullet & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \bullet & * & \cdots & * \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{passenden Skalaren}]{\text{Multiplikation mit}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * \end{array}\right) = (I|A^{-1})$

Beispiel : inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ berechnen $\dashrightarrow$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -2 \times \text{Zeile 1} \\ -\text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{2}{3} \times \text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -\text{Zeile 3} \\ +2 \times \text{Zeile 3} \\ \end{array}$$

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} +\frac{2}{3} \times \text{Zeile 2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \times(-\frac{1}{3}) \\ \times\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Definition 2.3.5 *Die zu einer $m \times n$-Matrix A* transponierte Matrix $A^\top$ *ist jene $n \times m$-Matrix, die durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von A entsteht.*

Bemerkung*: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \dashrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Beispiele : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & 5 \end{pmatrix} \dashrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \dashrightarrow B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Satz 2.3.6 (Rechenregeln für transponierte Matrizen)
Seien die Matrizen A, B so gewählt, dass die Operationen erklärt sind. Dann gelten:

(i) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

(ii) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\left(A^\top\right)^\top = A$

(iv) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

(v) $A^\top$ *ist invertierbar genau dann, wenn A invertierbar ist. Dann gilt* $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Beweis*: (i)-(iii) offensichtlich, zu (iv):

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, r$$

$$\curvearrowright \; (AB)^\top = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_{1r} & c_{2r} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, r$$

$$B^\top A^\top = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad d_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik} = c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, r$$

$$\curvearrowright \; B^\top A^\top = (AB)^\top$$

zu (v): sei A invertierbar $\curvearrowright$ $A^\top \left(A^{-1}\right)^\top \underset{\text{(iv)}}{=} \left(A^{-1}A\right)^\top = I^\top = I$, analog $\left(A^{-1}\right)^\top A^\top \underset{\text{(iv)}}{=} \left(AA^{-1}\right)^\top = I^\top = I$

$\curvearrowright$ $A^\top$ invertierbar, $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$, umgekehrte Richtung folgt aus (iii) $\square$

2.4 Determinanten

nach Definitionen 1.3.1 und 1.3.7 schon spezielle Determinanten berechnet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

jetzt allgemeine Entwicklung für $n \times n$-Matrizen

Definition 2.4.1 *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, entstehe aus A, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte von A streicht, d.h.*

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j-1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \dashrightarrow \quad A_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Definition 2.4.2 (Entwicklung von Determinanten)

Sei A eine $n \times n$-Matrix.

(i) *Für $n = 1$, $A = (a_{11})$, setzt man*

$$\det A = \left|a_{11}\right| = a_{11}.$$

(ii) *Für $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, setzt man*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(iii) Für $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, setzt man

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31}.$$

(iv) Induktiv setzt man für eine $n \times n$-Matrix A

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \, a_{k1} \det A_{k1}$$

(Entwicklung nach der ersten Spalte).

Bemerkung : Regel von *Sarrus*[10] : **Nur** für 3×3-Matrizen A gilt die vereinfachte Entwicklungsregel

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - \, a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

Beispiele : **(i)** $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 6 - (-4) - 1 - 0 = -1$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-1+2-1=0} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-2+1+4=3} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 - 3 + 0 = -3$$

<u>*Schreibweise*</u>: sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Zeilenvektoren $\vec{a}^i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$, *Spaltenvektoren* $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, n$

$\curvearrowright$ schreiben A als

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

[10] Pierre Frédéric Sarrus (* 10.3.1798 Saint-Affrique/Frankreich † 20.11.1861 Saint-Affrique/Frankreich)

Satz 2.4.3 (Rechenregeln für Determinanten)
Sei A eine $n \times n$-Matrix, $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\det$ *ist linear in jeder Zeile oder Spalte, d.h. es gelten für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, und $j = 1, \dots, n$,*

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{a}^j + \mu \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{a}^j \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vdots \\ \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}^n \end{pmatrix},$$

und

$$\det \left(\vec{a}_1 \cdots \lambda \vec{a}_j + \mu \vec{b} \cdots \vec{a}_n \right) = \lambda \det \left(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j \cdots \vec{a}_n \right) + \mu \det \left(\vec{a}_1 \cdots \vec{b} \cdots \vec{a}_n \right).$$

Insbesondere gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

(ii) $\det$ *ist* alternierend, *d.h. für die Matrix B, die durch Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten aus A entsteht, gilt*

$$\det B = -\det A.$$

Besitzt also A eine Zeile oder Spalte doppelt, so gilt $\det A = 0$.

(iii) *Ist B die Matrix, die entsteht, wenn zu A das Vielfache einer Zeile der Spalte addiert wird, so gilt* $\det B = \det A$.

(iv) *Für die transponierte Matrix gilt*

$$\det A^\top = \det A.$$

(v) **Multiplikationssatz** *Für zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

(vi) **Invertierbarkeitskriterium** *A ist invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}.$$

(vii) **Kästchensatz** *Hat A die Gestalt $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ bzw. $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ mit quadratischen Kästchen B und D, so gilt*

$$\det A = (\det B)(\det D).$$

Beispiel : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \curvearrowright \det A = ad - bc \underset{\text{Satz 2.4.3(vi)}}{\Longrightarrow} A^{-1}$ existiert für $ad - bc \neq 0$

Beispiel vor Satz 2.3.4 $\curvearrowright A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad - bc}}_{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\curvearrowright \det(A^{-1}) = \underbrace{\frac{1}{(ad-bc)^2}}_{\lambda^2} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{ad - bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} = \frac{1}{\det A}$$