Beweis von Hopf-Rinow, wenn (X, d) kompakt ist

Satz IV (Hopf-Rinow). Sei (X, d) ein lokal-kompakter, vollständiger Längenraum. Dann gibt es zwischen je zwei Punkten x, y einen kürzesten Weg.

Sei X kompakt und $x, y \in X$. Da (X, d) ein Längenraum ist, ist

$$\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ rektifizierbarer Weg zwischen } x \text{ und } y\} = d(x, y).$$

Sei $\gamma_i : [0, 1] \to X$ eine Folge von Wegen mit $C_i := L(\gamma_i) \to d(x, y)$.

O.B.d.A. können wir annehmen, dass die γ_i so parametrisiert sind, dass $d(\gamma_i(t), \gamma_i(t')) = C_i|t - t'|$. In der Tat, andernfalls liefert die Umkehrfunktion der injektiven Funktion $[0, 1] \to [0, 1]$ mit $t \mapsto \frac{1}{L(\gamma_i)} L(\gamma_i|_{[0,t]})$ eine Umparametrisierung.

Da die Folge $L(\gamma_i)$ konvergiert, ist sie beschränkt, daher sind auch die C_i beschränkt.Es gibt also ein $C > 0$ s.d. $d(\gamma_i(t), \gamma_i(t')) \leq C|t - t'|$ für alle i. Alle Wege γ_i sind daher Lipschitz mit gemeinsamer Lipschitz-Konstante.

Nach Arzela-Ascoli ($[0, 1]$ und X sind kompakt und $\gamma_i \in \mathcal{F}(\delta)$ mit $\delta(x, \epsilon) = \frac{\epsilon}{C}$ besitzt γ_i eine konvergierende Teilfolge (in Supremumsnorm).

O.B.d.A. können wir annehmen, dass schon die Folge γ_i gegen einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ konvergiert (in Supremumsnorm).Da Konvergenz in Supremumsnorm punktweise Konvergenz impliziert, hat γ den selben Start- und Endpunkt x, bzw. y. Wir müssen noch zeigen, dass $L(\gamma) \leq d(x,y)$ ist.

Sei $\epsilon > 0$ und $y_0 \leq .. \leq y_N$ eine Partition von $[0,1]$, s.d. $L(\gamma) - \sum d(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) < \epsilon$. Wähle j so groß, dass $d(\gamma_j(y_i), \gamma(y_i)) < \frac{\epsilon}{2N}$ für alle $i = 1, .., N$. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\leq \sum d(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) + \epsilon \\ &\leq \sum d(\gamma_j(y_i), \gamma_j(y_{i+1})) + N\frac{\epsilon}{N} + \epsilon \\ &\leq L(\gamma_j) + 2\epsilon \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig ist, ist $L(\gamma) \leq \inf L(\gamma_i) = d(x,y)$.
Andererseits gilt für jeden Weg zwischen x und y $L(\gamma) \geq d(x,y)$, also gilt Gleichheit. Der Satz von Hopf-Rinow ist bewiesen für kompakte metrische Räume.

Was wir machen, wenn X nicht kompakt ist.

Lemma II. Sei (X, d) ein lokal-kompakter, vollständiger Längenraum. Dann ist jeder abgeschlossene Ball kompakt.

Aus dem Lemma folgt der allgemeine Satz von Hopf-Rinow: Seien $x, y \in X$ und γ eine Kurve zwischen diesen. Dann liegt die Kurve γ und alle kürzeren Kurven mit selben Endpunkten in dem Ball $\overline{B_{L(\gamma)}(x)}$.In der Tat, wäre $\gamma(t_0)$ für ein t_0 nicht in dem Ball, so wäre $L(\gamma) \geq d(x, \gamma(t_0)) > L(\gamma)$.

Daher gibt es eine Folge γ_i von Wegen zwischen x und y mit $L(\gamma_i) \to d(x, y)$, die komplett in dem Ball liegt.Nach dem Lemma ist der Ball kompakt und der erste Teil des Beweises zeigt Existenz einer kürzesten Kurve. $\square$

Falls wir die Flächen betrachten, ist ein R-Ball bezüglich die Metrik d_g eine abgeschlossene Teilmenge des R-Balls bezüglich Standardabstand in $\mathbb{R}^3$ und ist kompakt; deswegen brauchen wir das Lemma II nicht.

Zusammfassung vom Beweis von H-R, wenn wir nur auf dem Fall von Flächen und konzentrieren

Wir erinnern uns an der Definition des Abstandes:

$$d(p,q) = \inf\{L_g(c) \mid c : [0,1] \to M \ , \ c(0) = p, \ c(1) = q\}.$$

Sei (o.B.d.A) $d(p,q) = 1$. Wir zeigen, dass es eine Kurve $\gamma : [0,1] \to M$ gibt, die p und q verbindet, sodass $L_g(\gamma) = 1$.

$$\boxed{d(p,q) = \inf\{L_g(c) \mid c : [0,1] \to M\ ,\ c(0) = p,\ c(1) = q\}.}$$

Wir betrachten eine Folge $c_n : [0,1] \to M$ von Kurven sodass $c_n(0) = p,\ c_n(1) = q$ und $L(c_n) = 1 + \varepsilon_n$, wobei $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Kurven so parametrisiert sind, dass $|c_n'|_g \equiv 1 + \varepsilon_n$.

Jetzt betrachten wir eine abzählbare und dichte Teilmenge D des Intervalls $[0,1]$, z.B. die Menge

$$D = \{d_1 = \tfrac{1}{2}, d_2 = \tfrac{1}{4}, d_3 = \tfrac{3}{4}, d_4 = \tfrac{1}{8}, d_5 = \tfrac{3}{8}, ...\}$$
$$\Big(= \text{alle rationalen Zahlen in } (0,1), \text{ deren Nenner eine 2-er Potenz ist}\Big).$$

Wir betrachten die Folge $c_k(d_1)$. Das ist eine Folge in einer kompakten Menge und deswegen enthält sie eine konvergente Teilfolge $c_{i_k}(d_1) \overset{k\to\infty}{\to} \gamma(d_1)$. Nach Konstruktion konvergiert die Folge von Kurven $T^1_k := c_{i_k}$ mind. in einem Punkt d_1 (gegen den Punkt, den wir $\gamma(d_1)$ genannt haben).

Jetzt betrachten wir die Folge $c_{i_k}(d_2)$. Wieder ist das eine Folge in einer kompkten Menge und deswegen enthält sie eine konvergente Teilfolge $c_{i_{j_k}}(d_2) \to \gamma(d_2)$. Nach Konstruktion konvergiert die Folge von Kurven $T^2_k := c_{i_{j_k}}$ mind. in den zwei Punkten d_1, d_2 (gegen die Punkte, welche wir $\gamma(d_1), \gamma(d_2)$ genannt haben).

Wir setzen das fort. Schritt ℓ liefert und die Teilforge T^ℓ von Kurven, die Teilfolge von allen vorher kostruierten Teilfolgen T^1, $T^2, ...,$ $T^{\ell-1}$ ist, sodass $T^\ell_k(d_1) \overset{k\to\infty}{\to} \gamma(d_1)$, $T^\ell_k(d_2) \overset{k\to\infty}{\to} \gamma(d_2)$, ..., $T^\ell_k(d_\ell) \overset{k\to\infty}{\to} \gamma(d_\ell)$.

Diagonalfolge konvergiert gegen eine Geodäte

Jetzt nehmen wir die Diagonalfolge:

$$D_k = T_k^k.$$

Für jede der Folgen $T^1, T^2, ..$ ist sie ab irgendeinem Folgenglied eine Teilfolge. In allen Punkten $d \in D$ haben wir deswegen $T^k(d) \stackrel{k \to \infty}{\to} \gamma(d)$. Wir definieren die Kurve $\gamma(t)$ wie folgt: für $d \in D$ sei $\gamma(d) = \lim D_k(d)$. Für $t \notin D$ sei

$$\gamma(t) = \lim_{D \ni d \to t} \gamma(d).$$

(Man bemerke dass Grenzwert existiert und eindeutig ist).
Die Folge konvergiert gleichmäßig. Deswegen ist der Grenzwert eine stetige Kurve, und da sie minimal ist, ist sie eine Geodäte. □