$\equiv_{\mathcal{E}}$ **stabil:** Aus $s \equiv_{\mathcal{E}} t$ folgt $s\sigma \equiv_{\mathcal{E}} t\sigma$.

Stellen $Occ(q)$

- $q|_\epsilon = q$ und $f(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n)|_{i\,\pi'} = q_i|_{\pi'}$
- $q[r]_\epsilon = r$ und $f(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n)[r]_{i\,\pi'} = f(q_1, \ldots, q_i[r]_{\pi'}, \ldots, q_n)$.

Strukturelle Induktion über Stellen: Zeige $\varphi(\pi)$ für alle $\pi \in \mathbb{N}^*$

- Induktionsanfang: $\varphi(\epsilon)$
- Induktionsschluss: $\underbrace{\varphi(\pi')}_{Ind.Hyp.} \Rightarrow \varphi(i\pi')$ für alle $i \in \mathbb{N}, \pi' \in \mathbb{N}^*$

Lemma 3.1.8 ($\equiv_{\mathcal{E}}$ monoton)

(a) Falls $A \models s \equiv t$, dann $A \models q[s]_\pi \equiv q[t]_\pi$.

(b) Falls $s \equiv_{\mathcal{E}} t$, dann $q[s]_\pi \equiv_{\mathcal{E}} q[t]_\pi$.

Beweis von (a):

$\varphi(\pi) =$ "Für alle A, s, t, q mit $\pi \in Occ(q)$ gilt:
Falls $A \models s \equiv t$, dann $A \models q[s]_\pi \equiv q[t]_\pi$."

Induktionsanfang: $\varphi(\epsilon)$, d.h. $\pi = \epsilon$

Trivial, denn $q[s]_\epsilon = s$, $q[t]_\epsilon = t$

Induktionsschluss: $\varphi(i\pi')$, d.h. $\pi = i\pi'$

Wenn $i\pi' \in Occ(q)$, dann $q = f(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n)$.

Daher: $q[s]_\pi = f(q_1, \ldots, q_i[s]_{\pi'}, \ldots, q_n)$

$q[t]_\pi = f(q_1, \ldots, q_i[t]_{\pi'}, \ldots, q_n)$