

Vollständige Induktion

Aussageformen mit natürlichen Zahlen als Parametern kann man mit vollständiger Induktion beweisen. Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte durchzuführen.

- Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist.
- Induktionsschluss: Man zeigt, dass aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist (Induktionsvoraussetzung), folgt, dass auch $A(n+1)$ richtig ist, d.h.

$$A(n) \implies A(n+1).$$

Dann ist gewährleistet, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bei einem Induktionsbeweis wird sukzessive das Nächste aus dem Vorherigen gefolgert. Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 1$, sondern für ein $n_0 > 1$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

Beispiel:

Beweis der Formel für die Summe der Quadratzahlen,

$$A(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

mit vollständiger Induktion

- Induktionsanfang ($A(1)$):

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

- Induktionsschluss ($A(n) \implies A(n+1)$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Verwendung der Induktionsvoraussetzung bei der zweiten Gleichheit

Beispiel:

Anzahl der Spiele bei einem Tennis-Turnier (K.O.-System) mit 2^n Teilnehmern

$$2^n - 1$$

($n = 7$ bei einem Grand-Slam)

(i) Beweis mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang ($n = 1$):

$$2 = 2^1 \text{ Teilnehmer} \rightsquigarrow 1 = 2^1 - 1 \text{ Spiele}$$

- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

2^{n+1} Teilnehmer \rightsquigarrow zwei Gruppen mit je 2^n Teilnehmern

Induktionsvoraussetzung $\implies [2^n - 1]$ Spiele in jeder Gruppe
zusätzliches letztes Spiel für die Sieger der beiden Gruppen \rightsquigarrow

$$2 \cdot [2^n - 1] + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Spiele bei 2^{n+1} Teilnehmern

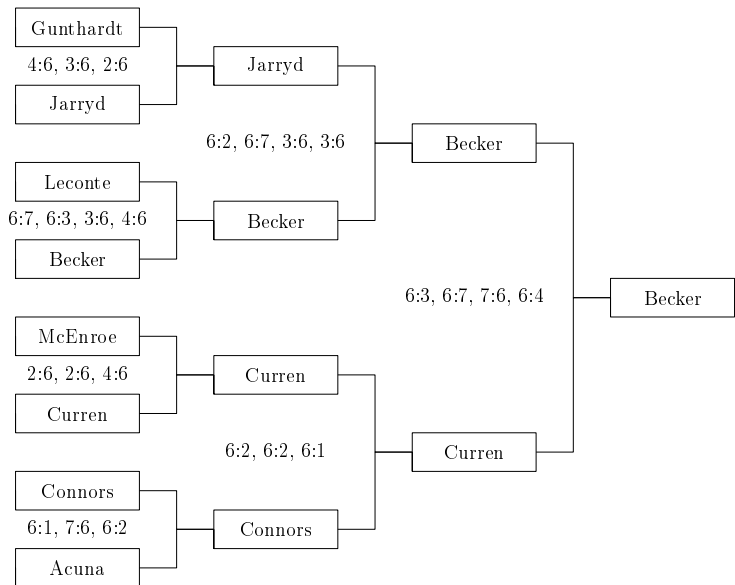
(ii) einfachere Argumentation ohne vollständige Induktion:

Beim K.O.-System verliert bis auf den Gewinner jeder Teilnehmer genau einmal; jedes Spiel hat genau einen Verlierer.

~> ein Spiel weniger als die Teilnehmerzahl

Alternativbeweis auch bei Teilnehmerfeldern beliebiger Größe anwendbar
(z.B. bei Freilos)

letzte 3 Runden des Wimbledon-Turniers von 1985



Beispiel:

falsche Aussage

„Alle Mäuse sind grau“

Beweis mit vollständiger Induktion

- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

$n + 1$ Mäuse: M_1, \dots, M_{n+1}

M_1, \dots, M_n und M_2, \dots, M_{n+1} jeweils grau nach
Induktionsvoraussetzung

$\implies n + 1$ Mäuse grau

Grund für den Widerspruch: fehlender Induktionsanfang