Lineares Iterationsverfahren

Ein Schritt eines linearen Iterationsverfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ hat die Form

$$x_{\ell+1} = (\underbrace{E - CA}_{Q})x_\ell + \underbrace{Cb}_{p}$$

mit E der Einheitsmatrix und C einer einfach zu realisierenden Approximation von A^{-1}.
Die Iteration konvergiert genau dann wenn $\|Q\| < 1$ für eine geeignete Norm bzw. zu diesem Kriterium äquivalent, wenn der Spektralradius der Iterationsmatrix Q kleiner als 1 ist. Für den Fehler gilt

$$\|x - x_\ell\| \leq \frac{\|Q\|^\ell}{1 - \|Q\|} \|x_1 - x_0\| \,.$$

Beispiel

Jacobi-Verfahren

$C = \operatorname{diag}(A)^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad$ Iterationsschritt

$$x \to y: \quad y_j = (b_j - \sum_{k \neq j} a_{j,k} x_k)/a_{j,j}$$

Konvergenz für diagonal-dominante Matrizen, d.h.

$$|a_{j,j}| > \sum_{k \neq j} |a_{j,k}|$$

$\implies \quad \|Q\|_\infty = \max_j \sum_{k \neq j} |a_{j,k}|/|a_{j,j}| < 1$
(Fehlerreduktionsfaktor/Schritt)

Beispiel

Gauß-Seidel-Verfahren

Aufteilung der Matrix A in Diagonale D sowie untere und obere Dreiecksmatrix L bzw. R und Wahl von $C = (D + L)^{-1}$ $\rightsquigarrow$ Iterationsschritt

$$x \to y : \quad y_j = (b_j - \sum_{k<j} a_{j,k} y_k - \sum_{k>j} a_{j,k} x_k)/a_{j,j}$$

konvergiert für symmetrische, positiv definite Matrizen ($\to$ Anwendung auf Ausgleichsprobleme)

Relaxation (SOR: successive-over-relaxation):

$$x \to y \to z = x + \omega(y - x)$$

mit zur Konvergenzbeschleunigung geignet gewähltem $\omega > 1$