



Musterlösungen

zu den Aufgaben aus

Statistische Methoden in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

von Prof. Dr. Hans Peter Litz

Oldenbourg-Verlag München, 2.Auflage 1998

Teil II.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen und statistische

Induktion

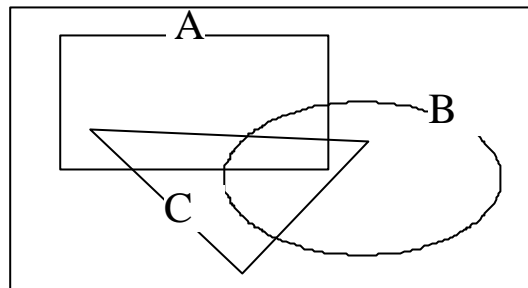
(S. 193-353)

bearbeitet von Hauke Hunger, Dubravko Dolic, Martin Wehmeyer,

Alexandra Lux u.a.

Stand 10.01.2002

Aufgabe 1:

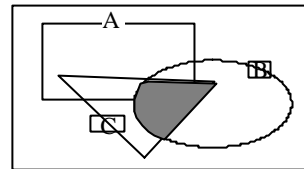


Legende:

A: ein Haus ist aus Ziegeln gebaut
 B: es ist älter als 30 Jahre
 C: es wird mit Öl geheizt

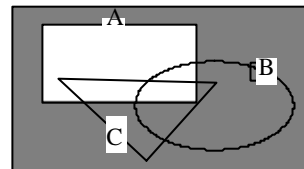
b1) Ein Haus ist älter als 30 Jahre und wird mit Öl beheizt

$$B \cap C$$



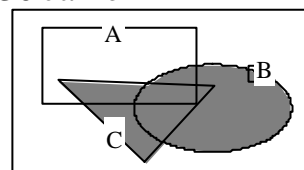
b2) Ein Haus ist nicht aus Ziegeln gebaut

$$\bar{A}$$



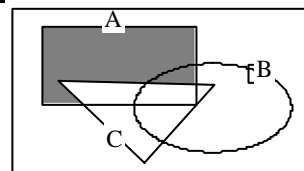
b3) Ein Haus wird mit Öl beheizt oder ist älter als 30 Jahre

$$C \cup B$$

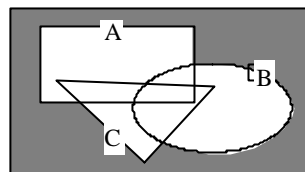


b4) Ein Haus ist aus Ziegeln gebaut und wird nicht mit Öl beheizt

$$A \cap \bar{C} = A - C$$



b5) Ein neues, elektrisch beheiztes Holzferienhaus



$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

(Satz von Morgan)

Aufgabe 2:

Von 5 Wählern wollen 3 „blau“ wählen \Rightarrow 1, 2, 3
2 „gelb“ wählen \Rightarrow 4, 5

2.1 Es wird eine Person „gezogen“
 \Rightarrow unabhängige Ereignisse

a) Wahrscheinlichkeit, den Gelbwähler mit der Nummer 4 auszuwählen

$$p(\text{gelb4}) = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{1}{5} = 0,2$$

b) Wahrscheinlichkeit, (irgend)einen „Blauwähler“ auszuwählen

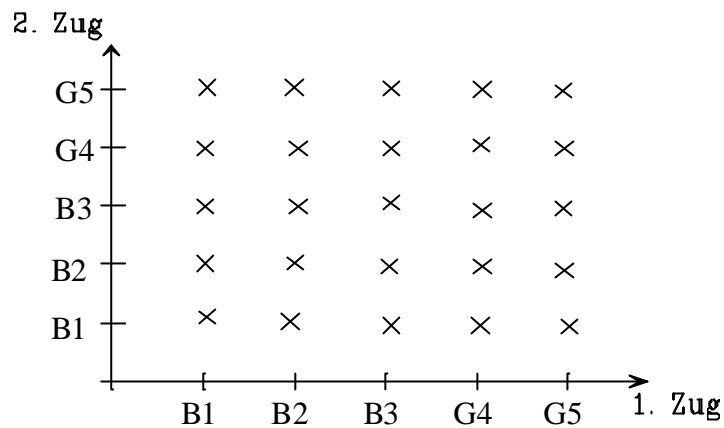
$$p(\text{blau}) = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{3}{5} = 0,6$$

c) Wahrscheinlichkeit, einen „Blauwähler“ oder einen „Gelbwähler“ auszuwählen

$$p(\text{blau} \cup \text{gelb}) = p(\text{blau}) + p(\text{gelb}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \text{ (sicheres Ereignis)}$$

2.2 Ziehen von 2 Wählern nacheinander, wobei der Erste vor der Ziehung des Zweiten zurückgelegt wird. („mit Wiederholung“)

d) Ereignisraum

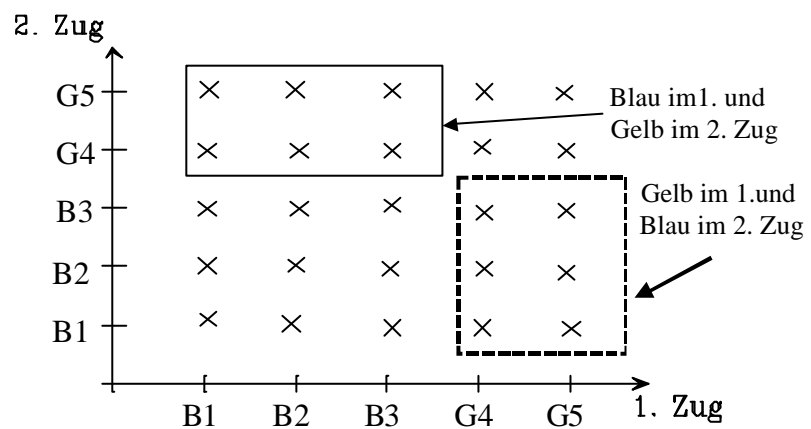


= 25 mögliche Ereignisse

e) Wahrscheinlichkeit, in beliebiger reihenfolge einen Gelbwähler und einen Blauwähler zu ziehen

$$p(G \cap B) = p(G) \cap p(B) + p(B) \cap p(G)$$

$$p(G \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0,48$$

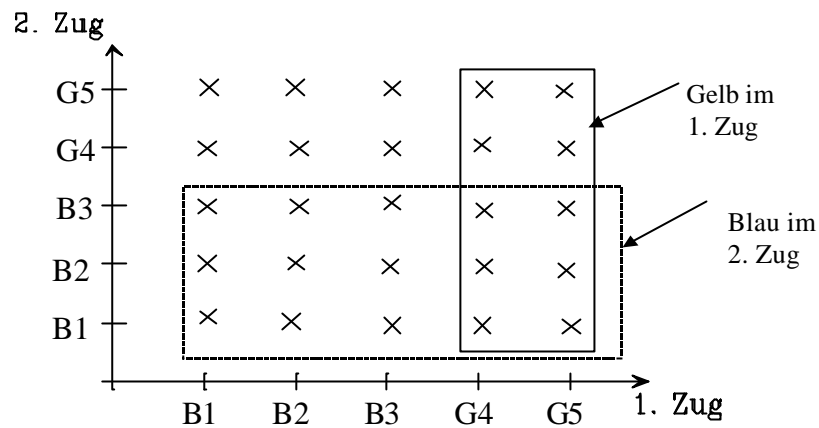


Lösung durch Auszählen: $P = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{12}{25} = 0,48$

f) Wahrscheinlichkeit, erst einen Gelb- und dann einen Blauwähler zu ziehen (Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse)

$$= P(G) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Lösung durch Auszählen: $P = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{6}{25} = 0,24$



g) Wahrscheinlichkeit, 5 als Summe der Nummern der beiden Wähler zu erhalten

g1) Lösung durch Auszählen: $P(x=5) = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{4}{25} = 0,16$

g2) Lösung über Formel: anzuwenden ist der Additionssatz für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse in Verbindung mit dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse:

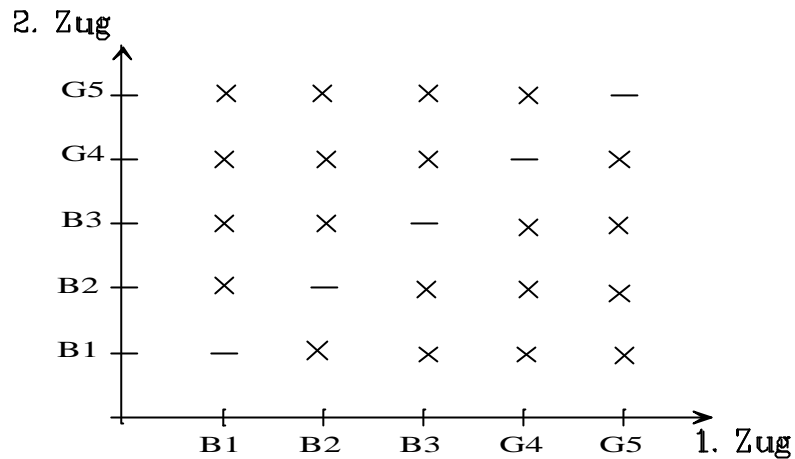
$$\begin{aligned}
 P(x=5) &= P(1 \cap 4) \cup P(2 \cap 3) \cup P(3 \cap 2) \cup P(4 \cap 1) \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \\
 &= \frac{4}{25} = 0,16
 \end{aligned}$$

2.3 Es werden nacheinander, ohne Zurücklegen, zwei Personen „gezogen“ „ohne

Wiederholung“.

P abhängige Ereignisse,

h) Ereignisraum

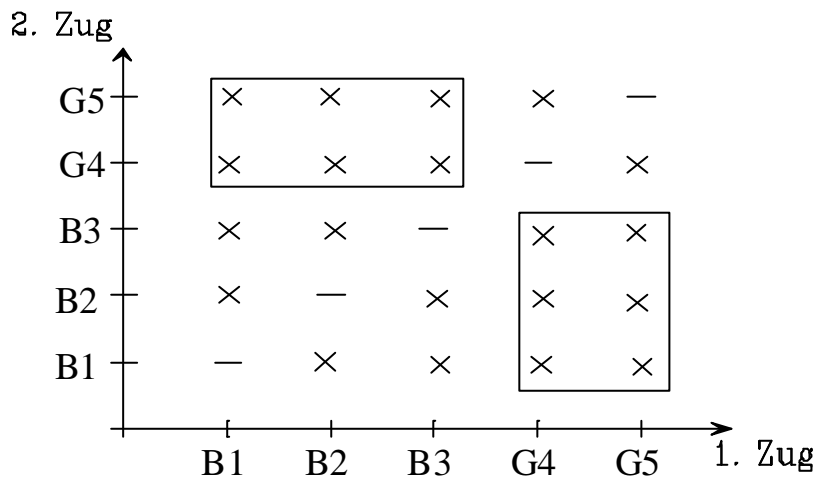


= 20 mögliche Ereignisse

- i) Wahrscheinlichkeit, einen Gelbwähler und einen Blauwähler zu ziehen

$$p(G \cap B) = p(G) \cap p(B|G) \cup p(B) \cap p(G|B)$$

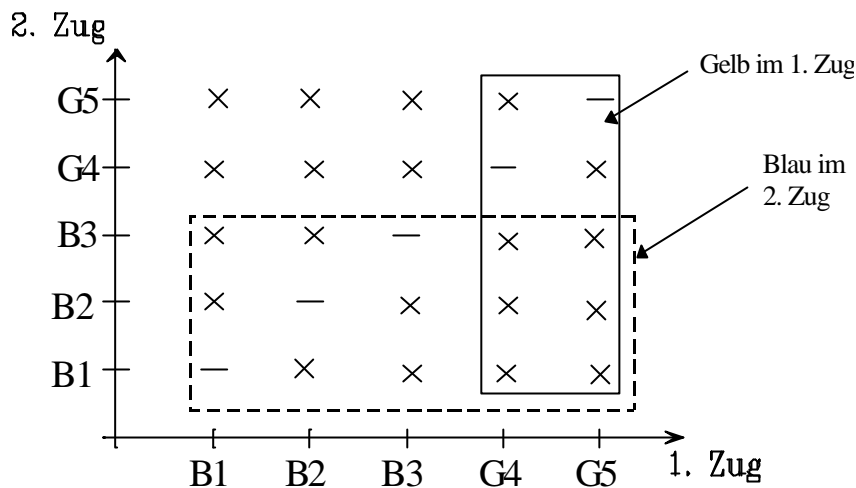
$$p(G \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{12}{20} = 0,6$$



Lösung durch Auszählen: $P = \frac{\text{günstige}_E}{\text{mögliche}_E} = \frac{12}{20} = 0,6$

- j) Wahrscheinlichkeit, erst einen Gelb- und dann einen Blauwähler zu ziehen

$$\text{abhängige Ereignisse} = p(G) \cdot p(B|G) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$$



Lösung durch Auszählen:
$$P = \frac{\text{günstige } _E}{\text{mögliche } _E} = \frac{6}{20} = 0,3$$

2.4 Jetzt werden nacheinander, mit Wiederholung (Zurücklegen), drei Wähler gezogen

k) Wahrscheinlichkeit, auch bei der dritten Ziehung einen Gelbwähler zu ziehen

da die Wähler nach den ersten beiden Ziehungen jeweils wieder zurückgelegt

worden sind, verändert sich die Wahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung

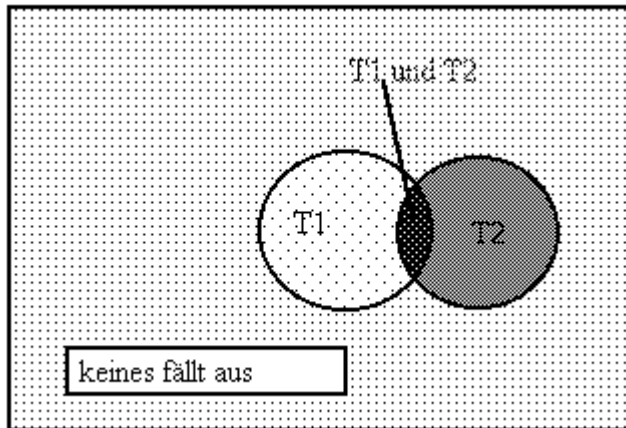
nicht. Die Wahrscheinlichkeit beträgt nach dem Multiplikationssatz für unabhängige

Ereignisse:

$$p = (G \cap G \cap G) = P(G) \cdot P(G) \cdot P(G) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} = 0,064$$

Aufgabe 3:

a) Wahrscheinlichkeit, daß keines der Triebwerke ausfällt



$$\begin{aligned}
 P(T1) &= 0,001 \\
 P(T2) &= 0,001 \\
 P(T1 \text{ und } T2) &= 0,0001
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß keines der Triebwerke ausfällt entspricht der Restfläche. Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Schnittfläche nicht zweimal einberechnet wird:

$$\begin{aligned}
 P(\overline{T1 \cup T2}) &= 1 - p(T1 \cup T2) = 1 - (p(T1) + p(T2) - p(T1 \cap T2)) \\
 &= 1 - (0,001 + 0,001 - 0,0001) = 1 - 0,019 = 0,9981
 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,81% fällt keines der Triebwerke aus.

b) Können die beiden Triebwerke als voneinander unabhängig betrachtet werden?

Bei Unabhängigkeit der Ereignisse gilt:

$$\begin{aligned}
 P(T1 \cap T2) &= P(T1) \cdot P(T2) \\
 0,0001 &\neq 0,001 \cdot 0,001 = 0,000001
 \end{aligned}$$

Die Triebwerke T1 und T2 können als voneinander abhängig betrachtet werden.

c) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Ausfall des Resttriebwerkes?

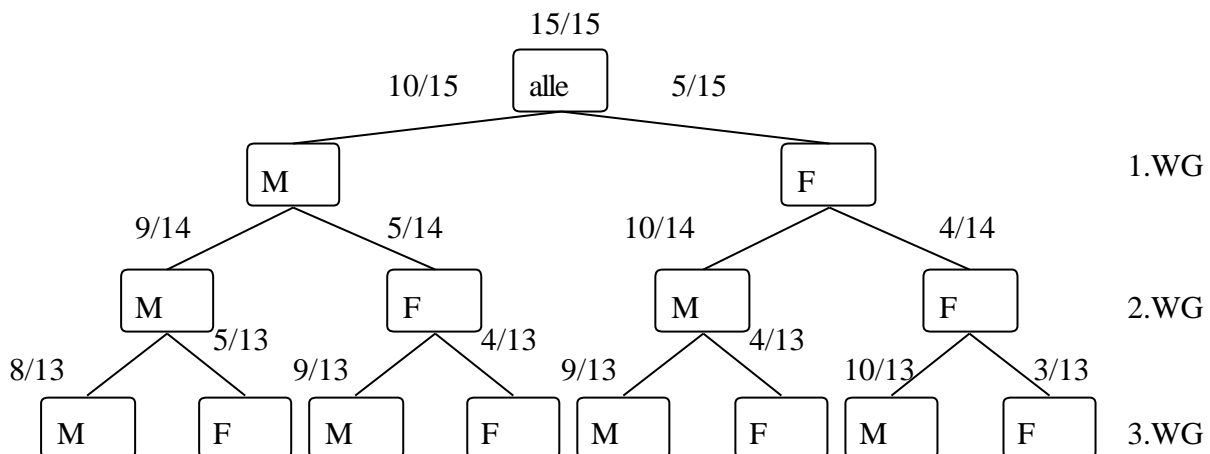
$$P(T2|T1) = \frac{P(T1 \cap T2)}{P(T1)} = \frac{0,0001}{0,001} = 0,1$$

Aufgabe 4:

a) Was ist Ihre spontane Antwort?

b) Wie wird die Aufgabe systematisch gelöst?

Ein 15köpfiger Betriebsrat wählt einen 3köpfigen Sprecherrat in drei Wahlgängen (also immer einen Sprecher/Sprecherin). Wenn die Wahl zufällig, also ohne bestimmte Präferenzen abläuft, sieht es folgendermaßen aus:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{b1)} \quad P(\overline{M} \cap \overline{M} \cap \overline{M}) &= P(F \cap F \cap F) \\
 &= P(F) \cdot P(F|F) \cdot P(F|F \cap F) \\
 &= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2}{91} = 0,022
 \end{aligned}$$

b2) Ein Mann entspricht der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 P(\text{'ein Mann'}) &= P(M \cap F \cap F) + P(F \cap M \cap F) + P(F \cap F \cap M) \\
 &= P(M) \cdot P(F|M) \cdot P(F|M \cap F) \\
 &\quad + P(F) \cdot P(M|F) \cdot P(F|F \cap M) \\
 &\quad + P(F) \cdot P(F|F) \cdot P(M|F \cap F) \\
 &= \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \\
 &= \frac{20}{273} + \frac{20}{273} + \frac{20}{273} \\
 &= 0,2198
 \end{aligned}$$

b3) Zwei Männer entspricht der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 P(\text{'zwei Männer'}) &= P(M \cap M \cap F) + P(M \cap F \cap M) + P(F \cap M \cap M) \\
 &= P(M) \cdot P(M|M) \cdot P(F|M \cap M) \\
 &\quad + P(M) \cdot P(F|M) \cdot P(M|M \cap F) \\
 &\quad + P(F) \cdot P(M|F) \cdot P(M|F \cap M)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \\
&= \frac{45}{273} + \frac{45}{273} + \frac{45}{273} \\
&= 0,495 \approx 0,5
\end{aligned}$$

b4) drei Männer entsprechen

$$P(M \cap M \cap M) = P(M) \cdot P(M|M) \cdot P(M|M \cap M) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{24}{91} = 0,264$$

Aufgabe 5:

Die Lösung ergibt sich aus dem Satz von Bayes.

Dazu nehmen wir an, daß der Kandidat sich für eine beliebige Tür, z.B. T_1 entscheidet und der Quizmaster daraufhin Tür T_2 öffnet. Wir definieren nun das Ereignis:

A: Auto hinter T_1

B: Der Quizmaster Q öffnet T_2

gesucht ist $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

$P(A)$ = Ausgangswahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto hinter Tür T_1 steht.

$P(A|B)$ = die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Auto hinter Tür T_1 befindet, unter der Bedingung, daß der Q Tür T_2 öffnet.

$P(B|A)$ = die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tür T_2 geöffnet wird unter der Bedingung, daß das Auto hinter Tür T_1 steht.

dabei ist $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ und $P(B|A) = \frac{1}{2}$, weil Q zwei Türen (T_2, T_3) zur Auswahl hat, wenn das Auto hinter T_1 steht.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Machen wir die *Gegenprobe* mit

A: Auto hinter T_3

Wenn das Auto hinter der Tür T_3 steht, kann nur die Tür T_2 geöffnet werden.

D.h. $P(B|A) = 1$

$$\implies P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Es lohnt sich also für den Kandidaten von T_1 nach T_3 zu wechseln.

PS: Man kann sich das Ergebnis auch folgendermaßen plausibel machen:
Der Kandidat wählt T_1 . Die Wahrscheinlichkeit, daß dahinter das Auto steht ist $\frac{1}{3}$.

Daraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Auto hinter einer der beiden anderen Türen steht $\frac{2}{3}$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht, wenn eine der Türen geöffnet wird, weil wir davon ausgehen, daß der Q immer nur die Tür öffnet, hinter welcher das Auto nicht steht. Sie bezieht sich dann jedoch nur auf die dritte, nicht geöffnete Tür.

Lit.: Gero von Randow „Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten“ rororo 1992, 176 S., 10.90 DM (1998).

Aufgabe 6:

Es gibt zwei mögliche Kombinationen:

V,M,V und
M,V,M

Der Ereignisraum umfaßt $i = 2^3 = 8$ Ereignisse

mit S = Sieg und N = Niederlage, von denen die Folgen SSN, NSS sowie SSS relevant sind

und p_i = Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Folge.

Die Ergebnisse (der Spiele) sind voneinander unabhängig

\implies Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse für die Wahrscheinlichkeit einer Spielfolge

\implies Wahrscheinlichkeit der günstigen Spielfolgen über Additionssatz verknüpfen.

i	Vater	Mutter	Vater	p_i	Mutter	Vater	Mutter	p_i
		r			r		r	
1	S 0,5	S 0,8	S 0,5	0,2	S 0,8	S 0,5	S 0,8	0,32
2	S 0,5	S 0,8	N 0,5	0,2	S 0,8	S 0,5	N 0,2	0,08
3	N 0,5	S 0,8	S 0,5	0,2	N 0,2	S 0,5	S 0,8	0,08

Wenn man die Wahrscheinlichkeiten der günstigen Spielfolgen, also der Spielfolgen mit zwei Siegen in Folge addiert, ergibt sich für die Kombination V,M,V eine Wahrscheinlichkeit von **0,6** für eine Taschengelderhöhung, während bei der Kombination M,V,M nur eine Wahrscheinlichkeit von **0,48** herauskommt.

Der Sohn sollte also zuerst gegen den Vater spielen. Es ist also durchaus plausibel gegen den stärkeren Gegner zweimal anzutreten.

Aufgabe 7:

a)

A	⇒	50% der Produktion	⇒	davon 3% Ausschuß
		$p(A) = 0,5$		$p(D A) = 0,03$
B	⇒	30% der Produktion	⇒	davon 4% Ausschuß
		$p(B) = 0,3$		$p(D B) = 0,04$
C	⇒	20% der Produktion	⇒	davon 5% Ausschuß
		$p(C) = 0,2$		$p(D C) = 0,05$

$$p(D) = p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C)$$

$$p(D) = 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,05$$

$$p(D) = 0,015 + 0,012 + 0,01$$

$$p(D) = 0,037$$

3,7% der Produktion sind Ausschuß!

b) Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes, defektes Stück von A stammt.

Die Lösung erhält man durch die Anwendung des Satzes von Bayes:

$$P(A|D) = \frac{p(D|A) \cdot p(A)}{p(D)} = \frac{0,015}{0,037} = 0,405$$

Hier wird aus der Menge aller defekten Stücke ausgewählt und nach der Wahrscheinlichkeit gesucht, daß eines von diesen Stücken von einer bestimmten Maschine kommt.

Aufgabe 8:

- A: Arbeiterhaushalt
- B: Angestelltenhaushalt
- C: Beamtenhaushalt
- D: Selbständigenhaushalt

G: Kind geht zum Gymnasium

$$P(A)=0,38 \quad P(B)=0,44 \quad P(C)=0,09 \quad P(D)=0,09$$

$$P(G|A)=0,09 \quad P(G|B)=0,35 \quad P(G|C)=0,45 \quad P(G|D)=0,32$$

Wahrscheinlichkeit für „Kind geht zum Gymnasium“:

$$P(G)=P(A) \cap P(G|A) \cup P(B) \cap P(G|B) \cup P(C) \cap P(G|C) \cup P(D) \cap P(G|D)$$

$$P(G)=0,38 \cdot 0,09 + 0,44 \cdot 0,35 + 0,09 \cdot 0,45 + 0,09 \cdot 0,32 = 0,2575$$

Wahrscheinlichkeit für „Gymnasiast kommt aus Arbeiterhaushalt“:

$$P(A|G) = \frac{P(A) \cdot P(G|A)}{P(G)} = \frac{0,38 \cdot 0,09}{0,2575} = 0,133$$

Aufgabe 9:

a) Wieviel Arbeitsgruppen à 5 Personen können aus 8 Mitarbeitern gebildet werden?

Kombinationen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen.

$$n = 8 \quad k = 5$$

$$\binom{n}{k} = \binom{8}{5} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ Möglichkeiten}$$

b) Wieviel Möglichkeiten gibt es, 12 Personen auf Gruppen à 3, 4 und 5 Personen aufzuteilen

$$n = 12 \quad k = 3, 4, 5$$

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} = \frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 27720 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 10:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Sowi in der Kommission zu haben? Wiwis und Politologen sind keine Sowis, also sind die 16 Wissenschaftler in 8 Sowis und 8 Nicht-Sowis aufzuteilen.

$$p = \frac{\text{günstige}}{\text{möglichen}} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{\frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!}}{\frac{16!}{(16-4)! \cdot 4!}} = \frac{70}{1820} = 0,03846$$

wobei im Zähler 4 Wissenschaftler aus den 8 Nicht-Sowis gezogen werden.