1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Scholz, Gernot Salzer

29. März 2019

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an, das heißt, geben Sie eine Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt und bei der die Prämissen wahr, die Schlussfolgerung aber falsch ist.

(a) Siehe Abbildung rechts.

(b) Wenn alle Golinder untrekkig und alle Untrekkigen filzig sind, dann sind alle Golinder filzig.

(c) Felix ist nicht fleißig. Es gibt nur fleißige Bienen. Daher ist Felix keine Biene.

Lösung

(a) $\begin{array}{l} \text{(Alle) Vögel können fliegen.} \\ \text{Der Bär ist kein Vogel.} \\ \hline \text{Der Bär kann nicht fliegen.} \end{array}$ Inferenzregel: $\begin{array}{l} \text{Alle } x \text{ können } y. \\ z \text{ ist kein } x. \\ \hline z \text{ kann nicht } y. \end{array}$

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Ein Gegenbeispiel ist etwa:

$\begin{array}{l} \text{(Alle) Vögel können fliegen.} \\ \text{Die Fledermaus ist kein Vogel.} \\ \hline \text{Die Fledermaus kann nicht fliegen.} \end{array}$

(b) Auch ohne die Bedeutung der Worte „Golinder“, „untrekkig“ oder „filzig“ zu kennen, lässt sich die Inferenzregel und ihre Gültigkeit analysieren.

Alle Golinder sind untrekkig.
Alle Untrekkigen sind filzig.

Alle Golinder sind filzig.

Inferenzregel: Alle x sind y.
Alle y sind z.

Alle x sind z.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Alle Zuckerl sind süß.
Alles Süße schmeckt gut.

Alle Zuckerl schmecken gut.

(c) Felix ist nicht fleißig.
Alle Bienen sind fleißig.

Felix ist keine Biene.

Inferenzregel: x ist nicht y.
Alle z sind y.
---
x ist nicht z.

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

Tom hat keine Flügel.
Alle Vögel haben Flügel.

Tom ist kein Vogel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie den folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur sowie die Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei jeden Satz einzeln.
Liebe Mama!
Der Schikurs ist toll! Wir haben sehr viel Spaß, aber Schlaf bekommen wir nicht sehr viel. Die Lehrerin hat gesagt, nur wenn wir brav waren, gibt es am letzten Abend eine Abschlussdisco. Das wäre toll, aber ich muss Lisa helfen. Lisa will nämlich nicht mit Maik gemeinsam tanzen. Morgen gehe ich entweder Eislaufen oder Snowboarden, das darf ich mir sogar aussuchen. Wenn ich Snowboarden gehe, dann muss ich mir die Boots und das Snowboard von Annika ausborgen.
Ich schick dir ein dickes Bussi!

Lösung

(a) *Liebe Mama!*
Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da „Liebe Mama!“ weder wahr noch falsch sein kann.

(b) *Der Schikurs ist toll!*
A ... Der Schikurs ist toll.
Struktur: A
Formel: A

(c) *Wir haben sehr viel Spaß, aber Schlaf bekommen wir nicht sehr viel.*
A ... Wir haben sehr viel Spaß.
B ... Wir bekommen sehr viel Schlaf.

Struktur: A und nicht B
Formel: $A \wedge \neg B$

(d) *Die Lehrerin hat gesagt, nur wenn wir brav waren, gibt es am letzten Abend eine Abschlussdisco.*

Will man den gesamten Satz (inklusive der Sprecherin) formalisieren, erhält man eine einzige Elementaraussage.
A ... Die Lehrerin sagt, dass es am letzten Abend ...

Will man (wie in der Vorlesung bei der Diskussion zwischen House und Cameron) das formalisieren, worüber geredet wird, gibt es zwei Interpretationsmöglichkeiten. Ist Bravsein das einzige Kriterium für die Abschlussdisco, dann handelt es sich um eine Äquivalenz.
A ... Wir waren brav.
B ... Die Abschlussdisco findet statt.
Struktur: B genau dann, wenn A
Formel: $B \equiv A$ oder $A \equiv B$

Ist Bravsein nur eines von mehreren notwendigen Kriterien (die Lehrerin benötigt vielleicht noch die Zustimmung des Heimleiters), dann folgt aus dem Stattfinden der Abschlussdisco, dass die SchülerInnen brav waren, umgekehrt folgt aus dem Bravsein aber noch nicht zwingend, dass die Abschlussdisco stattfindet.
Struktur: B nur dann, wenn A
Formel: $B \supset A$ oder $A \subset B$

(e) *Das wäre toll, aber ich muss Lisa helfen.*
A ... Das wäre toll.
B ... Ich muss Lisa helfen.
Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

(f) *Lisa will nämlich nicht mit Maik gemeinsam tanzen.*

Die Übersetzung dieses Satzes in eine aussagenlogische Formel hängt vom Zweck der Formalisierung ab.

Soll nur das, was Lisa will, formalisiert werden, erhalten wir:
A ... Lisa tanzt.
B ... Maik tanzt.
Struktur: A nicht gemeinsam mit B
Formel: $\neg(A \wedge B)$ oder $A \uparrow B$ oder $A \supset \neg B$ oder $B \supset \neg A$
Dabei nehmen wir an, dass "nicht wollen, dass" und "wollen, dass nicht" gleichbedeutend sind. Andernfalls wäre die Negation Bestandteil der Meta-Ebene: Lisa will nicht "A und B".

Diese Sichtweise entspricht dem Beispiel mit Dr. House in der Vorlesung, bei dem nur formalisiert wird, was House und Cameron sagen, nicht aber, wer die Aussagen tätigt.

Soll die Tatsache, dass es um den Willen von Lisa geht, berücksichtigt werden, bildet der Satz aus Sicht der Aussagenlogik eine einzige Elemenaraussage.
A ... Lisa will nicht mit Maik gemeinsam tanzen.
Der Zusammenhang dieser Aussage mit
B ... Lisa tanzt nicht gemeinsam mit Maik.
lässt sich nicht mehr erkennen und nützen, da A keine innere Struktur besitzt. Möchte man beispielsweise aus A und der Behauptung "Wenn Lisa etwas will, dann geschieht es." schließen, dass auch B gilt, geht das nicht allgemein. Man kann lediglich aus A und "Wenn A, dann B" die Aussage B schließen.

Einen Ausweg bieten Modallogiken. Man könnte einen Willensoperator $\Box$ einführen, sodass $\Box A$ für "Liesa will A" steht, und die Eigenschaften dieses Operators durch Gesetze wie "aus $\Box A$ folgt A" ("Wenn Liesa A will, dann gilt A") definieren.

Zusammenfassung: Die Aussagenlogik ist zu schwach, um Aussagen auf verschiedenen Bedeutungsebenen systematisch darzustellen. Man kann lediglich für jede einzelne Aussage eine eigene Aussagenvariable einführen und die Beziehungen explizit herstellen.

(g) *Morgen gehe ich entweder Eislaufen oder Snowboarden, das darf ich mir sogar aussuchen.*
A ... Ich gehe Eislaufen.
B ... Ich gehe Snowboarden.
C ... Ich suche es mir aus.
Struktur: Entweder A oder B, und C
Formel: $(A \not\equiv B) \wedge C$

(h) *Wenn ich Snowboarden gehe, dann muss ich mir die Boots und das Snowboard von Annika ausborgen.*
A ... Ich gehe Snowboarden.
B ... Ich muss mir mir die Boots von Annika ausborgen.
C ... Ich muss mir das Snowboard von Annika ausborgen.
Struktur: Wenn A dann B und C
Formel: $A \supset (B \wedge C)$

(i) *Ich schick dir ein dickes Bussi!*
A ... Ich schicke ein dickes Bussi.
Struktur: A
Formel: A

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Florian möchte ein Eis kaufen. Folgende Eissorten werden angeboten: Erdbeer, Schokolade und Vanille. Wie können die folgenden Sätze mit aussagenlogischen Formeln formalisiert werden?

(a) Florian möchte mindestens eine Eissorte.

(b) Florian möchte höchstens zwei Eissorten.

(c) Florian möchte genau zwei Eissorten.

(d) Florian möchte vielleicht Schokoladeneis.

(e) Florian möchte auf keinen Fall Schokoladeneis und Erdbeereis gemeinsam.

(f) Florian möchte kein Erdbeereis.

(g) Florian möchte nur dann Erdbeereis, wenn er auch Schokoladeneis nimmt.

(h) Wenn Florian Vanilleeis möchte, dann auch Erdbeereis.

Lösung

E ... Florian möchte Erdbeereis.
S ... Florian möchte Schokoladeneis.
V ... Florian möchte Vanilleeis.

(a) $E \vee S \vee V$

(b) $\neg(E \wedge S \wedge V)$ oder $\neg E \vee \neg S \vee \neg V$

(c) $(E \wedge S \wedge \neg V) \vee (E \wedge \neg S \wedge V) \vee (\neg E \wedge S \wedge V)$

(d) $S \not\equiv \neg S$ oder $S \vee \neg S$ oder $\top$
Diese Aussage definiert keine Einschränkung.

(e) $\neg(S \wedge E)$ oder $S \uparrow E$

(f) $\neg E$

(g) $E \supset S$

(h) $V \supset E$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei F die Formel $(((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \equiv (A \supset (B \wedge C)))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 0$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $(((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \equiv (A \supset (B \wedge C)))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da A und B Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \supset B)$ eine Formel (a4).

(3) Da A und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \supset C)$ eine Formel (a4).

(4) Da $(A \supset B)$ und $(A \supset C)$ Formeln sind (Punkt 2 bzw. 3), ist auch $((A \supset B) \wedge (A \supset C))$ eine Formel (a4).

(5) Da B und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(B \wedge C)$ eine Formel (a4).

(6) Da A und $(B \wedge C)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 5), ist auch $(A \supset (B \wedge C))$ eine Formel (a4).

(7) Da $((A \supset B) \wedge (A \supset C))$ und $(A \supset (B \wedge C))$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 6), ist auch $(((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \equiv (A \supset (B \wedge C)))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{(A \supset B) \in \mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{(A \supset C) \in \mathcal{A}}\,a4}{((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \in \mathcal{A}}\,a4 \quad \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{(B \wedge C) \in \mathcal{A}}\,a4}{(A \supset (B \wedge C)) \in \mathcal{A}}\,a4}{(((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \equiv (A \supset (B \wedge C))) \in \mathcal{A}}\,a4$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b) $\mathsf{val}_I\,(((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \equiv (A \supset (B \wedge C)))$

$= \mathsf{val}_I\,((A \supset B) \wedge (A \supset C))$ iff $\mathsf{val}_I\,(A \supset (B \wedge C))$

$= (\mathsf{val}_I(A \supset B)$ and $\mathsf{val}_I(A \supset C))$ iff $(\mathsf{val}_I(A)$ $\mathsf{implies}$ $\mathsf{val}_I(B \wedge C))$

$= ((\mathsf{val}_I(A)$ $\mathsf{implies}$ $\mathsf{val}_I(B))$ and $(\mathsf{val}_I(A)$ $\mathsf{implies}$ $\mathsf{val}_I(C)))$ iff $(0$ $\mathsf{implies}$ $(\mathsf{val}_I(B)$ and $\mathsf{val}_I(C)))$

$= ((0$ $\mathsf{implies}$ $1)$ and $(0$ $\mathsf{implies}$ $0))$ iff $(0$ $\mathsf{implies}$ $(1$ and $0))$

$= (1$ and $1)$ iff $(0$ $\mathsf{implies}$ $0)$

$= 1$ iff 1

$= 1$

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$((A{\supset}B)$	$\wedge$	$(A{\supset}C))$	$\equiv$	$(A{\supset}$	$(B{\wedge}C))$
0	0	0	1	1	1	**1**	1	0
0	0	1	1	1	1	**1**	1	0
0	1	0	1	1	1	**1**	1	0
0	1	1	1	1	1	**1**	1	1
1	0	0	0	0	0	**1**	0	0
1	0	1	0	0	1	**1**	0	0
1	1	0	1	0	0	**1**	0	0
1	1	1	1	1	1	**1**	1	1

Die Formel ist somit erfüllbar und gültig, aber weder widerlegbar noch unerfüllbar.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$\neg(A \uparrow B) \wedge ((B \equiv C) \supset A) \quad \text{und} \quad (A \wedge B)$$

äquivalent sind, und zwar

(a) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	C	$\neg$	$(A \uparrow B)$	$\wedge$	$((B \equiv C)$	$\supset A)$	$=$	$(A \wedge B)$
0	0	0	0	1	**0**	1	0	✓	**0**
0	0	1	0	1	**0**	0	1	✓	**0**
0	1	0	0	1	**0**	0	1	✓	**0**
0	1	1	0	1	**0**	1	0	✓	**0**
1	0	0	0	1	**0**	1	1	✓	**0**
1	0	1	0	1	**0**	0	1	✓	**0**
1	1	0	1	0	**1**	0	1	✓	**1**
1	1	1	1	0	**1**	1	1	✓	**1**

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\wedge$ den Wert 0 liefert, wenn ein Argument den Wert 0 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen $\neg(A \uparrow B)$ den Wert 0 besitzt, bereits mit 0 festgelegt.

A	B	C	$\neg$	$(A \uparrow B)$	$\wedge$	$((B \equiv C)$	$\supset A)$	$=$	$(A \wedge B)$
0	0	0	0	1	**0**			✓	**0**
0	0	1	0	1	**0**			✓	**0**
0	1	0	0	1	**0**			✓	**0**
0	1	1	0	1	**0**			✓	**0**
1	0	0	0	1	**0**			✓	**0**
1	0	1	0	1	**0**			✓	**0**
1	1	0	1	0	**1**	0	1	✓	**1**
1	1	1	1	0	**1**	1	1	✓	**1**

(b) Wir vereinfachen die erste Formel. Da wir dabei die zweite Formel erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$
\begin{array}{ll}
\neg(A \uparrow B) \wedge ((B \equiv C) \supset A) & F \uparrow G = \neg F \vee \neg G \\
= \neg(\neg A \vee \neg B) \wedge ((B \equiv C) \supset A) & \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G \\
= \neg\neg A \wedge \neg\neg B \wedge ((B \equiv C) \supset A) & \neg\neg F = F \\
= A \wedge B \wedge ((B \equiv C) \supset A) & F \supset G = \neg F \vee G \\
= A \wedge B \wedge (\neg(B \equiv C) \vee A) & F \wedge G = G \wedge F \\
= B \wedge A \wedge (\neg(B \equiv C) \vee A) & F \vee G = G \vee F \\
= B \wedge A \wedge (A \vee \neg(B \equiv C)) & F \wedge (F \vee G) = F \\
= A \wedge B &
\end{array}
$$

Im letzten Schritt steht F für die Formel A und G für die Formel $\neg(B \equiv C)$, wir vereinfachen somit $A \wedge (A \vee \neg(B \equiv C))$ zu A.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sei folgender Sachverhalt:

> *Wenn Adrian dünn ist, dann ist Carlo nicht blond oder Darko ist nicht groß. Wenn Darko groß ist, dann ist Sandra reizend. Wenn Sandra reizend ist und Carlo blond ist, dann ist Adrian dünn. Carlo ist blond.*

Kann man aus diesen Argumenten schließen, dass Darko nicht groß ist? Verwenden Sie für Ihre Überlegungen die Aussagenlogik.
Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

Zur aussagenlogischen Modellierung führen wir Variablen mit folgender Bedeutung ein.
AdrianDünn ... Adrian ist dünn.
CarloBlond ... Carlo ist blond.

DarkoGroß ... Darko ist groß.
SandraReizend ... Sandra ist reizend.
Damit lassen sich die einzelnen Aussagen in folgende Formeln übersetzen.

- $F_1 = AdrianDünn \supset (\neg CarloBlond \vee \neg DarkoGroß)$
  Wenn Adrian dünn ist, dann ist Carlo nicht blond oder Darko ist nicht groß.

- $F_2 = DarkoGroß \supset SandraReizend$
  Wenn Darko groß ist, dann ist Sandra reizend.

- $F_3 = (SandraReizend \wedge CarloBlond) \supset AdrianDünn$
  Wenn Sandra reizend ist und Carlo blond ist, dann ist Adrian dünn.

- $F_4 = CarloBlond$
  Carlo ist blond.

Daraus wollen wir schließen:

- $G = \neg DarkoGroß$
  Darko ist nicht groß.

Es geht also darum zu überprüfen, ob die Konsequenzbeziehung

$$F_1, F_2, F_3, F_4 \models G$$

gilt.

$I(CarloBlond)$	$I(AdrianDünn)$	$I(SandraReizend)$	$I(DarkoGroß)$	F_1	F_2	F_3	F_4	$\models_I$	G
1	0	0	0	1	1	1	1	✓	1
1	0	0	1	1	0	1	1	✓	0
1	0	1	0	1	1	0	1	✓	1
1	0	1	1	1	1	0	1	✓	0
1	1	0	0	1	1	1	1	✓	1
1	1	0	1	0	0	1	1	✓	0
1	1	1	0	1	1	1	1	✓	1
1	1	1	1	0	1	1	1	✓	0

Man kann also aus den gegebenen Argumenten schließen, dass Darko nicht groß ist. Oder anders formuliert: Die Formel $\neg DarkoGroß$ ist eine logische Konsequenz der Prämissen $AdrianDünn \supset (\neg CarloBlond \vee \neg DarkoGroß)$, $DarkoGroß \supset SandraReizend$, $(SandraReizend \wedge CarloBlond) \supset AdrianDünn$ und $CarloBlond$.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt.
Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der Konklusion, müssen wir den Wert der Prämissen nur für die Interpretationen bestimmen, bei denen $\neg DG$ den Wert 0

besitzt. Weiters kann man mit dem Auswerten der Prämissen in einer Zeile aufhören, sobald eine Prämisse den Wert 0 besitzt.

$I(\mathit{CarloBlond})$	$I(\mathit{AdrianDünn})$	$I(\mathit{SandraReizend})$	$I(\mathit{DarkoGroß})$	F_1,	F_2,	F_3,	F_4	$\models_I$	G
1	0	0	0					✓	1
1	0	0	1	1	0			✓	0
1	0	1	0					✓	1
1	0	1	1	1	1	0		✓	0
1	1	0	0					✓	1
1	1	0	1	0				✓	0
1	1	1	0					✓	1
1	1	1	1	0				✓	0

Formel zur Konsequenzbeziehung: G ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln F_1, F_2, F_3 und F_4, wenn die Formel

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4) \supset G$$

gültig ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3)$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei X die Formel $\neg(F \land (G \supset H)) \lor (F \supset \neg G)$.

(a) Bestimmen Sie eine zu X äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu X äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) KNF mittels semantischer Methode:

F	G	H	$\neg$	$(F \land$	$(G \supset H))$	$\lor$	$(F \supset$	$\neg\, G)$
0	0	0	1	0	1	**1**	1	1
0	0	1	1	0	1	**1**	1	1
0	1	0	1	0	0	**1**	1	0
0	1	1	1	0	1	**1**	1	0
1	0	0	0	1	1	**1**	1	1
1	0	1	0	1	1	**1**	1	1
1	1	0	1	0	0	**1**	0	0
1	1	1	0	1	1	**0**	0	0

Aus dieser Tafel lässt sich folgende KNF ablesen:

$$\neg F \lor \neg G \lor \neg H$$

(b) DNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{array}{ll}
\neg(F \land (G \supset H)) \lor (F \supset \neg G) & \neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B \\
= \neg F \lor \neg(G \supset H) \lor (F \supset \neg G) & A \supset B = \neg A \lor B \\
= \neg F \lor \neg(\neg G \lor H) \lor (F \supset \neg G) & \neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B \\
= \neg F \lor (\neg\neg G \land \neg H) \lor (F \supset \neg G) & \neg\neg A = A \\
= \neg F \lor (G \land \neg H) \lor (F \supset \neg G) & A \supset B = \neg A \lor B \\
= \neg F \lor (G \land \neg H) \lor \neg F \lor \neg G & A \lor A = A \\
= \neg F \lor (G \land \neg H) \lor \neg G &
\end{array}$$

Diese Formel ist bereits in disjunktiver Normalform, sie lässt sich aber noch vereinfachen.

$$\begin{array}{ll}
\neg F \lor (G \land \neg H) \lor \neg G & (A \land B) \lor C = (A \lor C) \land (B \lor C) \\
= \neg F \lor ((G \lor \neg G) \land (\neg H \lor \neg G)) & A \lor \neg A = \top \\
= \neg F \lor (\top \land (\neg H \lor \neg G)) & A \land \top = A \\
= \neg F \lor \neg H \lor \neg G &
\end{array}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Tommy Thompson ist wieder auf Schatzsuche, diesmal in einem Labyrinth. Er ist schon tief in das Labyrinth vorgedrungen, als er an eine Weggabelung mit drei Straßen kommt. Die Straße auf der linken Seite ist mit Gold gepflastert, die in der Mitte mit Marmor, während die rechte Straße eine Schotterstraße ist. Der Zutritt zu jeder Straße wird von einem Wächter versperrt. Diese teilen Tommy Thompson mit, dass er nur eine der drei Straßen ausprobieren darf. Außerdem bekommt er von jedem Wächter noch weitere Informationen:

- Der Wächter der Goldstraße sagt: „Diese Straße bringt dich direkt zum Schatz, und wenn dich die Schotterstraße zum Schatz bringt, dann bringt dich auch die Marmorstraße zum Schatz."
- Der Wächter der Marmorstraße sagt: „Weder die Goldstraße noch die Schotterstraße bringen dich zum Schatz."
- Der Wächter der Schotterstraße sagt: „Folge der Goldstraße und du kommst zum Schatz, folge der Marmorstraße und du wirst dich für immer verlaufen."

Wenn Tommy Thompson auf seinen vielen Schatzsuchen eines gelernt hat, dann das: Solche Wächter lügen immer! Allerdings ist ihm dabei wenig Zeit geblieben, um sich mit Logik zu befassen, und diese Situation übersteigt seine Fähigkeiten.
Können Sie ihm helfen festzustellen, ob eine der Straßen sicher zum Schatz führt? Wenn ja, welche? Formalisieren Sie die Hinweise mit Hilfe der Aussagenlogik und werden Sie die Formeln geeignet aus.

Lösung

Wir führen folgende Aussagenvariablen ein:

G ... Die Goldstraße führt zum Schatz.
M ... Die Marmorstraße führt zum Schatz.
S ... Die Schotterstraße führt zum Schatz.

Nun formalisieren wir die vorhandenen Informationen:

- Die Goldstraße führt zum Schatz und wenn die Schotterstraße, dann auch Marmorstraße.
  $G \wedge (S \supset M)$
- Weder die Gold- noch die Schotterstraße führen zum Schatz.
  $\neg G \wedge \neg S$
- Goldstraße und nicht Marmorstraße.
  $G \wedge \neg M$

Da alle Wächter lügen, müssen alle Aussagen verneint werden:

- $\neg(G \wedge (S \supset M)) = \neg G \vee (S \wedge \neg M)$
- $\neg(\neg G \wedge \neg S) = G \vee S$
- $\neg(G \wedge \neg M) = \neg G \vee M$

Wir suchen nun alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen G, S und M, sodass diese drei Formeln wahr werden.

G	S	M	$\neg G \vee (S \wedge \neg M)$	$G \vee S$	$\neg G \vee M$	
0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	1	✓
0	1	1	1	1	1	✓
1	0	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	0	
1	1	1	0	1	1	

Es gibt zwei Interpretationen, in denen alle Formeln wahr sind, wobei die Schotterstraße in beiden Fällen zum Schatz führt.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Camille ist mit ihren Eltern über das Wochenende in ein Thermenhotel gefahren. Dort darf sie sich bei dem reichhaltigen Frühstücksbuffet selbst ihr Frühstück zusammenstellen. Camille ist davon sehr begeistert und teilt ihrem Vater sofort mit, was sie sich denn alles nehmen könnte:

> *Ich will entweder Tee oder Müsli ... beides auf keinen Fall, das schmeckt nicht gut. Ich will Baked Beans ... oder Eierspeise ... hmm ... oder sogar beides! Wenn ich Müsli nehme, dann auf jeden Fall Orangensaft, aber keine Baked Beans. Aber wenn ich Tee nehme, dann will ich Eierspeise und Baked Beans!*

Der Vater bremst ihren Enthusiasmus ein wenig:

> *Such dir bitte höchstens zwei Speisen und genau ein Getränk aus!*

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Für welche Speisen bzw. welches Getränk entscheidet sich Camille, welche Kombinationen sind möglich? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

T ... Camille entscheidet sich für Tee.
O ... Camille entscheidet sich für Orangensaft.
E ... Camille entscheidet sich für Eierspeise.
M ... Camille entscheidet sich für Müsli.
B ... Camille entscheidet sich für Baked Beans.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := T \not\equiv O$	genau ein Getränk
$F_1 := \neg(E \wedge M \wedge B)$	höchstens zwei Speisen
$F_2 := T \not\equiv M$	entweder Tee oder Müsli
$F_3 := B \vee E$	Baked Beans oder Eierspeise
$F_4 := M \supset (O \wedge \neg B)$	wenn Müsli dann Orangensaft und keine Baked Beans
$F_5 := T \supset (E \wedge B)$	wenn Tee dann Eierspeise und Baked Beans

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen T, O, E, M und B, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_5$ wahr werden. Wegen Formel F_0 und F_1 genügt es jene Belegungen zu betrachten, in denen genau eine der beiden Variable T und O und maximal zwei der Variablen E, M und B wahr sind.

T	O	E	M	B	F_0	F_1	$T \not\equiv M$	$B \vee E$	$M \supset (O \wedge \neg B)$	$T \supset (E \wedge B)$	
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	✓
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	

Camille hat zwei Möglichkeiten:

- Tee, Eierspeise und Baked Beans, oder
- Orangensaft, Eierspeise und Müsli