Fragenkatalog zum ersten Abgabegespräch - Lösung

1 Aussagenlogik

1. Was versteht man unter Syntax, was unter Semantik?

Syntax:
- Zeichenfolge, mit der etwas notiert wird
- Regeln dafür, welche Zeichenfolgen zulässig sind

Semantik:
- Bedeutung einer Zeichenfolge
- Funktion, die jeder zulässigen Zeichenfolge eine Bedeutung zuordnet

Syntax und Semantik sind grundsätzlich voneinander unabhängig.
Die Bedeutung von Zeichen muss explizit vereinbart werden.

2. Was versteht man unter einer Inferenz (einer Schlussfolgerung)? Wann ist sie korrekt?

Eine Schlussfolgerung ist ein sprachliches Gebilde, das aus einer Reihe von Aussagen (**Prämissen**) und einer weiteren Aussage andererseits, der **Konklusion**, besteht.

Immer wenn **alle Prämissen wahr** sind, ist auch die **Konklusion wahr**.

3. Gegeben eine verbale Beschreibung, finde eine adäquate Formalisierung in der Aussagenlogik.
Wichtig: richtiger Umgang mit Implikation, Äquivalenz und Disjunktion.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 2

4. Gegeben eine der bekannten ein- bzw. zweistelligen logischen Funktionen, definiere ihr Verhalten auf den Wahrheitswerten {1, 0}.

true	false
1	0
$\top$	$\bot$

x	not
1	0
0	1
	$\neg$

x	y	and	nand	or	nor	iff	xor	implies		if	
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
		$\wedge$	$\uparrow$	$\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\not\equiv$	$\supset$	$\not\supset$	$\subset$	$\not\subset$

5. **Gegeben eine Formel, wähle geeignete Elementaraussagen für die Variablen und übersetze die Formel in einen deutschen Satz.**

   Lösungsblatt1 WS15 – Umkehrung Bsp. 2

6. **Was versteht man unter funktionaler Vollständigkeit?**

   Eine Menge von Funktionen heißt vollständig (für eine Funktionsklasse), wenn damit alle Funktionen (der Klasse) ausgedrückt werden können.

   (and, not) ist funktional vollständig

7. **Argumentiere mit Hilfe der induktiven Definition der aussagenlogischen Formeln, warum eine gegebene Zeichenkette eine Formel bzw. keine Formel ist.**

   Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 4b und 4c

8. **Gegeben eine Formel und eine Interpretation, bestimme den Wahrheitswert der Formel schrittweise mit Hilfe der Evaluationsfunktion val.**

   Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 5b

9. **Wann ist eine Formel gültig/erfüllbar/widerlegbar/unerfüllbar?**

   Eine Formel F heißt
   - gültig, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 1$ für alle $I \in \mathcal{I}$; „Tautologie“
   - erfüllbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 1$ für mindestens ein $I \in \mathcal{I}$;
   - widerlegbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 0$ für mindestens ein $I \in \mathcal{I}$;
   - unerfüllbar, wenn $\mathrm{val}_I(F) = 0$ für alle $I \in \mathcal{I}$. „Kontradiktion“

10. **Gegeben eine Formel, bestimme ihren Wahrheitswert in allen Interpretationen (Wahrheitstafel). Welche der Eigenschaften gültig/erfüllbar/widerlegbar/unerfüllbar besitzt die Formel?**

    Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 5c

11. Wann sind zwei Formeln äquivalent?

Semantische Äquivalenz

Zwei Formeln F und G heißen äquivalent, geschrieben $F = G$, wenn $\mathrm{val}_I(F) = \mathrm{val}_I(G)$ für alle Interpretationen I gilt.

$\neg(A \land B)$ und $(\neg A \lor \neg B)$ sind äquivalent

A	B	$\neg(A \land B)$	=	$(\neg A \lor \neg B)$
1	1	0 1 1 1	✓	0 1 0 0 1
1	0	1 1 0 0	✓	0 1 1 1 0
0	1	1 0 0 1	✓	1 0 1 0 1
0	0	1 0 0 0	✓	1 0 1 1 0

12. Gegeben zwei Formeln, überprüfe ihre Äquivalenz.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 6

13. Wann ist eine Formel die logische Konsequenz anderer Formeln?

Logische Konsequenz

$F_1, \ldots, F_n \models G$: $F_1, \ldots, F_n \models_I G$ gilt für alle Interpretationen I.

VO Folien Aussagenlogik S. 53-54

14. Zeige, dass eine gegebene Formel aus anderen logisch folgt.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 7

15. Was versteht man unter Assoziativität, Kommutativität, Idempotenz, . . . ?

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	Assoziativität
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \vee B = B \vee A$	Kommutativität
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	Idempotenz
$A \wedge \top = A$	$A \vee \bot = A$	Neutralität
$A \wedge \neg A = \bot$	$A \vee \neg A = \top$	Komplement
$A \wedge (A \vee B) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität

16. Gegeben eine Formel, vereinfache sie mit den Gesetzen der Booleschen Algebren.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 6

17. Beschreibe, wie man zu einer Funktion Formeln finden kann, die die Funktion darstellen.

Wahrheitstafel erstellen und DNF oder KNF bilden

18. Gegeben eine Funktion als Wahrheitstafel, finde eine geeignete Formel, die sie darstellt.

DNF oder KNF erstellen

19. Definiere NNF, KNF und DNF.

Normalformen

Literal: Variable oder negierte Variable, also A, $\neg A$, B, $\neg B$, ...

Negationsnormalform (NNF)

- Literale sowie $\top$ und $\bot$ sind in NNF.
- $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ sind in NNF, wenn F und G in NNF sind.
- Keine Formel sonst ist in NNF.

NNF: $(\neg A \vee ((B \vee \neg C) \wedge \top))$ Keine NNFs: $\neg\neg A$, $\neg(A \wedge B)$, $\neg\bot$
DNF_f und KNF_f sind Formeln in NNF.

Disjunktive Normalform (DNF)

$\top$, $\bot$ sowie Disjunktionen von Konjunktion von Literalen:
$((\neg)A_{1,1} \wedge (\neg)A_{1,2} \wedge (\neg)A_{1,3} \wedge \cdots) \vee ((\neg)A_{2,1} \wedge (\neg)A_{2,2} \wedge (\neg)A_{2,3} \wedge \cdots) \vee \cdots$

Konjunktive Normalform (KNF)

$\top$, $\bot$ sowie Konjunktionen von Disjunktion von Literalen:
$((\neg)A_{1,1} \vee (\neg)A_{1,2} \vee (\neg)A_{1,3} \vee \cdots) \wedge ((\neg)A_{2,1} \vee (\neg)A_{2,2} \vee (\neg)A_{2,3} \vee \cdots) \wedge \cdots$ 64

20. Beschreibe Methoden, um eine Formel in NNF, KNF bzw. DNF zu bringen.

Konstruktion von DNFs/KNFs – Algebraische Methode

Gegeben: Aussagenlogische Formel F
Gesucht: Äquivalente Formel in DNF/KNF

1. Ersetze alle Junktoren durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.
2. Verschiebe Negationen nach innen, eliminiere Doppelnegationen.
3. Wende das Distributivgesetz an.
4. Eliminiere $\top$ und $\bot$.

$(A_1 \supset (A_2 \equiv A_3)) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge A_3))$

1. $(\neg A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3)) \wedge (\neg\neg A_1 \vee (A_2 \wedge A_3))$
2. $(\neg A_1 \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3)) \wedge (A_1 \vee (A_2 \wedge A_3))$
3. DNF: $(\neg A_1 \wedge A_1) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3 \wedge A_1) \vee$
   $(A_2 \wedge A_3 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3 \wedge A_1) \vee (\neg A_2 \wedge \neg A_3 \wedge A_2 \wedge A_3)$
   KNF: $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_3 \vee \neg A_2) \wedge$
   $(\neg A_1 \vee A_3 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3)$
4. DNF: $(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$
   KNF: $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3)$

12

Konstruktion von DNFs/KNFs – Semantische Methode

Gegeben: Aussagenlogische Formel F
Gesucht: Äquivalente Formel in DNF/KNF

1. Stelle die zu F gehörige Funktion f als Wahrheitstafel dar.
2. Konstruiere DNF_f bzw. KNF_f.

A_1	A_2	A_3	$F := (A_1 \supset (A_2 \equiv A_3)) \wedge (\neg A_1 \supset (A_2 \wedge A_3))$		
1	1	1	1	K_{111}	
1	1	0	0		D_{110}
1	0	1	0		D_{101}
1	0	0	1	K_{100}	
0	1	1	1	K_{011}	
0	1	0	0		D_{010}
0	0	1	0		D_{001}
0	0	0	0		D_{000}

DNF: $F = K_{111} \vee K_{100} \vee K_{011}$
KNF: $F = D_{110} \wedge D_{101} \wedge D_{010} \wedge D_{001} \wedge D_{000}$

KNF: 0 als Ergebnis, alle Variablen falsch
DNF: 1 als Ergebnis, alle Variablen wahr

21. Gegeben eine Formel, berechne eine äquivalente NNF, KNF bzw. DNF mit der semantischen oder algebraischen Methode.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 9

2 Endliche Automaten

1. **Definiere den Begriff des deterministischen bzw. nichtdeterministischen endlichen Automaten und der durch ihn definierten Sprache.**

- deterministisch:

Der momentane Zustand und die nächste Eingabe bestimmen **eindeutig** den **Folgezustand**.

- nichtdeterministisch:

Es gibt Zustände, die bei manchen Eingaben **mehrere** mögliche **Folgezustände** besitzen.

Formale Sprachen

Alphabet (Σ): endliche, nicht-leere Menge atomarer Symbole

- Menge aller lateinischen Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen
- Menge aller ägyptischen Hieroglyphen
- 
- $\{0, \ldots, 9, ., \mathrm{E}, +, -\}$
- $\{0, 1\}$
- $\{00, 01, 10, 11\}$

Wort über Σ: (endliche) Folge von Zeichen aus dem Alphabet Σ

ε . . . Leerwort

$\Sigma^+ = \{\, s_1 \cdots s_n \mid s_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n \,\}$ . . . Menge aller nicht-leeren Wörter über Σ

$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$ . . . Menge aller Wörter über Σ (inklusive Leerwort)

33

2. Definiere den Begriff des Transducers bzw. des Mealy- bzw. des Moore Automaten und die dadurch definierte Relation zwischen Ein- und Ausgabeworten.

Endliche Automaten modellieren Systeme bzw. Abläufe, die nur eine begrenzte, feste Zahl an unterscheidbaren Zuständen besitzen.

Kennzeichen:

- endliche Menge von Zuständen
- Übergänge zwischen Zuständen
- Eingaben, die die Übergänge steuern.
- Ausgaben oder Aktionen, die in den Zuständen oder während der Übergänge getätigt werden.
- Anfangszustand
- Endzustände (optional)
- deterministisch: Der momentane Zustand und die nächste Eingabe bestimmen eindeutig den Folgezustand.
  nichtdeterministisch: Es gibt Zustände, die bei manchen Eingaben mehrere mögliche Folgezustände besitzen.

Arten endlicher Automaten

(Klassischer) Endlicher Automat:

- Anfangs- und Endzustände
- nur Eingaben (bzw. nur Ausgaben)
- Ein-/Ausgaben verknüpft mit Zustandsübergängen
- verarbeitet endliche Symbolfolgen
- Unterarten: deterministisch, nichtdeterministisch mit/ohne ε-Übergängen

Transducer: wie endlicher Automat, aber mit Ein- und Ausgaben.

Mealy-Automat: deterministischer Transducer; in der Regel keine Endzustände, verarbeitet daher unendliche Symbolfolgen.

Moore-Automat: wie Mealy-Automat, die Ausgaben sind aber mit den Zuständen verknüpft.

Relation zwischen Ein- und Ausgabewerten:

VO Folien - Automaten S. 38 - 51

3. Gegeben eine verbale Beschreibung, definiere einen entsprechenden Automaten.

Lösungsblatt1 WS15 – Bsp. 14 und 15