Sonderdruck aus
Forstwissenschaftliches Centralblatt
103. Jahrgang (1984), H. 6, S. 360–374

Die Erfassung von Durchmesserverteilungen in gleichaltrigen Kiefernbeständen [1]

Von K. v. Gadow

Seit Beginn der sechziger Jahre sind ernsthafte Versuche unternommen worden, Durchmesserverteilungen mit Hilfe flexibler Dichtefunktionen darzustellen. Die bekanntesten Beispiele sind die Gamma-Verteilung (Nelson 1964), die Lognormale Verteilung (Bliss u. Reinker 1964), die Beta-Verteilung (Clutter u. Bennett 1965; Zöhrer 1969), die Weibull-Verteilung (Bailey u. Dell 1973) und Johnsons SB-Verteilung (Hafley u. Schreuder 1977).

Bei der Untersuchung von Durchmesserverteilungen kommt es zunächst darauf an, eine Funktion zu finden, mit der die natürlich vorkommenden Kombinationen von Schiefe und Exzeß zufriedenstellend dargestellt werden können. Nach den Feststellungen von Hafley und Schreuder (1977) sind die Funktionen Beta, Johnsons SB und Weibull am besten geeignet für den Ausgleich von beobachteten Durchmesser- und Höhenverteilungen. Das liegt an der vergleichsweise hohen Flexibilität dieser Funktionen bei der Abbildung sowohl positiver als auch negativer Schiefe. Aufgrund dieser Erfahrungen beschränkt sich die

[1] Diese Arbeit entstand während eines Forschungsaufenthaltes des Autors am Lehrstuhl für Waldwachstumskunde der Universität München vom Juli bis Dezember 1982.

U.S. Copyright Clearance Center Code Statement: 0015-8003/84/10306-0360 $ 02.50/0
Forstw. Cbl. 103 (1984), 360–374

ISSN 0015-8003 / InterCode: FWSCAZ

gegenwärtige Untersuchung auf die erwähnten drei Verteilungen, mit dem Ziel:

a. festzustellen, welche Funktion den besten Ausgleich von Durchmesserverteilungen ergibt;
b. ob die Anwendung stetiger Verteilungsfunktionen in der forstlichen Planung als praktikabel angesehen werden kann.

Als Untersuchungsmaterial wurden 448 Bestände der *Pinus patula* aus den Provinzen Natal und Transvaal der Republik Südafrika ausgewählt. Die Inventur in 326 dieser Bestände erfolgte nach dem Auszeichnen, aber vor der Fällung, so daß jeweils zwei Verteilungen ermittelt wurden, und zwar die Verteilung der Durchmesser vor und nach der Durchforstung. In 122 Beständen wurden keine Durchforstungsdaten ermittelt. Insgesamt lagen also 774 Verteilungen vor. Die wichtigsten Merkmale des Datenmaterials sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1

Kennwerte der 448 untersuchten Bestände. Die Strukturmerkmale beziehen sich auf den Durchmesser

Indices of the 448 investigated stands. The structural criteria relate to diameter

Bestandesmerkmal	Geringster Wert	Mittel	Größter Wert
Alter (A) Jahre	9	16.1	27
Stammzahl (N) N/ha	88	596.8	2306
Mitteldurchmesser (D) cm	13.6	23.3	34.1
Kreisfläche (G) m^2/ha	3.5	24.0	95.7
Standardfehler (SE) cm	2.2	4.4	6.8
Schiefe – Fisher (ß1)	0.0	0.06	0.59
Exzeß – Fisher (ß2)	2.39	3.09	5.09
Zahl der gemessenen Durchmesser pro Bestand	91	638	4673

Berechnung der Funktionsparameter

Johnson's SB-Verteilung wurde von JOHNSON (1949) entwickelt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet:

$$f(x) = (\delta/2\,\pi)\,\lambda/(\xi+\lambda-x)\,(x-\xi) \\ * \exp\{-\tfrac{1}{2}\,[\,\gamma+\delta\ln((x-\xi)\,/\,(\xi+\lambda-x))\,]^2\} \qquad (1)$$

wobei ξ = untere Grenze der Durchmesserwerte
λ = Variationsbreite der Durchmesser
δ = Wölbungsparameter
γ = Schiefeparameter
x = Durchmesser
und $\xi < x < \xi + \lambda;\ \delta > 0;\ -\infty < \gamma < \infty\ ;\ \lambda > 0.$

Verschiedene Kurvenformen in Abhängigkeit der Funktionsparameter sind in Abbildung 1 dargestellt.

Die Parameter δ und γ der Johnson SB-Gleichung haben deutlich getrennte Wirkungen. δ beeinflußt die Wölbung, γ die Schiefe. Wölbung und Schiefe sind allerdings nicht unabhängig voneinander, deshalb sind die Einwirkungen von δ und γ nicht strikt trennbar. Bei den Funktionen Beta und Johnson SB wird die Wölbung zusätzlich durch die Begrenzungsparameter beeinflußt.

Die Anpassung ist relativ unkompliziert, wenn die Endwerte der Verteilung bekannt sind. Die maximum likelihood-Schätzwerte werden wie folgt berechnet:

$$\gamma = -\bar{f}/s_f \tag{2}$$

$$\hat{\delta} = 1/s_f \tag{3}$$

wobei

$$f_i = \ln[(x_i - \xi)/(\xi + \lambda - x_i)] \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

$$\bar{f} = (\Sigma f_i)/n \tag{5}$$

$$s^2{}_f = 1/n \sum^{n} (f_i - \bar{f})^2 \tag{6}$$

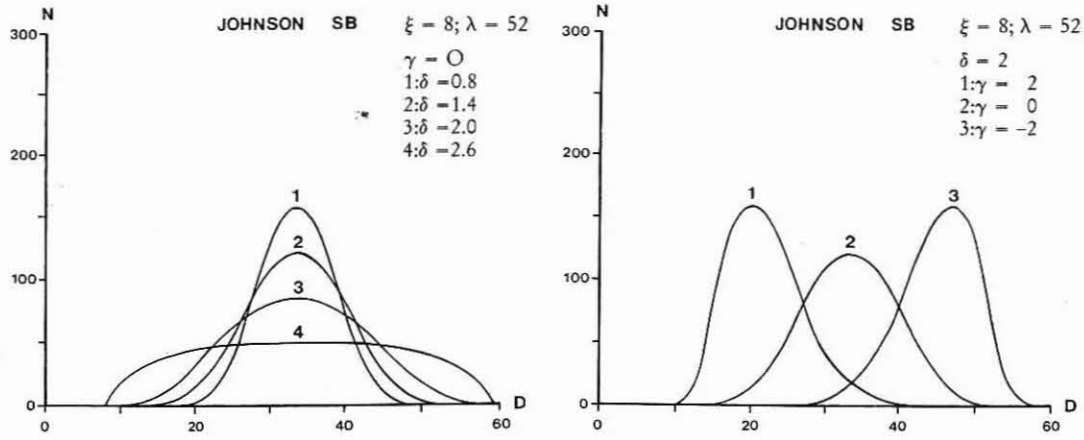


Abb. 1. Kurvenformen bei unterschiedlichen Parameterwerten der Johnson SB-Funktion

Fig. 1. Different Shapes of the Johnson SB distribution

Die Beta-Verteilung, ihre Anwendung und die Methode der Parameterschätzung sind ausführlich in der forstlichen Literatur beschrieben (Clutter u. Bennett 1965; Zöhrer 1969; Burkhart 1971; Kennel 1972; Müller 1973; Burkhart u. Strub 1973; Strub u. Burkhart 1975). Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet:

$$f(x) = \text{const.}\ (x - a)^{\alpha} (b - x)^{\gamma} \tag{7}$$

oder

$$f(x) = \Gamma(\alpha + \gamma) \;/\; (b-a)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma) \\ * \left(1-(x-a) \;/\; (b-a)\right)^{\alpha-1} (x-a) \;/\; (b-a)^{\gamma-1} \tag{8}$$

für

$$a < x < b \;;\; \alpha, \gamma > 0$$

wobei const. = eine Konstante, die so gewählt wird, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit = 1.

$$\Gamma(n) = \int x^{n-1} e^{-x} dx$$

Bei der Beta-Funktion wird, wie schon Zöhrer (1969) feststellte, die Schiefe durch die Beziehung zwischen α und γ bestimmt. Die Verteilung ist linksschief, wenn $\alpha > \gamma$ und rechtsschief, wenn $\alpha < \gamma$.

Die Weibull-Verteilung, die Weibull (1951) entwickelte, um die Wahrscheinlichkeit von Materialschäden zu bewerten, wird durch die Summenfunktion charakterisiert:

$$F(x) = 1 - \exp[-((x-a) \;/\; b)^{c}] \tag{9}$$

für

$$x, b, c > 0$$

wobei a = Lageparameter
b = Maßstabsparameter
c = Formparameter

Die erste Ableitung der Summenfunktion ergibt

$$f(x) = c/b[(x-a) \;/\; b]^{\,c-1} \exp[((x-a) \;/\; b)^{c}] \tag{10}$$

Aus der Summenfunktion errechnet sich die erwartete Häufigkeit der i-ten Durchmesserstufe (ni) mit der Stufenbreite 2w, der Stufenmitte x und der Gesamthäufigkeit N:

$$n_i = N[\exp\{-((x-a-w) / b)^c\} - \exp\{((x-a+w) / c)\}^c] \qquad (11)$$

Die Weibull-Funktion ist durch drei Parameter charakterisiert. b ist bekannt als „Maßstabsparameter", c als „Formparameter". Beide Variablen bestimmen in ihrer Zusammenwirkung die Form und den „Maßstab" der Verteilung (Abb. 2).

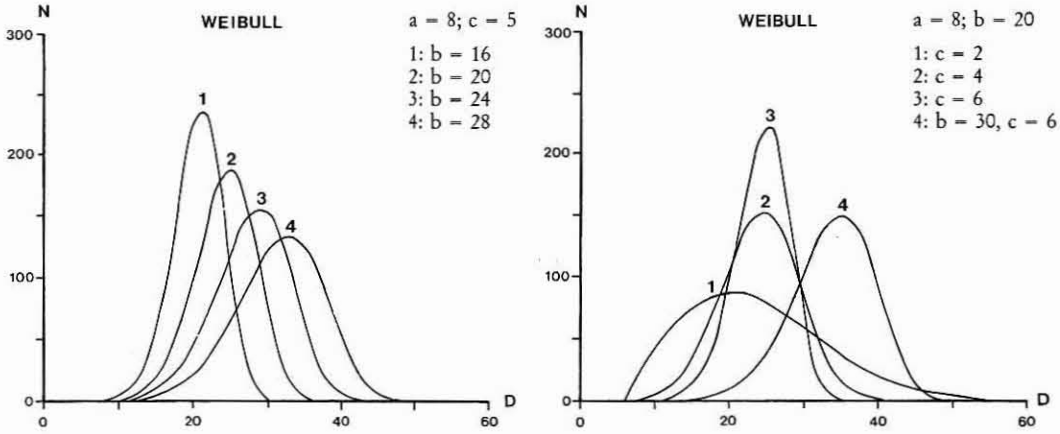


Abb. 2. Kurvenformen bei unterschiedlichen Parameterwerten der Weibull-Funktion
Fig. 2. Different Shapes of the Weibull distribution

Cohen hat eine maximum likelihood-Funktion zum Schätzen der WEIBULL-Parameter vorgeschlagen (VAN LAAR 1979, p. 73). Die Gleichung

$$Dc = \left(\sum^{k} f_i A^c \ln A\right) / \left(\sum^{k} f_i A\right)^c - 1/c - \left(\sum^{k} f_i \ln A\right) / \sum^{k} n_i \qquad (12)$$

wobei $A = x_i - a$

wird iterativ gelöst. Der Anfangswert von c kann nach einer Methode, die MENON (1963) vorgeschlagen hat, ermittelt werden. Es ist aber auch durchaus empfehlenswert, mit einem

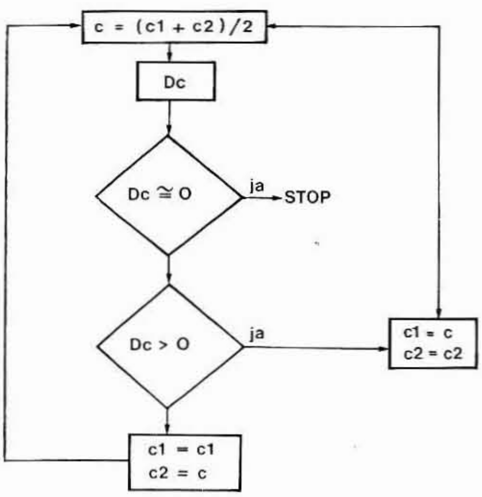
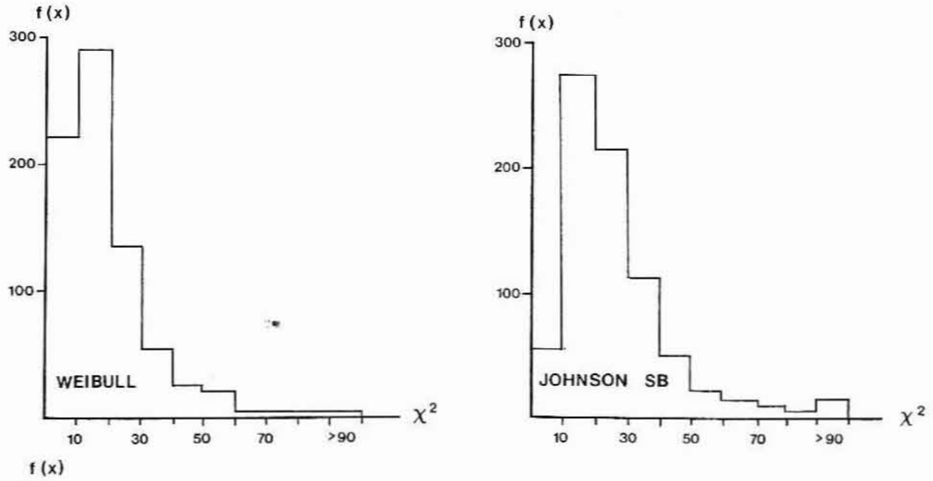


Abb. 3. Schema des Algorithmus zur Berechnung der Weibull-Parameter

Fig. 3. Algorithm for calculating the Weibull parameters



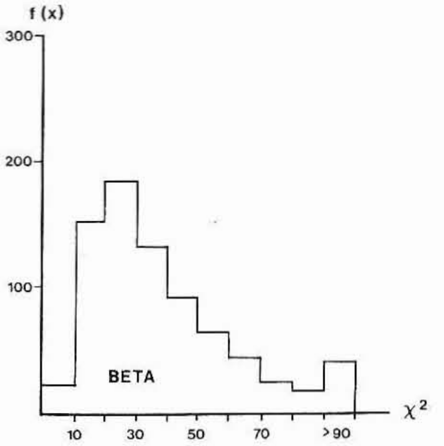


Abb. 4. Verteilungen der Chi Quadrat-Prüfzahl

Fig. 4. Distributions of the chi square test criterion

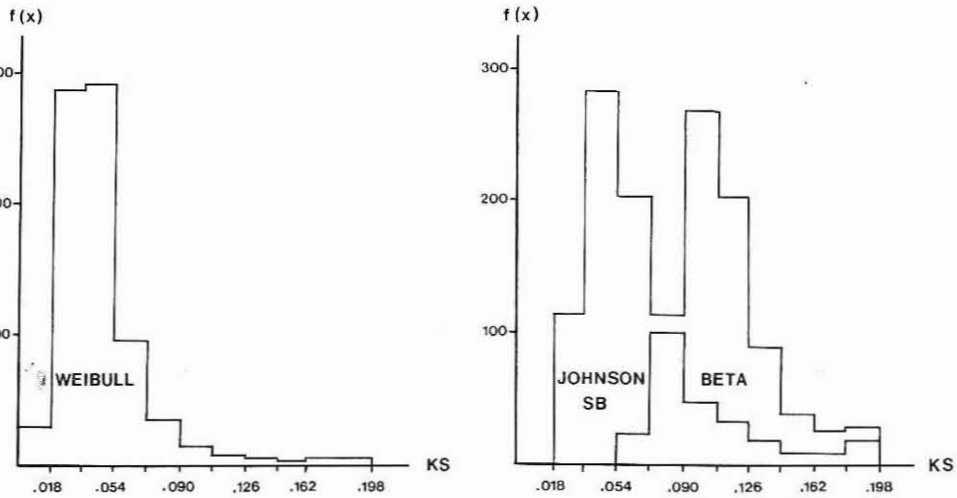


Abb. 5. Verteilungen der Kolmogoroff-Smirnoff-Prüfzahl

Fig. 5. Distributions of the Kolmogoroff-Smirnoff test criterion

Wert zu beginnen, der etwas kleiner ist als der kleinste erwartete c-Wert, z. B. mit $c = 0.001$ (cf. PIERCE 1976, p. 17). Wenn Dc einen negativen Wert angenommen hat, dann ist Dc_i positiv und DC_{i+1} negativ. Die fortlaufende Halbierung des Intervals $(c_i; c_{i+1})$ bis $Dc < 10^{-6}$ führt zum endgültigen Schätzwert für c nach ca. 4–6 Iterationen. Der Algorithmus ist schematisch in Abbildung 3 dargestellt.

Sobald der c-Wert bekannt ist, wird b direkt ermittelt nach

$$b = [(\sum^{k} f_i A^c) / (\sum n_i)]^{1/c} \qquad (13)$$

Prüfzahlen für die Anpassung

Zur Beurteilung der Güte der Anpassung wurden 3 verschiedene Prüfzahlen verwendet:

a. die χ^2 Anpassungs-Prüfzahl

$$\chi^2 = \sum^{k} (f - \hat{f})^2 / \hat{f} \qquad (14)$$

wobei f = beobachtete Häufigkeit
$\hat{f}$ = erwartete Häufigkeit
k = Anzahl der Durchmesserstufen

Zur Verfügung stehen $v = k-1-n$ Freiheitsgrade, wobei n = Anzahl der geschätzten Funktionsparameter.

b. die log likelihood-Verhältnis Prüfzahl G (SOKAL und ROHLF 1969, S. 559 f.):

$$G = 2 \sum^{k} f \ln(f/\hat{f}) \qquad (15)$$

Symbole und Zahl der Freiheitsgrade wie bei (14). Bei der Verwendung von χ^2 und G sollte die erwartete Häufigkeit in einer beliebigen Durchmesserstufe mindestens 5 betragen. Die Häufigkeiten in Durchmesserstufen mit $f < 5$ werden den Häufigkeiten benachbarter Stufen hinzuaddiert, bis in allen Stufen $f > 5$.

c. die Kolmogoroff-Smirnoff-Prüfzahl (LIENERT 1973, S. 459 ff.):

$$K = \max. \; | F/N - F(x) | \qquad (16)$$

wobei F/N = empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe x_i $(i = 1, \ldots, N)$
F(x) = theoretische Verteilungsfunktion

Testgröße ist also der maximale Abstand zwischen den entsprechenden Werten der empirischen und der theoretischen Summenfunktion.

Die Verteilungen der Prüfzahlen

Die Verteilungen der Chi Quadrat- und Kolmogoroff-Smirnoff-Prüfzahlen sind in Abbildungen 4 und 5 dargestellt.

Die Verteilung der Chi Quadrat-Werte ist besonders rechtsschief. Rechtsschiefe ist zwar auch bei den KS-Werten festzustellen, aber hier ist die starke Wölbung das vorherrschende Charakteristikum. Die Überlegenheit der Funktionen Weibull und Johnson SB kommt in Abbildungen 4 und 5 schon deutlich zum Ausdruck.

Die Anpassung der Beta-Funktion erfolgte nach zwei verschiedenen Methoden. Bei Methode 1 wurde der Anfangswert um 2 cm nach rechts verschoben (a+2). Methode 2 gründet sich auf einen Vorschlag von ZÖHRER, wobei der Endwert vergrößert wird. Bei der gegenwärtigen Berechnung wurde b jeweils um 6 cm nach rechts verschoben (b+6). Die Berechnung der χ^2-Werte erfolgte bei Methode 2 nach dem allgemeingültigen, oben beschriebenen Verfahren. Bei Methode 1 wurden bei der Berechnung von χ^2 die zu kleinen Endfrequenzen nicht gruppiert.

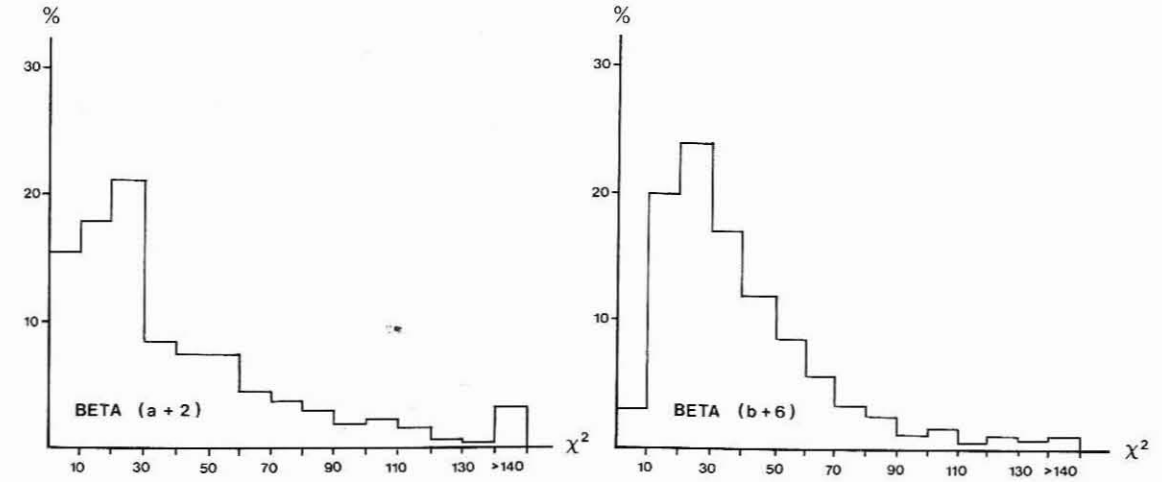


Abb. 6. Verteilungen der Chi Quadrat-Prüfzahl für 2 Methoden der Beta-Anpassung

Fig. 6. Distributions of chi square for two different methods of fitting a Beta distribution

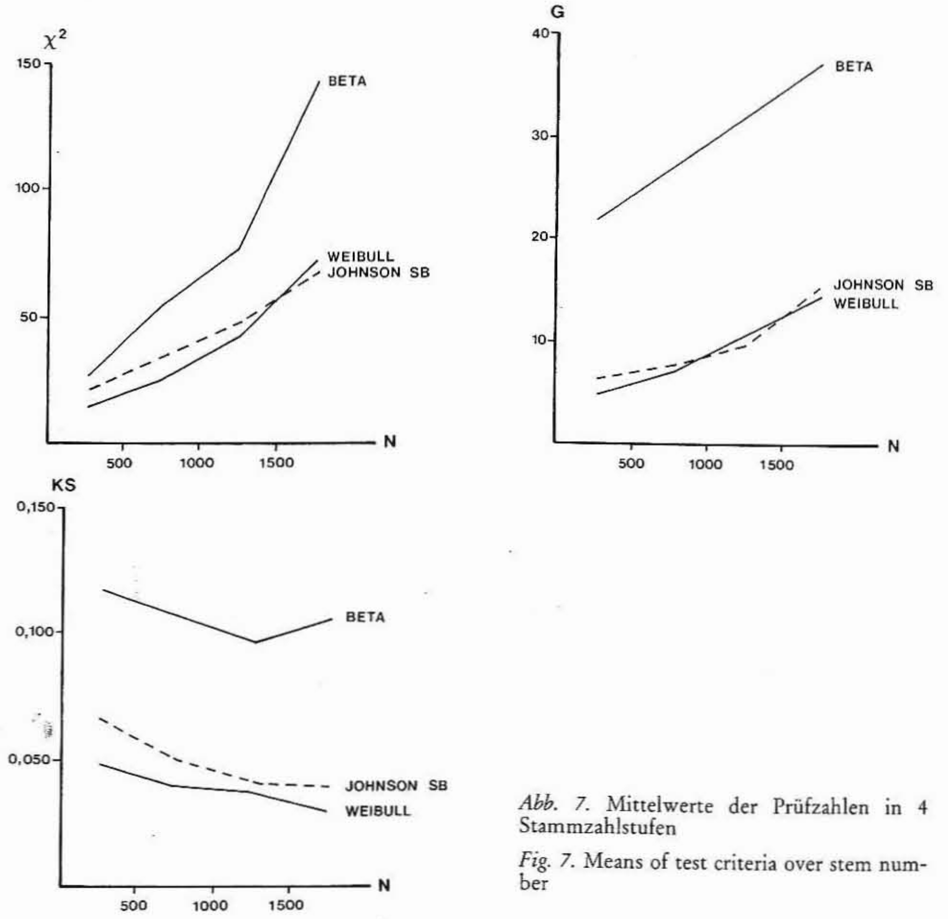


Abb. 7. Mittelwerte der Prüfzahlen in 4 Stammzahlstufen

Fig. 7. Means of test criteria over stem number

Abbildung 6 zeigt die entsprechenden Verteilungen der χ^2-Werte für die zwei Methoden der Beta-Anpassung. Die Verteilungen sind nicht direkt vergleichbar, weil die Stichproben nicht ganz identisch sind und weil χ^2 nicht auf die gleiche Weise berechnet wurde. Trotzdem ergeben sich zwei Beobachtungen: Beta (a+2) scheint zwar eine etwas bessere Anpassung zu ergeben als Beta (b+6), aber der Unterschied, wenn er tatsächlich existiert, ist nicht auffällig. Auffälliger ist die Unstabilität der χ^2-Werte im Falle der Beta (a+2): die Werte reagieren stärker auf Abweichungen an den Enden der Verteilung, wenn die Frequenzen ungruppiert bleiben.

Vergleich der Anpassungen

Die Anpassung der theoretischen an die beobachteten Verteilungen wurde mit Hilfe der drei Prüfkriterien bewertet. Zunächst einmal wurde jedoch untersucht, ob die verwendeten Prüfkriterien testecht sind. Bei dieser Untersuchung zeigte sich eine deutliche Zunahme der χ^2 und G-Werte und eine Abnahme der KS-Werte mit zunehmender Stammzahl (Abb. 7).

Die Abnahme der KS-Werte mit zunehmender Stammzahl erscheint plausibel. Es ist durchaus möglich, daß sich generell mit zunehmender Stammzahl eine bessere Anpassung ergibt. Die höheren χ^2 und G-Werte bei höherer Stammzahl sind dagegen nicht erwartungsgemäß.

Eine Reihe von Kovarianzanalysen bestätigte den Eindruck, daß die Werte der Prüfkriterien durch die Stammzahl beeinflußt werden. Die Ergebnisse der Kovarianzanalysen sind in Tabelle 2 bis 4 aufgeführt.

Tabelle 2

Ergebnis der Kovarianzanalyse für die χ^2-Werte der drei Funktionen. Kovariate ist die Stammzahl

Results of the analysis of covariance for the chi-square values of the three functions. Covariate is the number of trees

Streuung	F. G.	S. Q.	M. Q.	F
Zwischen den bereinigten Mittelwerten	2	159198.0	79599.0	259.06**
Kovariate Stammzahl, Steigung Null	1	385372.9	385372.9	1254.23**
Fehler	2477	761077.1	307.2	
Zwischen den Regressionskoeffizienten	2	93362.1	46681.0	173.03**
Fehler	2475	667715.0	269.8	

Tabelle 3

Ergebnis der Kovarianzanalyse für die KS-Werte der drei Funktionen. Kovariate ist die Stammzahl

Results of the analysis of covariance for the KS-values of the three functions. Covariate is the number of trees

Streuung	F. G.	S. Q.	M. Q.	F
Zwischen den bereinigten Mittelwerten	2	1.8412	0.9206	790.90**
Kovariate Stammzahl, Steigung Null	1	0.1549	0.1549	133.10**
Fehler	2477	2.8832	0.0012	
Zwischen den Regressionskoeffizienten	2	0.0079	0.0039	3.39*
Fehler	2475	2.8754	0.0012	

Die Ergebnisse der Kovarianzanalysen lassen die folgenden Schlüsse zu:

a. Die Stammzahl beeinflußt die Werte der drei Prüfkriterien: mit zunehmender Stammzahl nehmen χ^2 und G zu, KS dagegen nimmt ab. Die Stammzahl ist ein wirksamer „Ursachenkomplex" (Sachs 1969, S. 232), also keine zufällige Einflußgröße. Der Wert der Prüfzahlen wird durch sie wesentlich beeinflußt.

Tabelle 4

Ergebnis der Kovarianzanalyse für die G-Werte der drei Funktionen. Kovariate ist die Stammzahl

Results of the analysis of covariance for the G-values of the three functions. Covariate is the number of trees

Streuung	F. G.	S. Q.	M. Q.	F
Zwischen den bereinigten Mittelwerten	2	150353.2	75176.6	775.49**
Kovariate Stammzahl, Steigung Null	1	12088.4	12088.4	124.70**
Fehler	2477	240121.3	96.9	
Zwischen den Regressionskoeffizienten	2	2391.2	1195.6	12.45**
Fehler	2475	237730.1	96.1	

b. Der Einfluß der Stammzahl ist bei den drei Prüfkriterien unterschiedlich für alle Funktionen.

c. Die Güte der Anpassung ist für die drei Funktionen verschieden, und zwar unabhängig von der Stammzahl.

Weder das häufig verwendete χ^2 noch die log likelihood Verhältniszahl sind testechte Prüfkriterien. Bei Anpassungstests sind diese beiden Maßstäbe daher nur bedingt, wenn überhaupt, zu empfehlen.

Beim Vergleich der Güte der Anpassung verschiedener Funktionen lautet die Nullhypothese: zwei Stichproben der Prüfzahl entstammen der selben Grundgesamtheit oder symbolisch Ho : $\mu 1 = \mu 2$, d. h. die Mittel der Prüfzahlwerte zweier Verteilungsfunktionen sind gleich. Die Alternativhypothese lautet: Die Grundgesamtheiten unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Prüfzahlwerte.

Die bereinigten Mittelwerte der Prüfkriterien sind in Tabelle 5 aufgeführt, die entsprechenden t-Werte in Tabelle 6.

Tabelle 5

Bereinigte Mittelwerte der Prüfkriterien

Adjusted means of the test criteria

	Weibull	Johnson SB	Beta
χ^2	17.9	24.0	37.1
KS	0.043	0.057	0.106
G	5.63	6.67	22.64

Tabelle 6

Matrix der t-Werte für die stammzahlbereinigten Mittel der drei Prüfkriterien (bei 2477 F.G.)

Matrix of the t-values for the means, number of trees adjusted, of the three test criteria, (with 2477 df)

		χ^2	KS	G
Weibull	– Johnson SB	– 7.08**	– 8.23**	– 2.16*
Beta	– Weibull	22.28**	37.81**	32.97**
Beta	– Johnson SB	15.19**	29.58**	35.14**

Bei der Beurteilung der Güte der Anpassung lautet die Hypothese: zwischen empirischer und theoretischer Verteilung besteht kein Unterschied. Diese Hypothese wurde unter Verwendung der KS-Prüfzahl getestet. Die Resultate sind in Tabelle 7 aufgeführt.

Die Weibull-Funktion ergab die beste Anpassung der 774 Verteilungen. Dieses Urteil stützt sich auf drei verschiedene Prüfkriterien.

Tabelle 7

Ergebnisse der Anpassungstests unter Verwendung der KS-Prüfzahl (α = 0.10)

Results of the fitting tests using the test criteria KS (α = 0.10)

Funktion	Hypothese abgelehnt (Fälle)	Hypothese angenommen (Fälle)	Annahme-rate (%)
Weibull	139	635	82
Johnson SB	271	503	65
Beta (b + 6)	735	39	5

Allgemeine Beobachtungen zur Anpassung

Abbildung 8 zeigt Beispiele extrem schwacher Anpassung sowohl der Weibull- als auch der Johnson SB-Funktion. Bei dem vorhandenen Datenmaterial waren solche Erscheinungen ganz seltene Ausnahmefälle. Eine unbefriedigende Anpassung ergab sich vor allem bei Verteilungen mit starker Wölbung und beidseitigen, langen Ausläufern mit niedrigen Frequenzen.

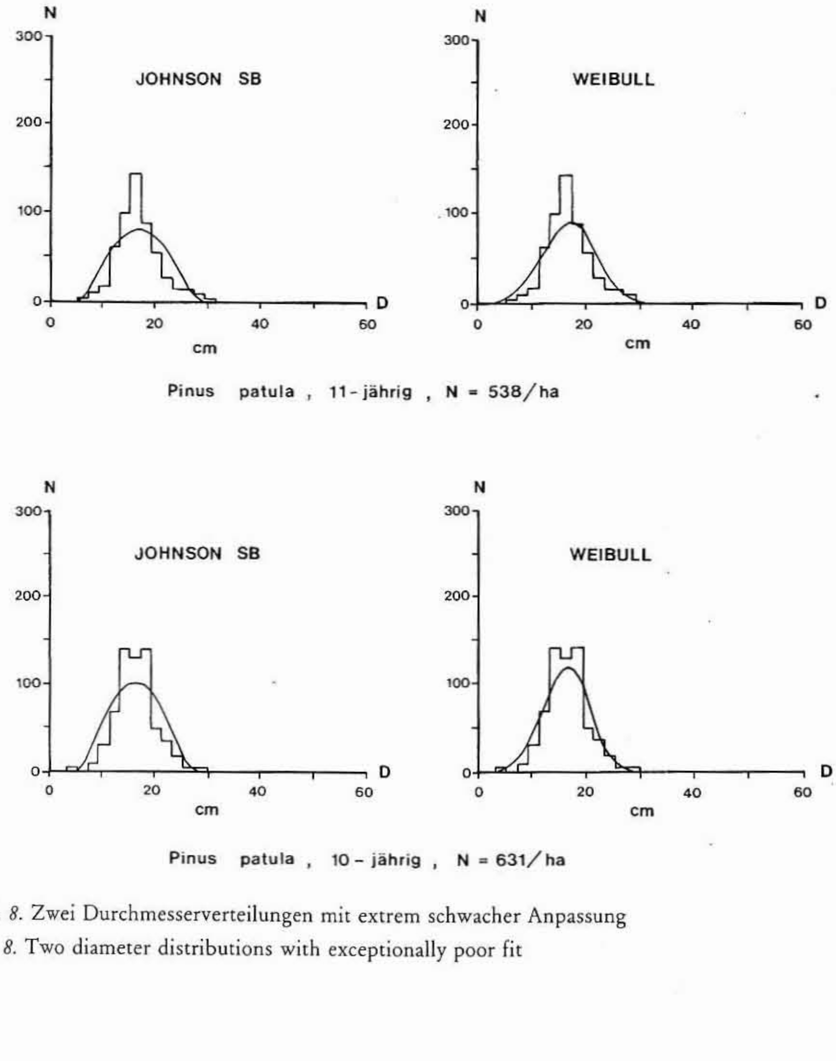


Abb. 8. Zwei Durchmesserverteilungen mit extrem schwacher Anpassung

Fig. 8. Two diameter distributions with exceptionally poor fit

Abbildung 9 zeigt zwei Beispiele mit relativ günstiger Anpassung der Beta (b+6)-Funktion. Die Beta-Funktion zeichnete sich in der gegenwärtigen Untersuchung durch die Neigung aus, übertriebene Rechtsschiefe abzubilden. Das lag möglicherweise an der Vorgabe der verlängerten b-Werte. Bei einem iterativen Verfahren der Anpassung wäre es sehr wahrscheinlich möglich gewesen, diese Verzerrung auszugleichen. Bei der großen Anzahl der Verteilungen erschien dieser Weg allerdings nicht als praktikabel.

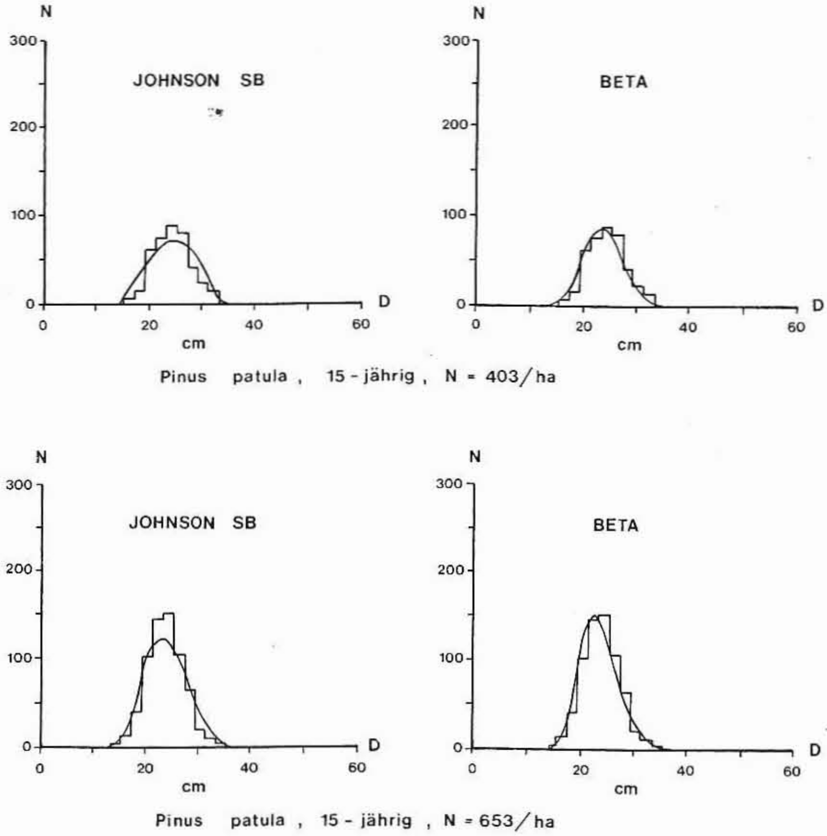


Abb. 9. Zwei Durchmesserverteilungen mit relativ guter Anpassung der Beta-Funktion
Fig. 9. Two diameter distributions with exceptionally good fit of the Beta function

Abbildung 10 zeigt zwei typische Beispiele mit leichter Überlegenheit der Johnson SB gegenüber der Weibull-Funktion. Die Johnson SB ergab gewöhnlich eine bessere Anpassung als die Weibull bei Verteilungen mit langem und flachem, linksseitigem Anstieg. Eine augenfällige, starke Überlegenheit der Johnson SB über die Weibull wurde allerdings in keinem Fall festgestellt. Eine Überprüfung dieser Tatsache war relativ einfach, da alle berechneten Verteilungen auch gleichzeitig gezeichnet wurden.

Abbildung 11 zeigt zwei Verteilungen, bei denen die Weibull gegenüber der Johnson SB überlegen ist. Die Weibull-Funktion erwies sich immer dann als besonders überlegen, wenn der Anstieg der Frequenzen steil war. Eine gesonderte Untersuchung bestätigte diese Erscheinung: der Parameter a wurde um mehrere Durchmesserstufen mit Frequenz O nach links verschoben; die Anpassung der Weibull-Funktion verschlechterte sich jedesmal, und zwar um so stärker, je weiter a künstlich nach links verschoben wurde.

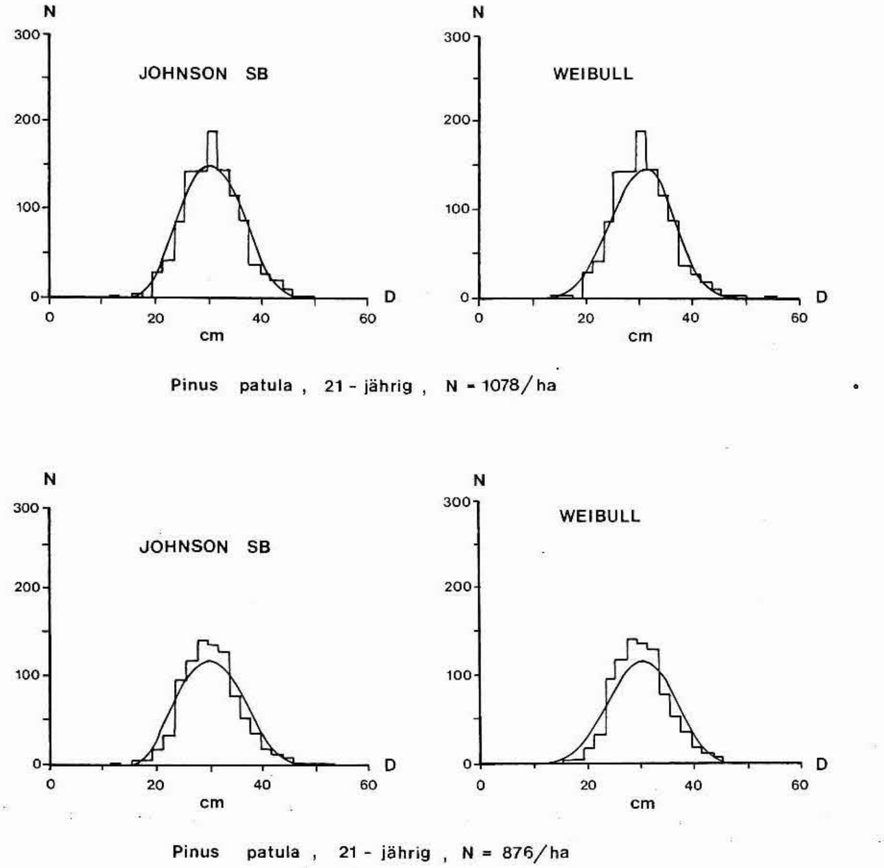


Abb. 10. Zwei Durchmesserverteilungen mit (leichter) Überlegenheit der Johnson SB- gegenüber der Weibull-Funktion

Fig. 10. Two diameter distributions with slightly better fit of the Johnson SB function

Anwendung in der forstlichen Planung

Die Anwendung stetiger Verteilungsfunktionen in der forstlichen Planung bietet sich vor allem in gleichaltrigen Reinbeständen mit unimodalen Durchmesserverteilungen an:

a. bei der Ergänzung vorhandener Ertragstafeln und Sortenertragstafeln

b. bei Modellrechnungen zur Beurteilung von Bestandesbehandlungen.

Diese Feststellungen sind unter anderem auch für Fichtenbestände getroffen worden (PREUSSNER 1974).

Die Durchmesserverteilung ist ein entscheidender ertragskundlicher Parameter, von dem sich eine Reihe anderer Größen ableiten lassen. Zum Beispiel können die folgenden Merkmale direkt aus der Weibull-Funktion berechnet werden:

Modalwert $= a + b\,(1-1/c)^{1/c}$

Mittel $= a + b\,(\Gamma_1)$

Varianz $= b^2\,(\Gamma_2-\Gamma_1^{\,2})$

Schiefe $= (\Gamma_3-3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\,\Gamma_1^{\,3})/(\Gamma_2-\Gamma_1^{\,2})^{3/2}$

wobei $\Gamma_k = \Gamma(1+k/c)$

mit den Werten der Gammafunktion $\Gamma(n) = \int x^{n-1}e^{-x}dx$

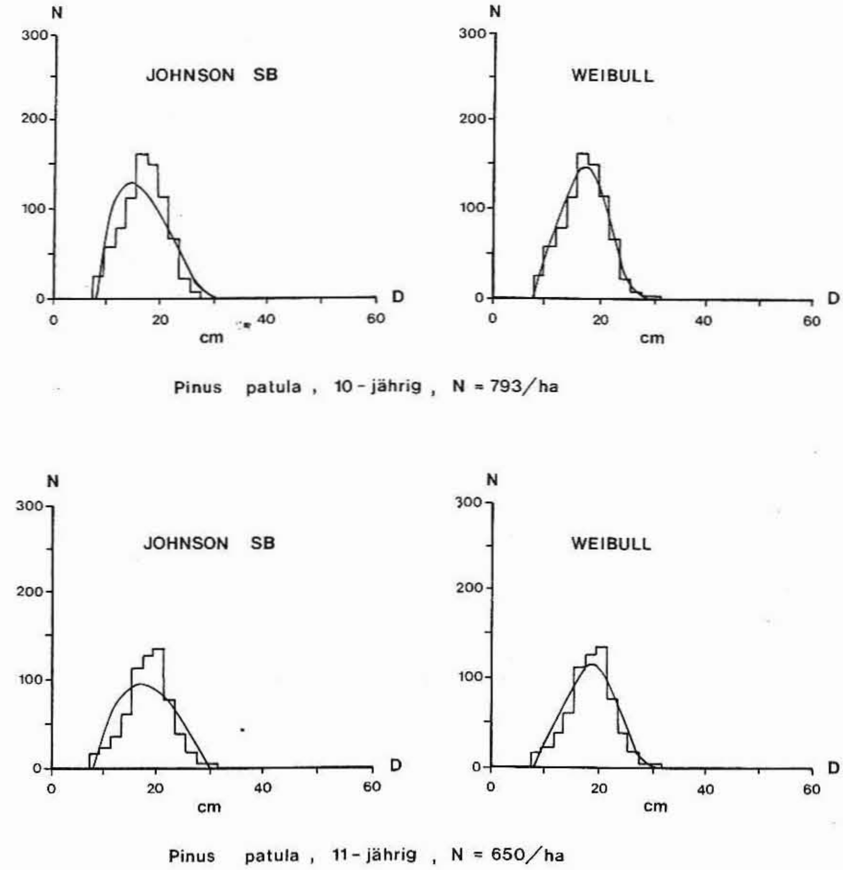


Abb. 11. Zwei Durchmesserverteilungen mit Überlegenheit der Weibull- gegenüber der Johnson SB-Funktion

Fig. 11. Two diameter distributions with better fit of the Weibull function

Mit Hilfe einer umkehrbaren Durchmesser-Höhenregression kann die Höhenverteilung ermittelt werden. Damit ist dann die Bestandesstruktur erfaßt. Aus der Struktur ergeben sich alle für die Planung wichtigen Ertragselemente, vor allem die Oberhöhen und Oberdurchmesser.

Eine Höhenverteilung kann entweder direkt über den Ausgleich beobachteter Höhenmeßwerte oder indirekt über die Durchmesserverteilung ermittelt werden. Im zweiten Fall gilt allerdings als Voraussetzung, daß die Durchmesser-Höhen-Regression umgekehrt werden darf (vgl. Chen und Rose 1976). Unter der Annahme, daß z. B. die Gleichung $H = b_1 + b_2 \ln(D)$ als Durchmesser-Höhen-Regression verwendet wird, kann die Höhenverteilung wie folgt abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} F(h) &= P(H < h) \\ & P(D < m) \text{ wobei } m = \exp((h-b_1)/b_2) \\ & F(m) \\ & 1 - \exp\{-((m-a)/b)^c\} \end{aligned}$$

Die Stammzahl der i-ten Höhenstufe (n_i) mit der Stufenmitte m und der Gesamthäufigkeit N errechnet sich nach:

$$n_i = N[\exp\{-((m-a-w1)/b)^c\} - \exp\{-((m-a+w2)/b)^c\}]$$

wobei a = der kleinste Durchmesser
$w1$ = der Durchmesser, der der (Höhen) Stufenmitte minus einer halben (Höhen) Stufenbreite entspricht, also $w1 = \exp((h-w-b_1)/b_2)$
$w2 = \exp((h+w-b_1)/b_2)$

Abbildung 12 zeigt zwei Beispiele von Durchmesserverteilungen und den daraus abgeleiteten Höhenverteilungen, jeweils vor und nach der Durchforstung.

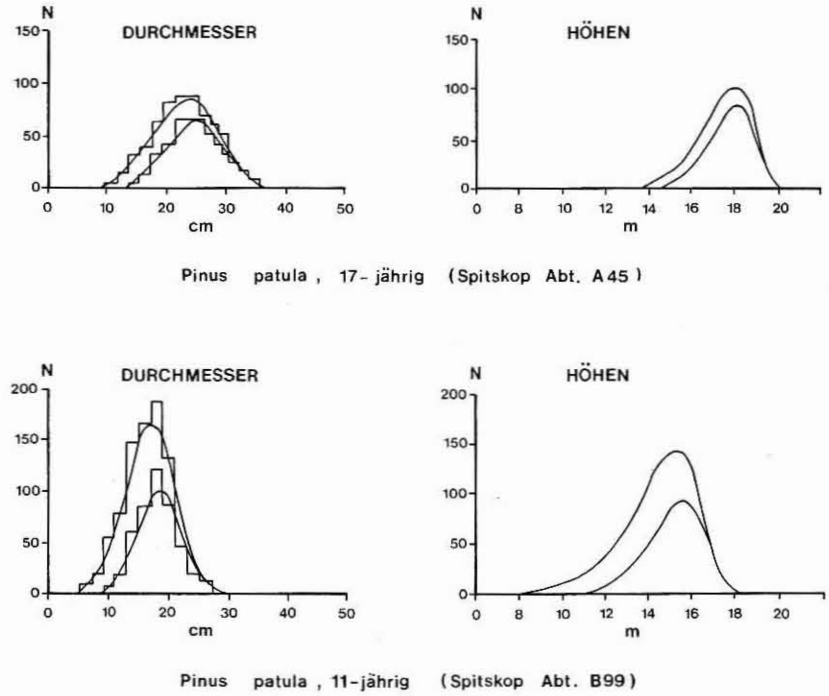


Abb. 12. Zwei Beispiele von Durchmesser- und Höhenverteilungen, vor und nach der Durchforstung
Fig. 12. Two examples of diameter and height distributions, before and after a thinning

Die Anwendung stetiger Verteilungsfunktionen ist nicht nur eine elegante Lösung zur Darstellung der Bestandesstruktur. Der Ausbau eines bestehenden „Mittelwertmodells" in ein Strukturmodell ist relativ unkompliziert, wenn es sich, wie im Fall der *Pinus patula* Bestände, um unimodale Verteilungen handelt, die durch stetige Funktionen ausgeglichen werden können. Die Erweiterung einfacher Bestandesprognosemodelle, die noch auf Mittelwerten basieren, erscheint unter der Bedingung der Unimodalität als praktikabel und empfehlenswert. Ein „stetiges" Strukturmodell bleibt relativ kompakt und übersichtlich und erlaubt somit eine einfache Handhabung, zum Beispiel bei Planungsrechnungen oder bei der Beurteilung waldbaulicher Alternativen.

Zusammenfassung

Die Weibull-, Johnson's SB- und Beta-Funktionen wurden 774 Durchmesserverteilungen von *Pinus patula*-Beständen angepaßt. Die Weibull-Funktion ergab den besten Ausgleich, aber auch Johnson's SB-Funktion erwies sich als sehr brauchbar. Kovarianzanalysen erga-

ben, daß die Prüfzahlen Chi-Quadrat und logarithmische Wahrscheinlichkeitshäufigkeit von der Stammzahl beeinflußt werden. Nur die Kolmogoroff-Smirnoff-Prüfzahl kann als unvoreingenommene Maßzahl für die Bewertung der Güte der Anpassung angesehen werden.

Summary

Fitting diameter distributions of even-aged pine stands

The Weibull, Johnson's SB and Beta functions were fit to 774 diameter distributions of *Pinus patula* stands. The Weibull function gave the best fit, but Johnson's SB function was also found very suitable. Analyses of covariance revealed that the test criteria chi square and log likelihood ratio are affected by stem number. Only the Kolmogoroff-Smirnoff criterion can be considered an unbiased statistic for evaluating goodness of fit.

Literatur

Bailey, R. L., Dell, T. R., 1973: Quantifying diameter distributions with the Weibull function. Forest Science **19** (2): 97–104.

Bliss, C. I., Reinker, K. A., 1964: A lognormal approach to diameter distributions in even-aged stands. Forest Science **10**: 350–360.

Burkhart, H. E., 1971: Slash pine plantation yield estimates based on diameter distributions – an evaluation. Forest Science **17** (4): 452–453.

Burkhart, H. E.; Strub, M. R., 1973: A model for simulation of planted loblolly pine stands. Mitt. der IUFRO Gruppe S 4.01 – 4, Stockholm: 128–135.

Chen, C. M.; Rose, D. W., 1978: Direct and indirect estimation of height distributions in even-aged stands. Minnesota Forestry Research notes No. 267: 3pp.

Clutter, J. L.; Bennett, F. A., 1965: Diameter distributions in old-field slash pine plantations. Georgia For. Res. Council Rep. **13**: 9pp.

Hafley, W. L.; Schreuder, H. T., 1977: Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. Can. J. For. Res. 7: 481–487.

Johnson, N. L., 1949: Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika **36**: 149–176.

Kennel, R., 1972: Die Buchendurchforstungsversuche in Bayern von 1870 bis 1970. Forschungsberichte der Forstlichen Forschungsanstalt München, Nr. 7.

Lienert, G. A., 1973: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik, B. I. Meisenheim: Verlag Anton Hain.

Menon, M. V., 1963: Estimates of the shape and scale parameters of the Weibull distribution. Technometrics **5**: 175–82.

Müller, G. R., 1973: A special case of the Beta distribution. Mitt. der IUFRO Gruppe S 6.02 Vancouver: 85–97.

Nelson, T. C., 1964: Diameter distribution and growth of loblolly pine. Forest Science 10 (1): 105–114.

Pierce, C. B., 1976: The Weibull distribution and the determination of its parameters for application to timber strength data. Current paper, Building Research Establishment, UK, No CP26/76: 20pp.

Preussner, K., 1974: Aufstellen und experimentelle Überprüfung mathematischer Modelle für die Entwicklung der Durchmesserverteilung von Fichtenbeständen. Diss., Eberswalde.

Sachs, L., 1969: Statistische Auswertungsmethoden. 2. Aufl., Berlin: Springer Verlag.

Sokal, R. R.; Rohlf, F. J., 1969: Biometry. San Francisco: Freeman & Co.

Van Laar, A., 1979: Biometrische Methoden in der Forstwissenschaft. Teil I – Verfahrensgrundlagen. Forschungsberichte der Forstlichen Forschungsanstalt München, Nr. 44/I.

Weibull, W., 1951: A statistical distribution function of wide applicability. Journal of applied mechanics vol **18**: 293–297.

Zöhrer, F., 1969: Ausgleich von Häufigkeitsverteilungen mit Hilfe der Beta-Funktion. Forstarchiv 40(3): 37–42.

Anschrift des Verfassers: Dr. K. von Gadow, c/o Lehrstuhl für Waldwachstumskunde, Amalienstraße 52, D-8000 München 40