

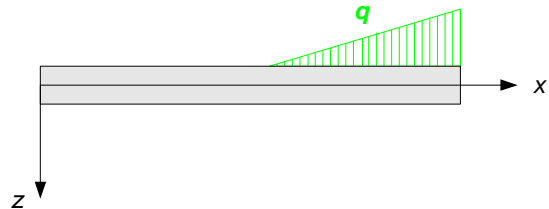
3 Balkenschwingungen

3.1 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für den Euler-Bernoulli-Balken lautet

$$\rho A \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q \quad .$$

Dabei ist $w(x, t)$ die Verschiebung in z-Richtung und $q(x, t)$ die auf den Balken wirkende Streckenlast.



3.2 Freie Biegeschwingungen

Freie Biegeschwingungen sind Biegeschwingungen, die der Balken ausführt, wenn keine Last auf ihn einwirkt. Die Bewegungsgleichung für die freien Biegeschwingungen lautet also

$$\rho A \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad .$$

Für einen homogenen Balken, bei dem der Elastizitätsmodul E , die Dichte ρ , die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I_y konstant sind, vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Für diese Gleichung lassen sich analytische Lösungen angeben.

3.2.1 Allgemeine Lösung

Der Lösungsansatz

$$w(x, t) = W(x) (\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t))$$

führt auf

$$\left(\frac{d^4 W}{dx^4}(x) - \omega^2 \frac{\rho A}{EI_y} W(x) \right) (\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)) = 0 \quad .$$

Mit

$$\kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_y}$$

folgt daraus die Schwingungsgleichung für den homogenen Balken:

$$\boxed{\frac{d^4 W}{dx^4} - \kappa^4 W = 0}$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung hat die Form

$$W(x) = C_s \sin \kappa x + C_c \cos \kappa x + D_s \sinh \kappa x + D_c \cosh \kappa x \quad .$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_s , C_c , D_s und D_c müssen vier Randbedingungen angegeben werden. Das führt auf ein homogenes lineares Gleichungssystem, das nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn seine Determinante verschwindet.

Die Bedingung, dass die Determinante verschwindet, liefert die charakteristische Gleichung zur Bestimmung von κ . Wie beim Stab ist die charakteristische Gleichung eine transzendente Gleichung, die unendlich viele Lösungen κ_ν besitzt. Zu jeder Lösung gehört eine Eigenfunktion $W_\nu(x)$. Wie beim Stab sind die Eigenfunktionen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^L W_\mu(x) W_\nu(x) dx = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu \quad .$$

Die Eigenfunktionen sind ein vollständiges Funktionensystem, d.h. jede beliebige Durchbiegung des Balkens kann als Überlagerung der Eigenfunktionen dargestellt werden. Damit lässt sich jede Bewegung $w(x, t)$, die sich einstellt, wenn der Balken aus einer Anfangslage $w_0(x)$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$ sich selbst überlassen wird, als Überlagerung der Eigenschwingungen darstellen:

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x) (\alpha_\nu \sin(\omega_\nu t) + \beta_\nu \cos(\omega_\nu t))$$

Dabei gilt für die Kreisfrequenzen

$$\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \kappa_\nu^2 c i_y$$

mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{EI/\rho}$ des Stabes und dem Trägheitsradius $i_y = \sqrt{I_y/A}$.

Die Koeffizienten α_ν und β_ν lassen sich aus den Anfangsbedingungen ermitteln, wobei die Orthogonalität der Eigenfunktionen ausgenutzt wird.

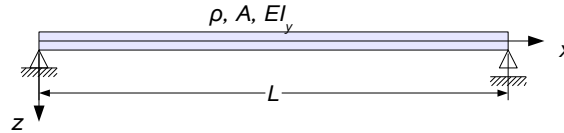
$$\text{Aus } w_0(x) = w(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x) \beta_\nu \quad \text{folgt: } \int_0^L w_0(x) W_\nu(x) dx = \int_0^L W_\nu^2(x) dx \beta_\nu$$

$$\text{Aus } v_0(x) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x) \omega_\nu \alpha_\nu \quad \text{folgt: } \int_0^L v_0(x) W_\nu(x) dx = \int_0^L W_\nu^2(x) dx \omega_\nu \alpha_\nu$$

Die Eigenfunktionen $W_\nu(x)$ und die Eigenkreisfrequenzen ω_ν hängen von den Randbedingungen ab.

3.2.2 Eigenfunktionen für verschiedene Randbedingungen

Beidseitig gelenkige Lagerung:



Randbedingungen:

$$x=0 : W(0)=0, M(0)=0 \rightarrow \frac{d^2W}{dx^2}(0)=0$$

$$x=L : W(L)=0, M(L)=0 \rightarrow \frac{d^2W}{dx^2}(L)=0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\sin(\kappa_v L) \sinh(\kappa_v L) = 0$$

Eigenschwingungen:

$$\sin(\kappa_v L) = 0 :$$

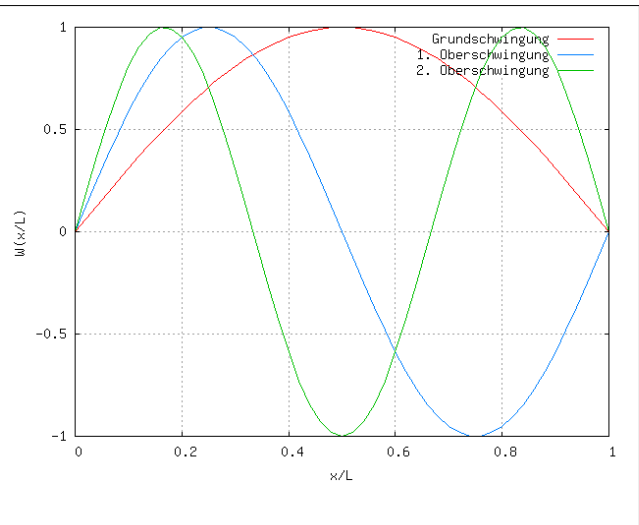
$$\kappa_v = v \frac{\pi}{L}, v = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$$

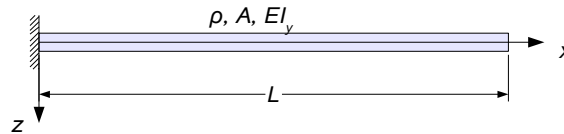
$$\omega_v = v^2 \omega_1, v = 1, 2, 3, \dots$$

$$W_v(x) = \sin(\kappa_v x) = \sin\left(v \pi \frac{x}{L}\right), v = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^L W_v^2(x) dx = \frac{L}{2}$$



Kragbalken:



Randbedingungen:

$$x=0 : W(0)=0, \frac{dW}{dx}(0)=0$$

$$x=L : M(L)=0 \rightarrow \frac{d^2W}{dx^2}(L)=0, Q(L)=0 \rightarrow \frac{d^3W}{dx^3}(L)=0$$

Charakteristische Gleichung:

$$1 + \cos(\kappa L) \cosh(\kappa L) = 0$$

Eigenschwingungen:

$\kappa_1 L = 1,8751, \quad \kappa_2 L = 4,6941$ $\kappa_3 L = 7,8548, \quad \kappa_4 L = 10,996$ $\kappa_\nu \approx (2\nu - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad \nu = 4, 5, 6, \dots$ $\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$ $W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu (\sin(\kappa_\nu x) - \sinh(\kappa_\nu x))$ $\gamma_\nu = \frac{\cos(\kappa_\nu L) + \cosh(\kappa_\nu L)}{\sin(\kappa_\nu L) + \sinh(\kappa_\nu L)}$ $\int_0^L W_\nu^2(x) dx = L$	
---	--

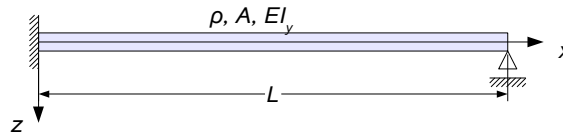
Für große Werte von κ_ν ist die folgende Darstellung der Eigenfunktionen numerisch günstiger:

$$W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu \sin(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) (1 - \gamma_\nu \tanh(\kappa_\nu x))$$

Für $\nu > 4$ gilt in guter Näherung:

$$W_\nu(x) \approx \cos(\kappa_\nu x) - \sin(\kappa_\nu x) - (\sin(\kappa_\nu L) - \cos(\kappa_\nu L)) e^{-\kappa_\nu(L-x)} - e^{-\kappa_\nu x}$$

Kragbalken mit zusätzlicher gelenkiger Lagerung:



Randbedingungen:

$$x=0 : W(0)=0, \frac{dW}{dx}(0)=0$$

$$x=L : W(L)=0, M(L)=0 \rightarrow \frac{d^2W}{dx^2}(L)=0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\tan(\kappa L) - \tanh(\kappa L) = 0$$

Eigenschwingungen:

$\kappa_1 L = 3,9266, \quad \kappa_2 L = 7,0686$ $\kappa_3 L = 10,210$ $\kappa_\nu L \approx (4\nu + 1) \frac{\pi}{4}, \quad \nu = 4, 5, 6, \dots$ $\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$ $W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu (\sin(\kappa_\nu x) - \sinh(\kappa_\nu x))$ $\gamma_\nu = \frac{\cos(\kappa_\nu L) + \cosh(\kappa_\nu L)}{\sin(\kappa_\nu L) + \sinh(\kappa_\nu L)}$ $\int_0^L W_\nu^2(x) dx = L$	
---	--

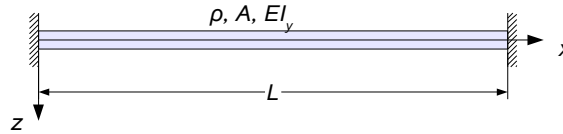
Für große Werte von κ_ν ist die folgende Darstellung der Eigenfunktionen numerisch günstiger:

$$W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu \sin(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) (1 - \gamma_\nu \tanh(\kappa_\nu x))$$

Für $\nu > 4$ gilt in guter Näherung:

$$W_\nu(x) \approx \cos(\kappa_\nu x) - \sin(\kappa_\nu x) - (\sin(\kappa_\nu L) - \cos(\kappa_\nu L)) e^{-\kappa_\nu(L-x)} - e^{-\kappa_\nu x}$$

Beidseitig eingespannter Balken:



Randbedingungen:

$$x=0 : W(0)=0, \frac{dW}{dx}(0)=0$$

$$x=L : W(L)=0, \frac{dW}{dx}(L)=0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\cos(\kappa L)\cosh(\kappa L) - 1 = 0$$

Eigenschwingungen:

$\kappa_1 L = 4,7300, \quad \kappa_2 L = 7,8532$ $\kappa_3 L = 10,996$ $\kappa_\nu L \approx (2\nu + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 4, 5, 6, \dots$ $\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$ $W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu (\sin(\kappa_\nu x) - \sinh(\kappa_\nu x))$ $\gamma_\nu = \frac{\cos(\kappa_\nu L) - \cosh(\kappa_\nu L)}{\sin(\kappa_\nu L) - \sinh(\kappa_\nu L)}$ $\int_0^L W_\nu^2(x) dx = L$	
---	--

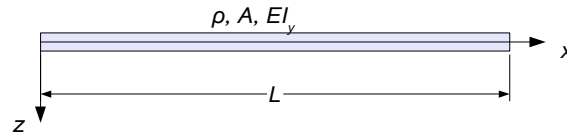
Für große Werte von κ_ν ist die folgende Darstellung der Eigenfunktionen numerisch günstiger:

$$W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu \sin(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) (1 - \gamma_\nu \tanh(\kappa_\nu x))$$

Für $\nu > 4$ gilt in guter Näherung:

$$W_\nu(x) \approx \cos(\kappa_\nu x) - \sin(\kappa_\nu x) + (\sin(\kappa_\nu L) - \cos(\kappa_\nu L)) e^{-\kappa_\nu(L-x)} - e^{-\kappa_\nu x}$$

Freier Balken:



Randbedingungen:

$$x=0 : M(0)=0 \rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2}(0)=0, \quad Q(0)=0 \rightarrow \frac{d^3 W}{dx^3}(0)=0$$

$$x=L : M(L)=0 \rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2}(L)=0, \quad Q(L)=0 \rightarrow \frac{d^3 W}{dx^3}(L)=0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\cos(\kappa L)\cosh(\kappa L) - 1 = 0$$

Eigenschwingungen:

$\kappa_1 L = 4,7300, \quad \kappa_2 L = 7,8532$ $\kappa_3 L = 10,996$ $\kappa_\nu L \approx (2\nu + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 4, 5, 6, \dots$ $\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$ $W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) + \cosh(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu (\sin(\kappa_\nu x) + \sinh(\kappa_\nu x))$ $\gamma_\nu = \frac{\cos(\kappa_\nu L) - \cosh(\kappa_\nu L)}{\sin(\kappa_\nu L) - \sinh(\kappa_\nu L)}$ $\int_0^L W_\nu^2(x) dx = L$	
---	--

Dazu kommen zwei Starrkörperbewegungen zu $\kappa_0=0$:

$$W_{01}(x) = 1, \quad W_{02}(x) = \sqrt{3} \frac{x}{L}$$

Für große Werte von κ_ν ist die folgende Darstellung der Eigenfunktionen numerisch günstiger:

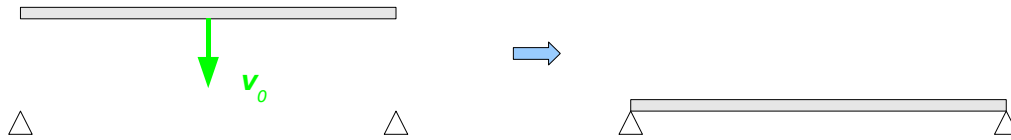
$$W_\nu(x) = \cos(\kappa_\nu x) - \gamma_\nu \sin(\kappa_\nu x) + \cosh(\kappa_\nu x) (1 - \gamma_\nu \tanh(\kappa_\nu x))$$

Für $\nu > 4$ gilt in guter Näherung:

$$W_\nu(x) \approx \cos(\kappa_\nu x) - \sin(\kappa_\nu x) - (\sin(\kappa_\nu L) - \cos(\kappa_\nu L)) e^{-\kappa_\nu(L-x)} + e^{-\kappa_\nu x}$$

3.2.3 Lösung bei vorgegebener Anfangsbedingung

Als Beispiel wird ein einseitig gelenkig gelagerter Balken betrachtet, der mit der konstanten Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf eine beidseitig gelenkige Lagerung trifft. Unmittelbar nach dem Auftreffen rastet der Balken in der Lagerung ein und wird festgehalten.



Nach dem Auftreffen liegt ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken vor.

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$w(x, 0) = w_0(x) = 0 \quad , \quad \dot{w}(x, 0) = v_0 = \text{const.}$$

Aus der Anfangsbedingung für die Verschiebung folgt sofort: $\beta_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$

Aus der Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit folgt

$$v_0 \int_0^L \sin(\kappa_\nu x) dx = \omega_\nu \alpha_\nu \int_0^L \sin^2(\kappa_\nu x) dx \quad .$$

Mit

$$\int_0^L \sin(\kappa_\nu x) dx = \left[-\frac{1}{\kappa_\nu} \cos(\kappa_\nu x) \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{\kappa_\nu} (1 - \cos(\kappa_\nu L))$$

und

$$\int_0^L \sin^2(\kappa_\nu x) dx = \frac{L}{2}$$

folgt weiter:

$$\alpha_\nu = \frac{v_0}{\kappa_\nu} \frac{1 - \cos(\kappa_\nu L)}{\omega_\nu L/2} = \frac{2v_0}{L} \frac{1}{\nu \pi} \frac{1}{\nu^2 \omega_1} (1 - \cos(\nu \pi)) = \frac{2v_0}{\pi \omega_1} \frac{1 - \cos(\nu \pi)}{\nu^3}$$

Wegen $\cos(\nu \pi) = (-1)^\nu$ gilt also:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{4v_0}{\pi \omega_1 \nu^3}, & \nu = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \nu = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Mit $\nu = 2\mu - 1, \mu = 1, 2, 3, \dots$ und $\omega_1 = 2\pi/T_1$, wobei T_1 die Periode der Grundschwingung ist, folgt schließlich:

$$\alpha_{2\mu-1} = \frac{2}{\pi^2} \frac{v_0 T_1}{(2\mu-1)^3}$$

Damit gilt für die Verschiebungen:

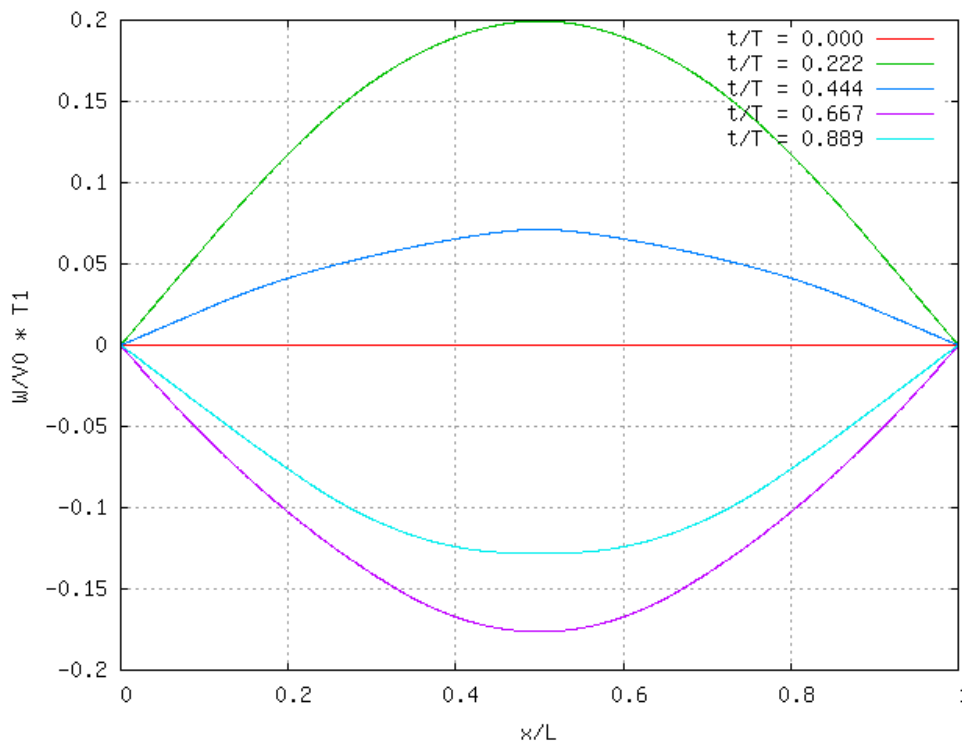
$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} W_{\nu}(x) \sin(\omega_{\nu} t) = v_0 T_1 \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin(\kappa_{2\mu-1} x)}{(2\mu-1)^3} \sin\left(2\pi(2\mu-1)^2 \frac{t}{T_1}\right)$$

$$= v_0 T_1 \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi(2\mu-1) \frac{x}{L}\right)}{(2\mu-1)^3} \sin\left(2\pi(2\mu-1)^2 \frac{t}{T_1}\right)$$

Für die Geschwindigkeit folgt:

$$\dot{w}(x, t) = v_0 \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi(2\mu-1) \frac{x}{L}\right)}{2\mu-1} \cos\left(2\pi(2\mu-1)^2 \frac{t}{T_1}\right)$$

Die folgende Abbildung zeigt die Verschiebungen zu verschiedenen Zeitpunkten.

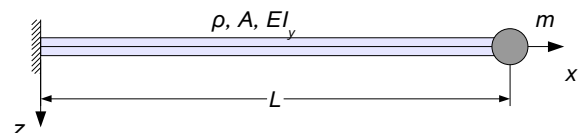


3.2.4 Kragbalken mit Endmasse

Betrachtet wird ein Kragbalken, an dessen freiem Ende sich eine Punktmasse befindet.

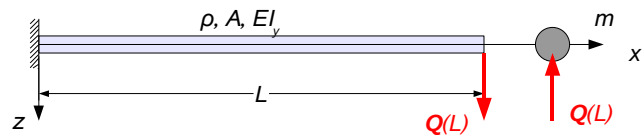
Die Randbedingungen am linken Rand stimmen mit denen des Kragbalkens überein:

$$x=0 : W(0)=0, \frac{dW}{dx}(0)=0$$



Am rechten Rand gilt wie beim Kragbalken: $M(L)=0 \rightarrow \frac{d^2 W}{dx^2}(L)=0$

Zur Herleitung der zweiten Randbedingung am rechten Rand wird die Masse freigeschnitten. Der Impulssatz für die Masse lautet:



$$m \ddot{w}(L, t) = -Q(L, t)$$

Mit

$$Q(x, t) = -EI_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x, t) = -EI_y \frac{d^3 W}{dx^3}(x) (\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t))$$

und

$$\ddot{w}(x, t) = -\omega^2 W(x) (\alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t))$$

folgt daraus:

$$EI_y \frac{d^3 W}{dx^3}(L) + \omega^2 m W(L) = 0$$

Mit $\omega^2 = \kappa^4 \frac{EI_y}{\rho A}$ und dem Massenverhältnis $\mu = \frac{m}{\rho AL}$ lautet diese Randbedingung

$$\frac{d^3 W}{dx^3}(L) + \kappa^4 \mu L W(L) = 0$$

Die vier Randbedingungen führen auf die charakteristische Gleichung

$$1 + \cos(\kappa L) \cosh(\kappa L) + \mu \kappa L (\cos(\kappa L) \sinh(\kappa L) - \sin(\kappa L) \cosh(\kappa L)) = 0$$

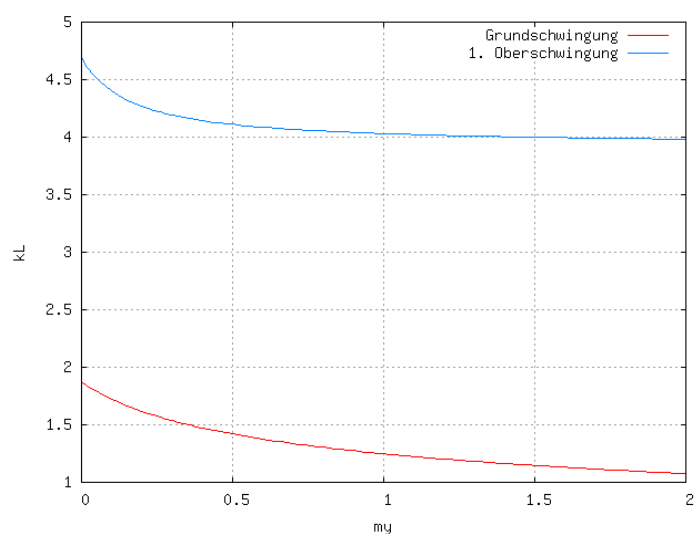
Für $\mu = 0$ stimmt diese charakteristische Gleichung mit der charakteristischen Gleichung für den Kragbalken überein.

Für $\mu \rightarrow \infty$ folgt:

$$\cos(\kappa L) \sinh(\kappa L) - \sin(\kappa L) \cosh(\kappa L) = 0 \rightarrow \tanh(\kappa L) - \tan(\kappa L) = 0$$

Eine im Verhältnis zur Masse des Balkens große Endmasse hat also die gleiche Wirkung wie ein gelenkiges Lager.

Das abgebildete Diagramm zeigt den Verlauf von κL in Abhängigkeit vom Massenverhältnis μ für die ersten beiden Schwingungen.



3.3 Erzwungene Biegeschwingungen

Untersucht wird die stationäre Antwort eines Balkens auf eine harmonische Belastung. Als Belastung können Streckenlasten oder Einzelkräfte auftreten.



Betrachtet wird nur die Lösung mit modaler Reduktion. Die Gleichungen für die modale Reduktion werden aus der schwachen Formulierung der Bewegungsgleichung hergeleitet.

3.3.1 Schwache Formulierung

Zunächst wird vorausgesetzt, dass Einzelkräfte nur am Rand des Balkens angreifen. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\rho A \ddot{w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q_0 \cos \Omega t \quad .$$

Dazu kommen die Randbedingungen an den Stellen $x=0$ und $x=L$ sowie die Anfangsbedingungen.

Wie beim Stab besteht die allgemeine Lösung wieder aus einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung sowie einer Lösung der homogenen Gleichung.

Die Lösung der homogenen Gleichung kann so gewählt werden, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Sie klingt infolge der Dämpfung mit der Zeit ab, so dass nur noch die partikuläre Lösung bleibt. Die partikuläre Lösung beschreibt das Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Sie hängt nicht von den Anfangsbedingungen ab.

Für die partikuläre Lösung wird der Ansatz

$$w(x, t) = W(x) \cos \Omega t$$

gemacht. Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \cos \Omega t - \Omega^2 \rho A W \cos \Omega t = q_0 \cos \Omega t \quad .$$

Da diese Gleichung für beliebige Zeitpunkte t erfüllt sein muss, muss die Amplitude $W(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} (x) \right) - \Omega^2 \rho A W(x) = q_0(x)}$$

erfüllen.

Zur Herleitung der schwachen Formulierung wird diese Differentialgleichung mit einer zunächst beliebigen Funktion $\tilde{W}(x)$ multipliziert und über die Länge des Balkens integriert. Das Ergebnis ist

$$\int_0^L \tilde{W}(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2}(x) \right) dx - \Omega^2 \int_0^L \rho A \tilde{W}(x) W(x) dx = \int_0^L \tilde{W}(x) q_0(x) dx \quad .$$

Partielle Integration des ersten Integrals ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^L \tilde{W} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx &= \int_0^L \frac{d}{dx} \left[\tilde{W} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \right] dx - \int_0^L \frac{d\tilde{W}}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx \\ &= \left[\tilde{W} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \right]_0^L - \int_0^L \frac{d\tilde{W}}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite kann noch einmal partiell integriert werden:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d\tilde{W}}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx &= \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d\tilde{W}}{dx} EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx - \int_0^L \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{d\tilde{W}}{dx} EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right]_0^L - \int_0^L \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx \end{aligned}$$

Mit der Querkraft

$$\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = -Q_0(x)$$

und dem Biegemoment $EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} = -M_0(x)$

gilt also:

$$\int_0^L \tilde{W} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx = - \left[\tilde{W}(x) Q_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\frac{d\tilde{W}}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L EI_y \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} dx$$

An den Rändern, an denen die Verschiebung vorgegeben ist, kann nicht zusätzlich die Querkraft vorgegeben werden. Umgekehrt muss an den Rändern, an denen die Verschiebung nicht vorgegeben ist, die Querkraft bekannt sein.

Ebenso kann an den Rändern, an denen die Verdrehung dW/dx vorgegeben ist, nicht zusätzlich das Biegemoment vorgeschrieben werden, während an den Rändern, an denen die Verdrehung unbekannt ist, das Biegemoment bekannt sein muss.

Wenn die Verschiebung $\tilde{W}(x)$ so gewählt wird, dass sie an den Rändern, an denen die Verschiebung $W(x)$ vorgegeben ist, Null ist, und ihre Ableitung $d\tilde{W}/dx$ an den Rändern Null ist, an denen die Verdrehung vorgegeben ist, dann lassen sich die Beiträge von den Rändern berechnen.

Die Randbedingungen

$$W(0)=0 \quad , \quad W(L)=0 \quad , \quad \frac{dW}{dx}(0)=0 \quad , \quad \frac{dW}{dx}(L)=0$$

werden als wesentliche Randbedingungen bezeichnet. Die verbleibenden Randbedingungen

$$Q_0(0)=0 \quad , \quad Q_0(L)=0 \quad , \quad M_0(0)=0 \quad , \quad M_0(L)=0$$

werden als natürliche Randbedingungen bezeichnet. An einem Rand können nicht gleichzeitig wesentliche und natürliche Randbedingungen vorgeschrieben werden.

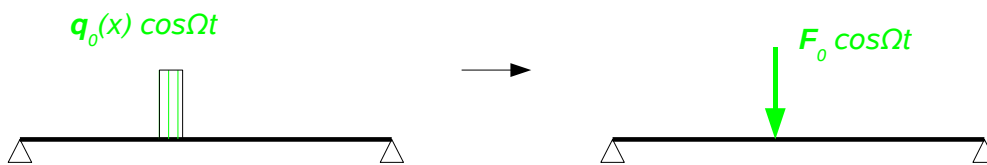
Damit lässt sich die schwache Formulierung der Differentialgleichung für die Amplitude der erzwungenen Biegeschwingung des Balkens folgendermaßen angeben:

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} dx - \Omega^2 \int_0^L \rho A \tilde{W} W dx = [\tilde{W}(x) Q_0(x)]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{d \tilde{W}}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{W} q_0 dx$$

für alle $\tilde{W}(x)$, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen

Es bleibt zu untersuchen, wie die schwache Formulierung zu erweitern ist, wenn am Balken auch Einzelkräfte angreifen.

Einzelkräfte sind Idealisierungen für Streckenlasten, die auf einen kleinen Bereich begrenzt sind.



Eine vorgegebene Einzelkraft kann durch eine auf einem kleinen Bereich Δx wirkende konstante Streckenlast mit der Amplitude

$$q_0 = \frac{F_0}{\Delta x}$$

ersetzt werden. Damit folgt für eine an der Stelle x_F angreifende Einzelkraft:

$$\int_0^L \tilde{W} q_0 dx = \int_{x_F - \Delta x/2}^{x_F + \Delta x/2} \tilde{W} \frac{F_0}{\Delta x} dx = \tilde{W}(x_F) F_0$$

Wenn am Balken N_F Einzelkräfte F_{0i} an den Stellen x_i angreifen, dann lautet die schwache Formulierung:

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} dx - \Omega^2 \int_0^L \rho A \tilde{W} W dx = [\tilde{W}(x) Q_0(x)]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{d \tilde{W}}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \tilde{W}(x) q_0(x) dx + \sum_{i=1}^{N_F} \tilde{W}(x_i) F_{0i}$$

für alle $\tilde{W}(x)$, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen

Wenn die rechte Seite zu Null gesetzt wird, so folgt daraus die schwache Formulierung für die freien Schwingungen:

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \frac{d^2 W_v}{dx^2} dx - \omega_v^2 \int_0^L \rho A \tilde{W} W_v dx = 0$$

Diese Gleichung muss für alle $\tilde{W}(x)$ gelten, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen. Da die Eigenfunktionen selbst die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, kann $\tilde{W}(x) = W_\mu(x)$ eingesetzt werden. Damit folgt:

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 W_\mu}{dx^2} \frac{d^2 W_\nu}{dx^2} dx - \omega_\nu^2 \int_0^L \rho A W_\mu W_\nu dx = 0$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass für Balken mit veränderlichem Querschnitt oder veränderlicher Dichte die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^L \rho A W_\mu W_\nu dx = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu$$

gilt. Damit gilt auch

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 W_\mu}{dx^2} \frac{d^2 W_\nu}{dx^2} dx = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu .$$

Für $\mu = \nu$ folgt:

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_\nu}{dx^2} \right)^2 dx = \omega_\nu^2 \int_0^L \rho A W_\nu^2 dx$$

3.3.2 Modale Reduktion

Es lässt sich mathematisch beweisen, dass jede Funktion, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, als Überlagerung der Eigenfunktionen dargestellt werden kann. Die Amplitude der erzwungenen Biegeschwingung kann also als unendliche Reihe

$$W(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu W_\nu(x)$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten q_ν können aus der schwachen Formulierung berechnet werden, indem für $\tilde{W}(x)$ die Eigenfunktionen $W_\nu(x)$ eingesetzt werden.

Wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen folgt:

$$\left[\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_\nu}{dx^2} \right)^2 dx - \Omega^2 \int_0^L \rho A W_\nu^2 dx \right] q_\nu = [W_\nu(x) Q_0(x)]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{dW_\nu}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L W_\nu(x) q_0(x) dx + \sum_{i=1}^{N_F} W_\nu(x_i) F_{0i}, \quad \nu = 1, \dots, \infty$$

$$\text{Mit } \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_\nu}{dx^2} \right)^2 dx = \omega_\nu^2 \int_0^L \rho A W_\nu^2 dx$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned} (\omega_\nu^2 - \Omega^2) q_\nu \int_0^L \rho A W_\nu^2 dx &= [W_\nu(x) Q_0(x)]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{dW_\nu}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &+ \int_0^L W_\nu(x) q_0(x) dx + \sum_{i=1}^{N_F} W_\nu(x_i) F_{0i}, \quad \nu = 1, \dots, \infty \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$W(x) = \sum_{v=1}^{\infty} q_v W_v(x)$$

$$q_v = V_1(\eta_v) q_{sv}, \quad V_1(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2}, \quad \eta_v = \frac{\Omega}{\omega_v}$$

$$q_{sv} = \frac{R_v}{\omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx}$$

$$R_v = [W_v(x) Q_0(x)]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{dW_v}{dx}(x) M_0(x) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L W_v(x) q_0(x) dx + \sum_{i=1}^{N_F} W_v(x_i) F_{0i}$$

Die Koeffizienten q_{sv} sind die Entwicklungskoeffizienten der statischen Lösung. Die Lasten R_v werden als modale Lasten bezeichnet.

Werden nur die ersten N Glieder der Reihe berücksichtigt, so ergibt sich die Näherungslösung $W^{(N)}(x)$ der modalen Reduktion.

Beispiel: Gelenkig gelagerter Balken

Ein beidseitig gelenkig gelagerter homogener Balken wird durch eine in der Mitte angreifende harmonische Einzelkraft der Amplitude F_0 angeregt.

Gesucht sind die Amplituden der Verschiebung, des Biegemoments und der Querkraft für den eingeschwungenen Zustand.

Aus Abschnitt 3.2.2 bekannt sind die Eigenfunktionen

$$W_v(x) = \sin\left(v\pi \frac{x}{L}\right), \quad v=1, \dots, \infty$$

und die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_v = v^2 \omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} .$$

Für den homogenen Balken gilt

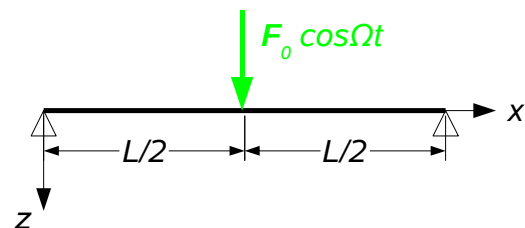
$$\int_0^L \rho A W_v^2 dx = \rho A \int_0^L W_v^2 dx = \rho A \frac{L}{2} .$$

Die Eigenfunktionen erfüllen die wesentlichen Randbedingungen

$$W_v(0) = W_v(L) = 0 .$$

Für die Momente am Rand gilt

$$M_0(0) = M_0(L) = 0 .$$



Da die Streckenlast $q_0(x)$ Null ist, liefert nur die Einzelkraft einen Beitrag zu den modalen Lasten:

$$R_\nu = W_\nu \left(\frac{L}{2} \right) F_0 = \sin \left(\nu \frac{\pi}{2} \right) F_0$$

Alle modalen Lasten für gerades ν sind Null. Für ungerades ν haben die modalen Lasten den Wert $\pm F_0$. Mit $\nu = 2\mu - 1$ gilt:

$$R_{2\mu-1} = -(-1)^\mu F_0$$

Für die Entwicklungskoeffizienten der statischen Lösung folgt

$$q_{s2\mu-1} = \frac{2}{\rho A L} \frac{R_{2\mu-1}}{\omega_{2\mu-1}^2} = -\frac{2}{\rho A L} \frac{(-1)^\mu F_0}{\omega_1^2} \frac{1}{(2\mu-1)^4} = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \frac{-(-1)^\mu}{(2\mu-1)^4} .$$

Damit gilt für die Verschiebungsamplitude:

$$W(x) = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{-(-1)^\mu}{(2\mu-1)^4} V_1(\eta_{2\mu-1}) \sin \left((2\mu-1) \pi \frac{x}{L} \right)$$

In der Mitte des Balkens gilt

$$W \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{V_1(\eta_{2\mu-1})}{(2\mu-1)^4} .$$

Daraus folgt für die statische Verschiebung in Balkenmitte:

$$W_s \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^4}$$

Mit

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

(s. z.B. Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik) folgt weiter

$$W_{sm} = W_s \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{F_0 L^3}{48 EI_y} .$$

Das Biegemoment berechnet sich zu

$$M_0(x) = -EI_y \frac{d^2 W}{dx^2}(x) = -F_0 L \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^2} V_1(\eta_{2\mu-1}) \sin \left((2\mu-1) \pi \frac{x}{L} \right) .$$

Für das Biegemoment in Balkenmitte gilt

$$M_0 \left(\frac{L}{2} \right) = F_0 L \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{V_1(\eta_{2\mu-1})}{(2\mu-1)^2} .$$

Daraus folgt für das statische Biegemoment in Balkenmitte:

$$M_{sm} = F_0 L \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^2} = F_0 L \frac{2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} F_0 L$$

Dabei wurde die Beziehung

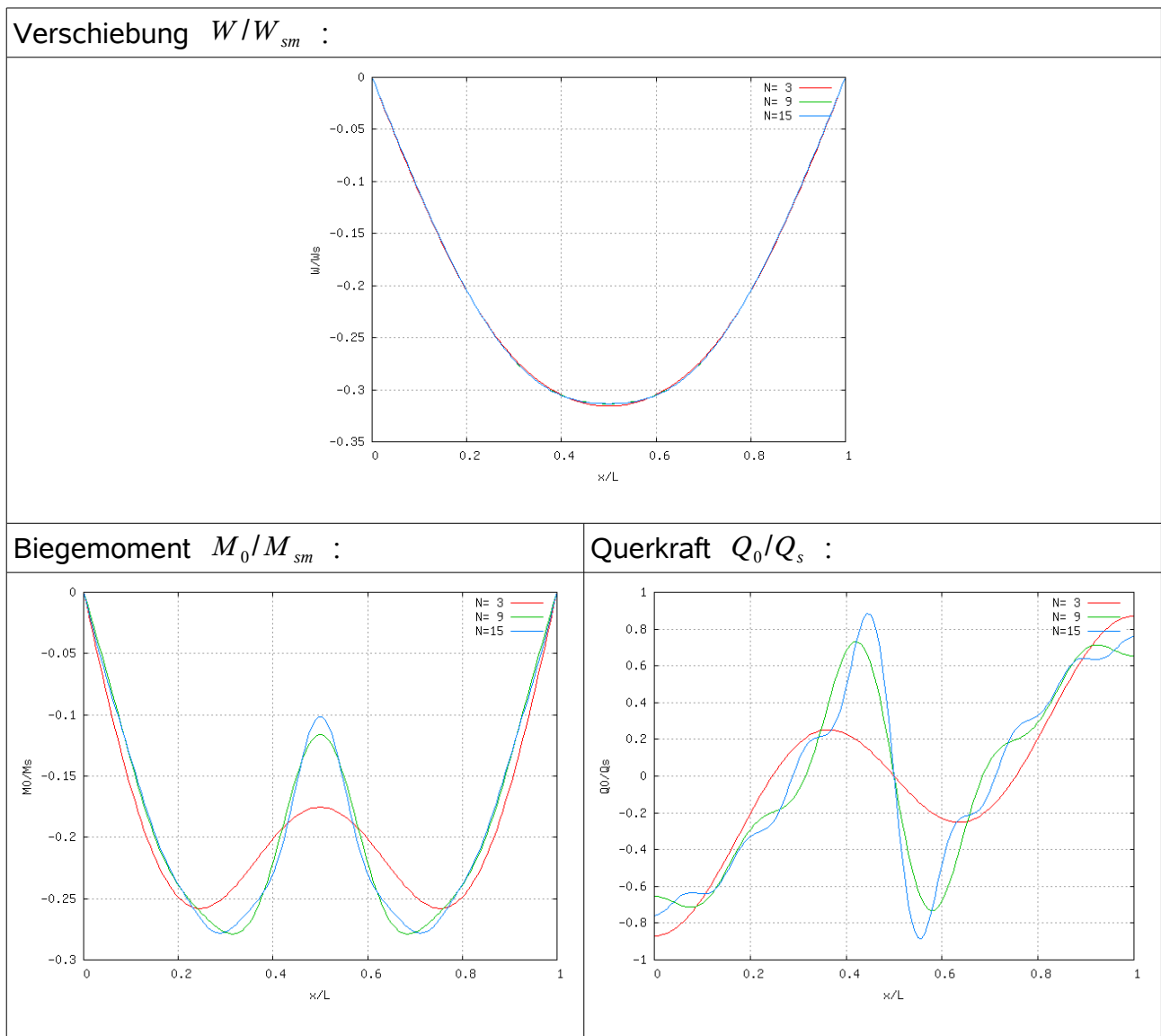
$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

benutzt (s. z.B. Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik).

Die Querkraft berechnet sich zu

$$Q_0(x) = \frac{dM_0}{dx}(x) = -F_0 \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{2\mu-1} V_1(\eta_{2\mu-1}) \cos\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) .$$

Die folgenden Diagramme zeigen die Verschiebung, das Biegemoment und die Querkraft für eine Erregerfrequenz $\Omega = 2\omega_1$. Die Ergebnisse sind mit den statischen Werten W_{sm} , M_{sm} und $Q_s = F_0/2$ skaliert.

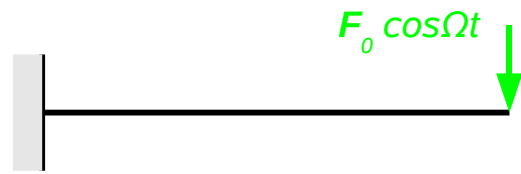


Während bei den Verschiebungen eine gute Konvergenz zu beobachten ist, konvergieren das Biegemoment und insbesondere die Querkraft deutlich schlechter.

Beispiel: Kragbalken mit Endlast

Ein homogener Kragbalken wird durch eine am freien Ende angreifende harmonische Kraft der Amplitude F_0 angeregt.

Gesucht sind die Amplituden der Verschiebung, des Biegemoments und der Querkraft für den eingeschwungenen Zustand.



Aus Abschnitt 3.2.2 bekannt sind die Eigenfunktionen

$$W_v(x) = \cos(\kappa_v x) - \cosh(\kappa_v x) - \gamma_v (\sin(\kappa_v x) - \sinh(\kappa_v x))$$

mit
$$\gamma_v = \frac{\cos(\kappa_v L) + \cosh(\kappa_v L)}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)} .$$

Die Werte von κ_v sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$1 + \cos(\kappa_v L) \cosh(\kappa_v L) = 0 .$$

Die Eigenkreisfrequenzen berechnen sich zu

$$\omega_v = \kappa_v^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} .$$

Für den homogenen Balken gilt

$$\int_0^L \rho A W_v^2 dx = \rho A \int_0^L W_v^2 dx = \rho A L .$$

Die Eigenfunktionen erfüllen die wesentlichen Randbedingungen

$$W_v(0) = 0, \quad \frac{dW_v}{dx}(0) = 0 .$$

Am freien Ende des Balkens gilt

$$M_0(L) = 0 \quad \text{und} \quad Q_0(L) = F_0 .$$

Damit berechnen sich die modalen Lasten zu

$$R_v = W_v(L) F_0 .$$

Für die Verschiebung am freien Ende gilt:

$$\begin{aligned} W_v(L) &= \cos(\kappa_v L) - \cosh(\kappa_v L) - \frac{\cos(\kappa_v L) + \cosh(\kappa_v L)}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)} (\sin(\kappa_v L) - \sinh(\kappa_v L)) \\ &= \frac{(\cos(\kappa_v L) - \cosh(\kappa_v L))(\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L))}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)} \\ &\quad - \frac{(\cos(\kappa_v L) + \cosh(\kappa_v L))(\sin(\kappa_v L) - \sinh(\kappa_v L))}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)} \\ &= \frac{-2 \cosh(\kappa_v L) \sin(\kappa_v L) + 2 \cos(\kappa_v L) \sinh(\kappa_v L)}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)} \end{aligned}$$

Unter Benutzung der charakteristischen Gleichung folgt zunächst

$$\cosh(\kappa_\nu L) \sin(\kappa_\nu L) - \cos(\kappa_\nu L) \sinh(\kappa_\nu L) = \cosh(\kappa_\nu L) \sin(\kappa_\nu L) + \frac{\sinh(\kappa_\nu L)}{\cosh(\kappa_\nu L)} .$$

Mit

$$\sin(\kappa_\nu L) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\kappa_\nu L)} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(\kappa_\nu L)}} = \pm \sqrt{\frac{\cosh^2(\kappa_\nu L) - 1}{\cosh^2(\kappa_\nu L)}} = \pm \frac{\sinh(\kappa_\nu L)}{\cosh(\kappa_\nu L)}$$

folgt weiter

$$\cosh(\kappa_\nu L) \sin(\kappa_\nu L) + \frac{\sinh(\kappa_\nu L)}{\cosh(\kappa_\nu L)} = \pm \sinh(\kappa_\nu L) + \tanh(\kappa_\nu L) .$$

Entsprechend gilt für den Nenner

$$\sin(\kappa_\nu L) + \sinh(\kappa_\nu L) = \pm \tanh(\kappa_\nu L) + \sinh(\kappa_\nu L) .$$

Das positive Vorzeichen gilt für ungerade Werte von ν und das negative für gerade Werte. Damit ist gezeigt:

$$W_\nu(L) = 2(-1)^\nu$$

Die Entwicklungskoeffizienten der statischen Lösung lauten also

$$q_{s\nu} = \frac{2(-1)^\nu F_0}{\omega_\nu^2} \frac{1}{\rho A L} = 2 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{(-1)^\nu}{(\kappa_\nu L)^4} .$$

Damit folgt für die Verschiebungsamplitude:

$$W(x) = 2 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\kappa_\nu L)^4} V_1(\eta_\nu) W_\nu(x)$$

Am freien Ende des Balkens gilt

$$W(L) = 4 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{V_1(\eta_\nu)}{(\kappa_\nu L)^4} .$$

Daraus folgt für die statische Verschiebung am freien Ende:

$$W_{smax} = W_s(L) = 4 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa_\nu L)^4} = \frac{1}{3} \frac{F_0 L^3}{EI_y}$$

Das Biegemoment berechnet sich zu

$$M_0(x) = -EI_y \frac{d^2 W}{dx^2}(x) = -2 F_0 L \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\kappa_\nu L)^2} V_1(\eta_\nu) \frac{1}{\kappa_\nu^2} \frac{d^2 W_\nu}{dx^2}(x)$$

mit

$$\frac{d^2 W_\nu}{dx^2}(x) = \kappa_\nu^2 [-\cos(\kappa_\nu x) - \cosh(\kappa_\nu x) + \gamma_\nu (\sin(\kappa_\nu x) + \sinh(\kappa_\nu x))] .$$

Mit $\frac{d^2 W_\nu}{dx^2}(0) = -2\kappa_\nu^2$ folgt für das Biegemoment an der Einspannstelle:

$$M_0(0) = 4 F_0 L \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\kappa_\nu L)^2} V_1(\eta_\nu) \quad .$$

Für das statische Biegemoment an der Einspannstelle gilt also:

$$M_{smax} = M_s(0) = 4 F_0 L \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\kappa_\nu L)^2} = -F_0 L$$

Die Querkraft berechnet sich zu

$$Q_0(x) = \frac{dM_0}{dx}(x) = -2 F_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\kappa_\nu L} V_1(\eta_\nu) \frac{1}{\kappa_\nu^3} \frac{d^3 W_\nu}{dx^3}(x)$$

mit

$$\frac{d^3 W}{dx^3}(x) = \kappa_\nu^3 [\sin(\kappa_\nu x) - \sinh(\kappa_\nu x) + \gamma_\nu (\cos(\kappa_\nu x) + \cosh(\kappa_\nu x))] \quad .$$

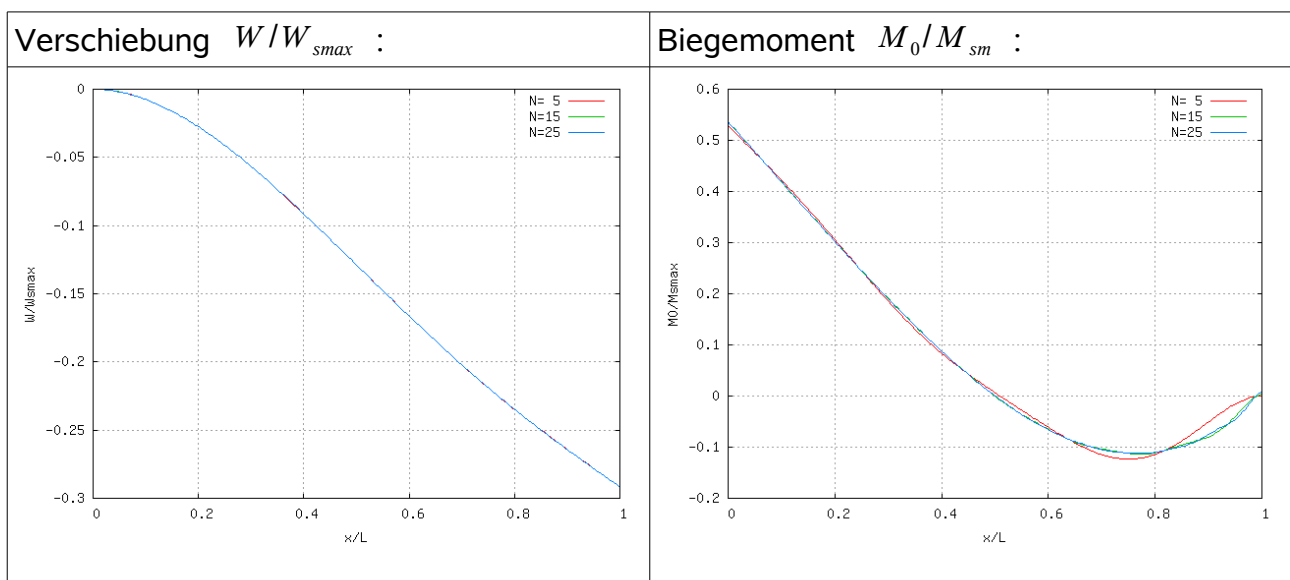
An der Einspannstelle gilt:

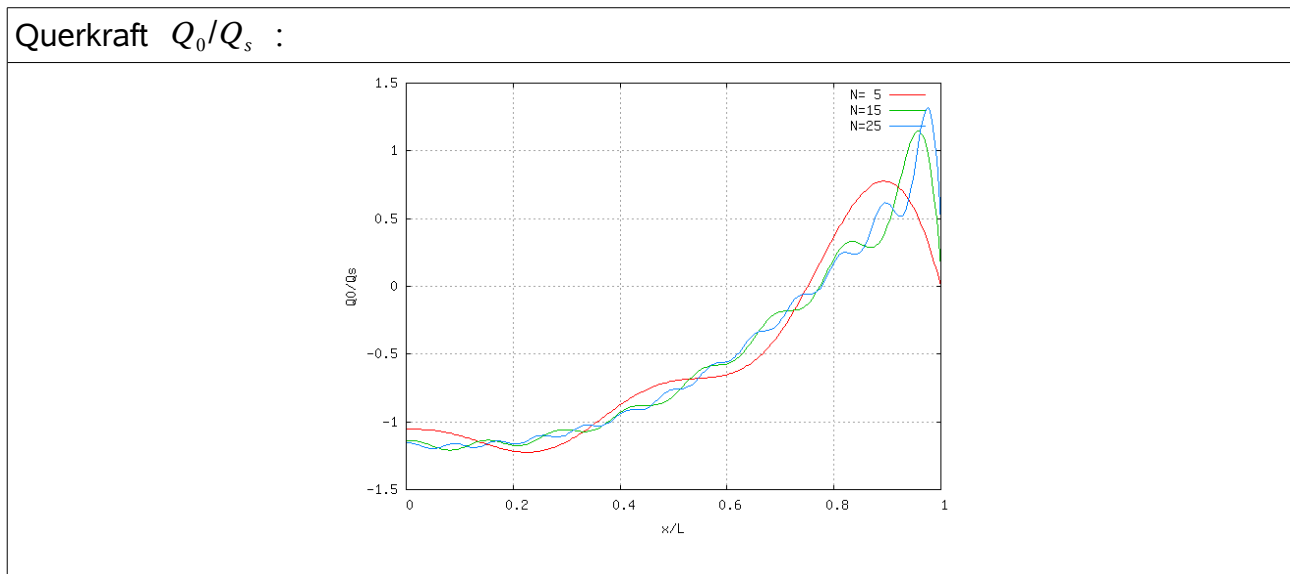
$$Q_0(0) = -4 F_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\kappa_\nu L} V_1(\eta_\nu) \gamma_\nu$$

Daraus folgt für die statische Querkraft an der Einspannstelle:

$$Q_s = -4 F_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\kappa_\nu L} \gamma_\nu = F_0$$

Die folgenden Diagramme zeigen die Verschiebung, das Biegemoment und die Querkraft für eine Erregerfrequenz $\Omega = 2\omega_1$. Die Ergebnisse sind mit den statischen Werten W_{smax} , M_{smax} und Q_s skaliert.





Wie beim beidseitig gelenkig gelagerten Balken kann beobachtet werden, dass die Verschiebungen gut konvergieren, während Biegemoment und Querkraft deutlich schlechter konvergieren. Die Querkraft konvergiert am schlechtesten.

3.3.3 Statische Korrektur

Die Beispiele zeigen, dass die Verschiebungen sehr gut konvergieren. Das Biegemoment konvergiert schlechter und die Querkraft sehr schlecht. Am freien Ende des Kragbalkens, an dem die Last angreift, konvergiert die Querkraft nicht, da dort die Querkraft für alle Eigenfunktionen verschwindet.

Wie beim Stab lässt sich das Konvergenzverhalten durch eine statische Korrektur deutlich verbessern. Als Ausgangspunkt dient die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q_0(x) + \Omega^2 \rho A W(x)$$

für die Amplitude der erzwungenen Biegeschwingung.

Wie beim Stab lässt sich aus dieser Differentialgleichung eine verbesserte Lösung $W_c^{(N)}(x)$ ermitteln, indem auf der rechten Seite der Gleichung $W(x)$ durch die durch modale Reduktion gewonnene Näherungslösung $W_c^{(N)}(x)$ ersetzt wird. Aus der verbesserten Lösung für die Verschiebung lassen sich dann durch Differenzieren verbesserte Lösungen $M_{0c}^{(N)}(x)$ für das Biegemoment und $Q_{0c}^{(N)}(x)$ für die Querkraft ermitteln.

Zur Ermittlung der verbesserten Verschiebungen muss viermal integriert werden. In der Regel sind die Verschiebungen jedoch so gut, dass keine Verbesserung nötig ist. Es ist daher zweckmäßig, die verbesserten Lösungen für das Biegemoment und die Querkraft direkt zu ermitteln.

Mit

$$M_0(x) = -EI_y \frac{d^2 W}{dx^2}(x)$$

lautet die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M_0}{dx^2} = -q_0(x) - \Omega^2 \rho A W(x) \quad .$$

Mit

$$Q_0(x) = \frac{dM_0}{dx}(x)$$

folgt daraus weiter

$$\frac{dQ_0}{dx}(x) = -q_0(x) - \Omega^2 \rho A W(x) \quad .$$

Daraus lässt sich eine verbesserte Lösung $Q_{0c}^{(N)}(x)$ für die Querkraft ermitteln, indem auf der rechten Seite die Näherungslösung $W_c^{(N)}(x)$ eingesetzt wird:

$$\frac{dQ_{0c}^{(N)}}{dx}(x) = -q_0(x) - \Omega^2 \rho A W_c^{(N)}(x)$$

Zur Berechnung der verbesserten Lösung für die Querkraft ist also nur eine Integration erforderlich. Anschließend kann eine verbesserte Lösung $M_{0c}^{(N)}(x)$ für das Biegemoment durch Integration von

$$\frac{dM_{0c}^{(N)}}{dx}(x) = Q_{0c}^{(N)}(x)$$

berechnet werden. Die bei den Integrationen auftretenden Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen festgelegt.

Das beschriebene Verfahren besteht darin, Querkraft und Biegemoment aus dem dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewicht zu ermitteln, wobei für die Trägheitskräfte die mit modaler Reduktion gewonnene Näherungslösung verwendet wird. Das Verfahren wird daher als Modal Acceleration Technique oder Load Summation Technique bezeichnet. Es wird z.B. in der Aerolelastik verwendet, um die Schnittlasten in einem Tragflügel unter dynamischer Beanspruchung zu ermitteln.

Beispiel: Gelenkig gelagerter Balken

Für den in Abschnitt 3.3.2 behandelten beidseitig gelenkig gelagerten homogenen Balken, der durch eine in der Mitte angreifende Einzelkraft angeregt wird, gilt für die Verschiebungsamplitude:

$$W^{(N)}(x) = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^M \frac{-(-1)^\mu}{(2\mu-1)^4} V_1(\eta_{2\mu-1}) \sin\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) \quad \text{mit } N = 2M - 1$$

Anstelle einer Streckenlast greift eine Einzelkraft an, die bei der Integration mit Hilfe des Föppl-Symbols $\langle x \rangle$ berücksichtigt werden muss. Für die verbesserte Querkraft folgt damit:

$$Q_{0c}^{(N)}(x) = -\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 F_0 - \Omega^2 \rho A \int W^{(N)}(x) dx + C_1$$

Die Stammfunktion der Verschiebungsamplitude berechnet sich zu

$$\int W^{(N)}(x) dx = \frac{F_0 L^4}{EI_y} \frac{2}{\pi^5} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^3} V_1(\eta_{2\mu-1}) \cos\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right).$$

Damit gilt für die Querkraft:

$$Q_{0c}^{(N)}(x) = -\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 F_0 - \Omega^2 \frac{\rho A}{EI_y} \frac{2F_0 L^4}{\pi^5} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^5} V_1(\eta_{2\mu-1}) \cos\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) + C_1$$

Eine weitere Integration führt auf das Biegemoment:

$$M_{0c}^{(N)}(x) = -\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle F_0 - \Omega^2 \frac{\rho A}{EI_y} \frac{2F_0 L^5}{\pi^6} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^6} V_1(\eta_{2\mu-1}) \sin\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) + C_1 x + C_2$$

Die beiden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen $M_{0c}^{(N)}(0)=0$ und $M_{0c}^{(N)}(L)=0$ bestimmt.

Aus $M_{0c}^{(N)}(0)=0$ folgt: $C_2=0$

Aus $M_{0c}^{(N)}(L)=0$ folgt: $-\frac{L}{2}F_0 + C_1 L = 0 \rightarrow C_1 = \frac{F_0}{2}$

Mit

$$\frac{\rho A}{EI_y} = \frac{\kappa_v^4}{\omega_v^2} = \frac{(2\mu-1)^4 \pi^4}{\omega_{2\mu-1}^2 L^4}$$

und $\eta_{2\mu-1}^2 V_1(\eta_{2\mu-1}) = V_1(\eta_{2\mu-1}) - 1$

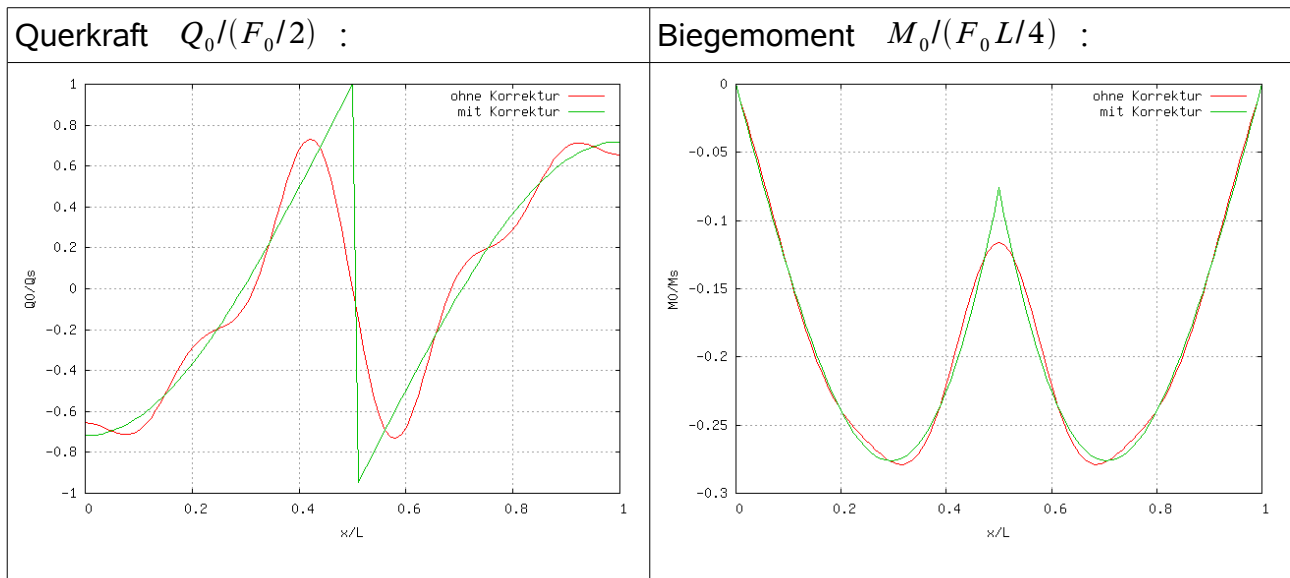
folgt schließlich:

$$Q_{0c}^{(N)}(x) = \frac{F_0}{2} \left[1 - 2 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 - \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-1)^\mu}{2\mu-1} (V_1(\eta_{2\mu-1}) - 1) \cos\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M_{0c}^{(N)}(x) = \frac{F_0 L}{4} \left[2 \frac{x}{L} - 4 \left\langle \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^M \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^2} (V_1(\eta_{2\mu-1}) - 1) \sin\left((2\mu-1)\pi \frac{x}{L}\right) \right]$$

Im Gegensatz zur gewöhnlichen modalen Reduktion werden nicht die gesamten dynamischen Schnittlasten als Überlagerung der Eigenfunktionen dargestellt, sondern nur die Abweichung von der statischen Lösung. Da die Antwort der nicht berücksichtigten Eigenfunktionen nur wenig von der statischen Lösung abweicht, falls die zugehörige Resonanzfrequenz größer als etwa das Dreifache der Erregerfrequenz ist, ergibt sich eine deutlich bessere Konvergenz.

Die folgenden beiden Bilder zeigen die ohne und mit statischer Korrektur berechneten Verläufe von Querkraft und Biegemoment für eine Erregerfrequenz $\Omega=2\omega_1$ und $N=9$. Durch die statische Korrektur wird die Unstetigkeit der Querkraft an der Stelle der Lasteinleitung exakt erfasst, und der Verlauf der Querkraft ist wesentlich glatter. Beim Biegemoment ergibt sich eine Verbesserung an der Stelle der Lasteinleitung.



Beispiel: Kragbalken

Für den in Abschnitt 3.3.2 behandelten homogenen Kragbalken, der durch eine am freien Ende angreifende Einzelkraft angeregt wird, gilt für die Verschiebungsamplitude

$$W^{(N)}(x) = 2 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{(\kappa_v L)^4} V_1(\eta_v) W_v(x)$$

mit $W_v(x) = \cos(\kappa_v x) - \cosh(\kappa_v x) - \gamma_v (\sin(\kappa_v x) - \sinh(\kappa_v x))$ und

$$\gamma_v = \frac{\cos(\kappa_v L) + \cosh(\kappa_v L)}{\sin(\kappa_v L) + \sinh(\kappa_v L)}$$

Die verbesserte Querkraft berechnet sich aus

$$\frac{dQ_{0c}^{(N)}}{dx}(x) = -2 \Omega^2 \frac{\rho A}{EI_y} F_0 L^3 \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{(\kappa_v L)^4} V_1(\eta_v) W_v(x)$$

Mit $\frac{\rho A}{EI_y} = \frac{\kappa_v^4}{\omega_v^2}$ und $\frac{\Omega^2}{\omega_v^2} = \eta_v^2$ folgt daraus

$$\frac{dQ_{0c}^{(N)}}{dx}(x) = -2 \frac{F_0}{L} \sum_{v=1}^N (-1)^v \eta_v^2 V_1(\eta_v) W_v(x)$$

Die Stammfunktionen der Eigenfunktionen lauten

$$\int W_v(x) dx = \frac{1}{\kappa_v} [\sin(\kappa_v x) - \sinh(\kappa_v x) + \gamma_v (\cos(\kappa_v x) + \cosh(\kappa_v x))] = \frac{1}{\kappa_v^4} \frac{d^3 W_v}{dx^3}(x)$$

Damit gilt für die Querkraft:

$$Q_{0c}^{(x)}(x) = -2 F_0 \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{\kappa_v L} (V_1(\eta_v) - 1) \frac{1}{\kappa_v^3} \frac{d^3 W_v}{dx^3}(x) + C_1$$

Die Integrationskonstante C_1 wird aus der Randbedingung $Q_{0c}^{(N)}(L)=F_0$ bestimmt. Mit

$$\frac{d^3 W_v}{dx^3}(L)=0$$

folgt: $C_1=F_0$

Damit ist gezeigt:

$$Q_{0c}^{(N)}(x)=F_0 \left[1 - 2 \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{\kappa_v L} (V_1(\eta_v) - 1) \frac{1}{\kappa_v^3} \frac{d^3 W_v}{dx^3}(x) \right]$$

Eine weitere Integration führt auf das Biegemoment:

$$M_{0c}^{(N)}(x)=F_0 L \left[\frac{x}{L} - 2 \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{(\kappa_v L)^2} (V_1(\eta_v) - 1) \frac{1}{\kappa_v^2} \frac{d^2 W_v}{dx^2}(x) \right] + C_2$$

Am freien Rand muss das Biegemoment verschwinden. Mit

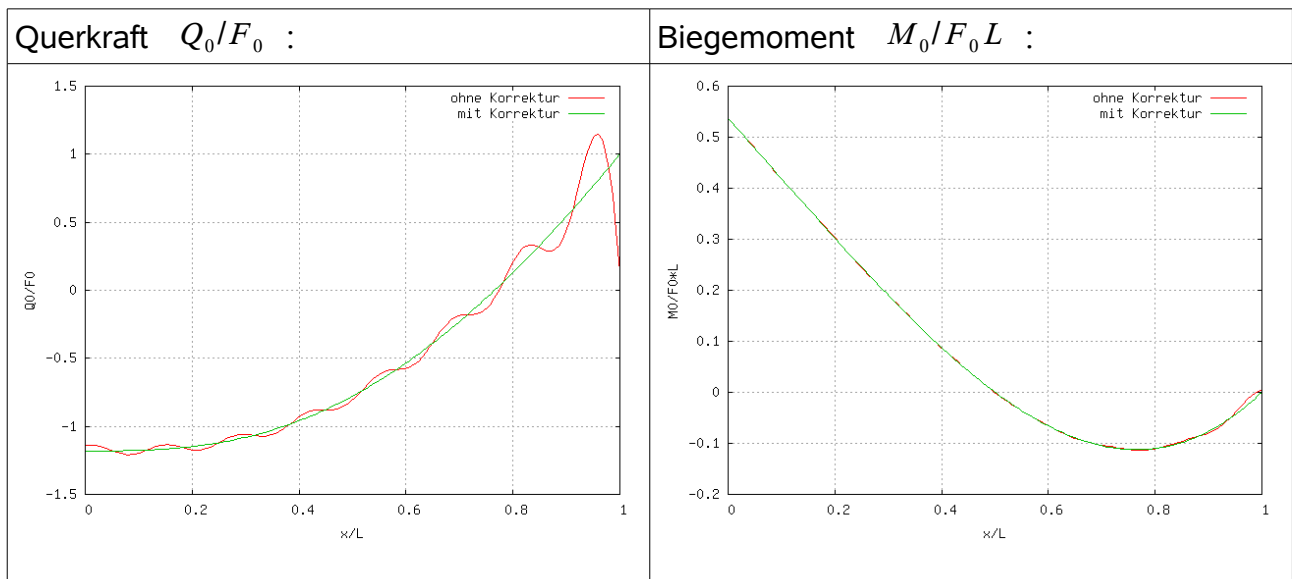
$$\frac{d^2 W_v}{dx^2}(L)=0$$

folgt: $C_2=-F_0 L$

Damit gilt für das Biegemoment:

$$M_{0c}^{(N)}(x)=F_0 L \left[\frac{x}{L} - 1 - 2 \sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{(\kappa_v L)^2} (V_1(\eta_v) - 1) \frac{1}{\kappa_v^2} \frac{d^2 W_v}{dx^2}(x) \right]$$

Die folgenden beiden Bilder zeigen die ohne und mit statischer Korrektur berechneten Verläufe von Querkraft und Biegemoment für eine Erregerfrequenz $\Omega=2\omega_1$ und $N=15$.



3.3.4 Fehleranalyse

Als Maß für den Fehler infolge der modalen Reduktion kann die Differenz

$$\Delta E^{(N)} = \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W^{(N)}}{dx^2} \right)^2 dx$$

zwischen der elastischen Energie der exakten Lösung und der elastischen Energie der Näherungslösung verwendet werden. Mit

$$\Delta W^{(N)}(x) = W(x) - W^{(N)}(x)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx &= \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W^{(N)}}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta W^{(N)}}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W^{(N)}}{dx^2} \right)^2 dx + 2 \int_0^L EI_y \frac{d^2 W^{(N)}}{dx^2} \frac{d^2 \Delta W^{(N)}}{dx^2} dx + \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 \Delta W^{(N)}}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen gilt

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 W^{(N)}}{dx^2} \frac{d^2 \Delta W^{(N)}}{dx^2} dx = 0 \quad .$$

Daraus folgt für die Differenz der elastischen Energien:

$$\Delta E^{(N)} = \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 \Delta W^{(N)}}{dx^2} \right)^2 dx$$

Die Differenz der elastischen Energien ist also gleich der elastischen Energie der Verschiebungsdifferenz.

Bei der modalen Reduktion ohne statische Korrektur lautet die Verschiebungsdifferenz

$$\Delta W^{(N)}(x) = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} q_{s\nu} V_1(\eta_\nu) W_\nu(x) \quad .$$

Unter Benutzung der Orthogonalität der Eigenfunktionen berechnet sich die elastische Energie des Verschiebungsfehlers zu

$$\Delta E^{(N)} = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} q_{s\nu}^2 V_1^2(\eta_\nu) \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_\nu}{dx^2} \right)^2 dx \quad .$$

Unter der Voraussetzung

$$\eta_\nu < 1, \quad \nu = N+1, \dots, \infty$$

gilt: $V_1(\eta_\nu) \leq V_1(\eta_N)$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\Delta E^{(N)} \leq V_1^2(\eta_N) \sum_{\nu=N+1}^{\infty} q_{s\nu}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_\nu}{dx^2} \right)^2 dx \quad .$$

Die Reihe lässt sich mit Hilfe der statischen Lösung $w_s(x)$ berechnen. Aus

$$w_s(x) = \sum_{v=1}^{\infty} q_{sv} W_v(x)$$

folgt:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right)^2 dx = \sum_{v=1}^{\infty} q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \sum_{v=1}^N q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx + \sum_{v=N+1}^{\infty} q_{sv}^2 \int_0^L \left(EI_y \frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\sum_{v=N+1}^{\infty} q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = E_s - \sum_{v=1}^N q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx$$

Damit gilt für die Energiedifferenz die Abschätzung

$$\Delta E^{(N)} \leq V_1^2(\eta_N) \left(E_s - \sum_{v=1}^N q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx \right) .$$

Wie beim Stab wird ein dimensionsloses Fehlermaß definiert, indem der Fehler in der Energie auf die statische Energie bezogen wird:

$$e^{(N)} = \frac{\Delta E^{(N)}}{E_s} \leq V_1^2(\eta_N) \left(1 - \frac{1}{E_s} \sum_{v=1}^N q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx \right)$$

Wenn der Wert dieses Fehlermaßes klein gegenüber Eins ist, dann ist der Fehler in der Energie und damit auch der Fehler in der Verschiebung und im Biegemoment klein.

Mit den relativen modalen statischen Dehnungsenergien

$$e_{sv} = \frac{q_{sv}^2}{E_s} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx$$

lässt sich das Fehlermaß aus

$$e^{(N)} \leq V_1^2(\eta_N) \left(1 - \sum_{v=1}^N e_{sv} \right)$$

berechnen.

Mit statischer Korrektur gilt für die Verschiebungsdifferenz

$$\Delta W_c^{(N)}(x) = \sum_{v=N+1}^{\infty} q_{sv} (V_1(\eta_v) - 1) W_v(x) .$$

Daraus folgt für das Fehlermaß:

$$e_c^{(N)} \leq (V_1(\eta_N) - 1)^2 \left(1 - \sum_{v=1}^N e_{sv} \right)$$

Beispiel: Gelenkig gelagerter Balken

Für den in Abschnitt 3.3.2 behandelten homogenen Kragbalken, der durch eine am freien Ende angreifende Einzelkraft angeregt wird, lauten die Entwicklungskoeffizient der statischen Lösung

$$q_{sv} = q_{s2\mu-1} = -\frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{2}{\pi^4} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)^4} .$$

Für die elastischen Energien der Eigenfunktionen gilt:

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = \omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx = \frac{1}{2} \omega_v^2 \rho A L = \frac{1}{2} \kappa_v^4 EI_y L = \frac{1}{2} \nu^4 \frac{\pi^4}{L^3} EI_y$$

Daraus folgt

$$q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = \left(\frac{F_0 L^3}{EI_y} \right)^2 \frac{4}{\pi^8} \frac{1}{(2\mu-1)^8} (2\mu-1)^4 \frac{\pi^4 EI_y}{2 L^3} = \frac{2 F_0^2 L^3}{\pi^4 EI_y} \frac{1}{(2\mu-1)^4} .$$

Die statische Lösung lautet

$$w_s(x) = \frac{F_0 L^3}{6 EI_y} \left[\frac{1}{2} \frac{x}{L} \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) + \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^3 \right] .$$

Ihre Ableitungen sind

$$\frac{dw_s}{dx}(x) = \frac{F_0 L^2}{6 EI_y} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 3 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{F_0 L^2}{2 EI_y} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

und

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2}(x) = \frac{F_0 L}{2 EI_y} \left[2 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) - \frac{x}{L} \right] .$$

Damit folgt für die statische Dehnungsenergie:

$$E_s = \int_0^L EI_y \left(\frac{F_0 L}{2 EI_y} \right)^2 \left[2 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) - \frac{x}{L} \right]^2 dx = \frac{(F_0 L)^2}{4 EI_y} \int_0^L \left[4 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] dx$$

Die Integrale berechnen sich zu

$$\int_0^L \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = L \int_{1/2}^1 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^2 d \left(\frac{x}{L} \right) = \frac{L}{3} \left[\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{x/L=1/2}^{x/L=1} = \frac{L}{24} ,$$

$$\int_0^L \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \frac{x}{L} dx = L \int_{1/2}^1 \left(\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{x}{L} \right) d \left(\frac{x}{L} \right) = L \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]_{x/L=1/2}^{x/L=1} = \frac{L}{12} + \frac{L}{48} = \frac{5}{48} L ,$$

$$\int_0^L \left(\frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{L}{3} .$$

Für die statische Dehnungsenergie gilt also

$$E_s = \frac{F_0^2 L^3}{4EI_y} \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \right) = \frac{F_0^2 L^3}{48EI_y} .$$

Damit berechnen sich die relativen modalen statischen Dehnungsenergien zu

$$e_{sv} = \frac{96}{\pi^4} \frac{1}{(2\mu-1)^4} .$$

Für die Fehlermaße folgt

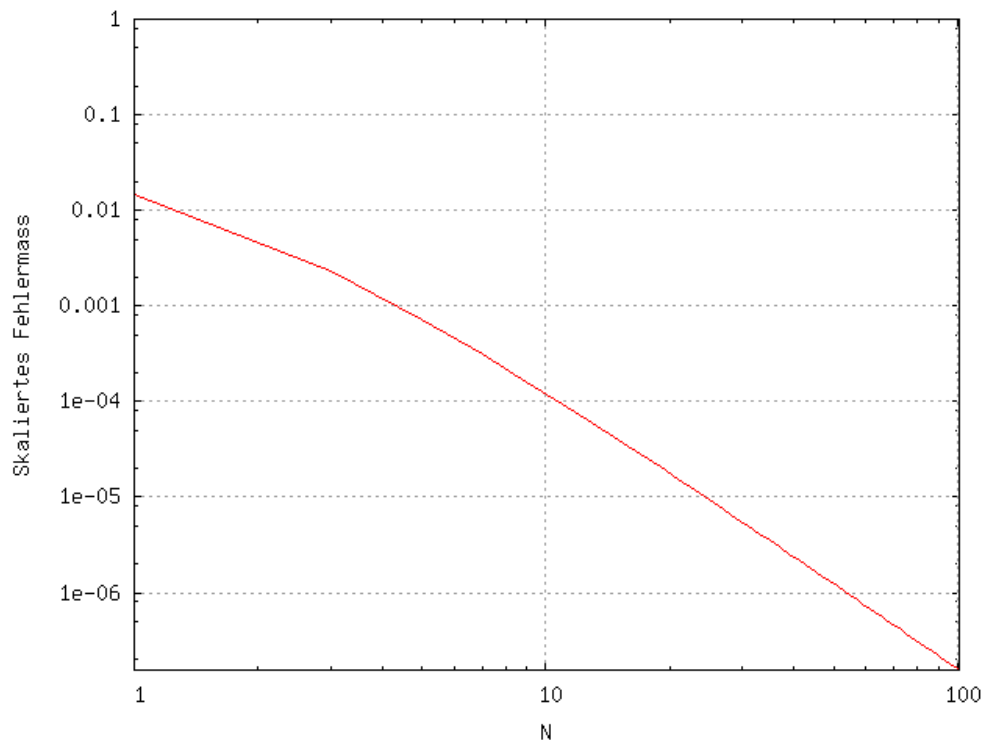
$$e^{(N)} \leq V_1^2(\eta_N) \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{(2\mu-1)^4} \right)$$

und

$$e_c^{(N)} \leq (V_1(\eta_N) - 1)^2 \left(1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{(2\mu-1)^4} \right)$$

mit $M = (N+1)/2$.

Die folgende Abbildung zeigt das mit dem Quadrat des Überhöhungsfaktors skalierte Fehlermaß $e^{(N)}/V_1^2(\eta_N)$ in Abhängigkeit von der Anzahl N der Reihenglieder.



Beispiel: Kragbalken

Für den in Abschnitt 3.3.2 behandelten homogenen Kragbalken, der durch eine am freien Ende angreifende Einzelkraft angeregt wird, lauten die Entwicklungskoeffizient der statischen Lösung

$$q_{sv} = \frac{2(-1)^v F_0}{\omega_v^2} \frac{1}{\rho A L} = 2 \frac{F_0 L^3}{EI_y} \frac{(-1)^v}{(\kappa_v L)^4} .$$

Für die elastischen Energien der Eigenfunktionen gilt:

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = \omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx = \omega_v^2 \rho A L = \kappa_v^4 EI_y L$$

Daraus folgt

$$q_{sv}^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = 4 \left(\frac{F_0 L^3}{EI_y} \right)^2 \frac{1}{(\kappa_v L)^8} \kappa_v^4 EI_y L = 4 \frac{F_0^2 L^3}{EI_y} \frac{1}{(\kappa_v L)^4} .$$

Die statische Lösung lautet

$$w_s(x) = \frac{F_0 L^3}{6 EI_y} \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) .$$

Ihre zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2}(x) = \frac{F_0 L}{EI_y} \left(1 - \frac{x}{L} \right) .$$

Damit folgt für die statische Dehnungsenergie:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^L EI_y \left(\frac{F_0 L}{EI_y} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{F_0^2 L^3}{EI_y} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 d \left(\frac{x}{L} \right) = \frac{F_0^2 L^3}{EI_y} \left[-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{L} \right)^3 \right]_{x/L=0}^{x/L=1} \\ &= \frac{1}{3} \frac{F_0^2 L^3}{EI_y} \end{aligned}$$

Die relativen modalen statischen Dehnungsenergien berechnen sich also zu

$$e_{sv} = \frac{12}{(\kappa_v L)^4} .$$

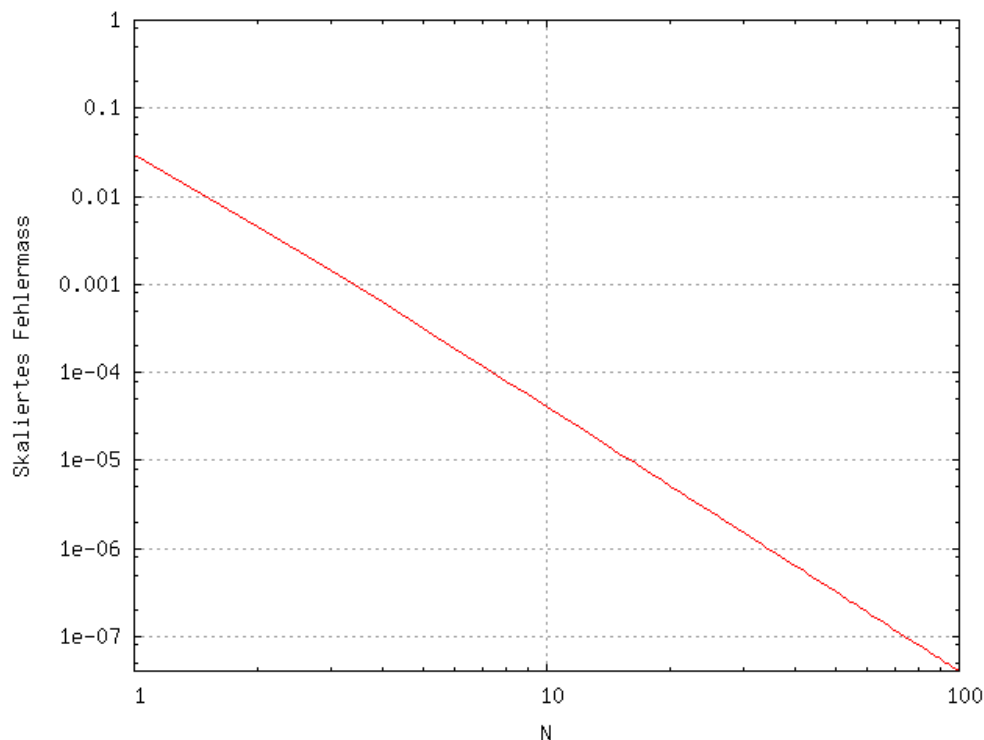
Für die Fehlermaße folgt

$$e^{(N)} \leq V_1^2(\eta_N) \left(1 - 12 \sum_{v=1}^N \frac{1}{(\kappa_v L)^4} \right)$$

und

$$e_c^{(N)} \leq (V_1(\eta_N) - 1)^2 \left(1 - 12 \sum_{v=1}^N \frac{1}{(\kappa_v L)^4} \right) .$$

Die folgende Abbildung zeigt das mit dem Quadrat des Überhöhungsfaktors skalierte Fehlermaß $e^{(N)}/V_1^2(\eta_N)$ in Abhängigkeit von der Anzahl N der Reihenglieder.



3.4 Wellenausbreitung

Die Eigenfunktionen beschreiben so genannte stehende Wellen, bei denen jeder Punkt des Balkens die gleiche Phasenlage hat, d.h. Extrema und Nulldurchgänge erfolgen an jedem Ort des Balkens zum gleichen Zeitpunkt. Durch Überlagerung der Eigenfunktionen lässt sich jede beliebige Auslenkung, die mit den wesentlichen Randbedingungen verträglich ist, darstellen.

Es soll nun untersucht werden, wie sich Wellen entlang eines unendlichen homogenen Balkens ausbreiten. Dazu wird wie beim Stab der auf d'Alembert zurückgehende Lösungsansatz

$$w(x, t) = f_1(x - c_B t) + f_2(x + c_B t)$$

mit zwei unbekannt Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(y)$ sowie einer unbekannt Konstanten c_B gemacht.

Mit $y_1 = x - c_B t$ und $y_2 = x + c_B t$ gilt wegen $\frac{dy_1}{dx} = 1$, $\frac{dy_2}{dx} = 1$ und $\frac{dy_1}{dt} = -c_B$, $\frac{dy_2}{dt} = c_B$

für die Ableitungen:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{d^4 f_1}{dy_1^4} + \frac{d^4 f_2}{dy_2^4}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_B^2 \left(\frac{d^2 f_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 f_2}{dy_2^2} \right)$$

Einsetzen in die Wellengleichung führt auf

$$\frac{d^4 f_1}{dy_1^4} + c_B^2 \frac{\rho A}{EI_y} \frac{d^2 f_1}{dy_1^2} + \frac{d^4 f_2}{dy_1^4} + c_B^2 \frac{\rho A}{EI_y} \frac{d^2 f_2}{dy_2^2} = 0.$$

Die Wellengleichung ist also erfüllt, wenn jede der beiden Funktionen die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^4 f}{dy^4} + k^2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

erfüllt. Dabei ist

$$k = c_B \sqrt{\frac{\rho A}{EI_y}}$$

die Wellenzahl.

Im Gegensatz zum Stab können beim Balken die Funktionen f_1 und f_2 nicht beliebig gewählt werden, sondern sie müssen eine Differentialgleichung erfüllen.

Zur Lösung der Differentialgleichung wird zunächst

$$g(y) = \frac{d^2 f}{dy^2}$$

substituiert. Die Funktion g muss dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + k^2 g = 0$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$g(y) = A_1 \cos(k y) + A_2 \sin(k y) \quad .$$

Zweimaliges Integrieren ergibt

$$f(y) = -\frac{A_1}{k^2} \cos(k y) - \frac{A_2}{k^2} \sin(k y) + C_3 y + C_4 = C_1 \cos(k y) + C_2 \sin(k y) + C_3 y + C_4 \quad .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für die Verschiebung:

$$w(x, t) = C_1 \cos(k(x - c_B t)) + C_2 \sin(k(x - c_B t)) + D_1 \cos(k(x + c_B t)) + D_2 \sin(k(x + c_B t)) \\ + C_3(x - c_B t) + D_3(x + c_B t) + C_4 + D_4$$

Die Konstanten C_3 , C_4 , D_3 und D_4 beschreiben eine Starrkörperbewegungen des Balkens, die in der Regel durch die Randbedingungen ausgeschlossen werden. Die übrigen Terme beschreiben die Biegewellen des Balkens, die nur in der Form von harmonischen Wellen auftreten können.

Für die ersten beiden Terme gilt:

$$C_1 \cos(k(x - c_B t)) + C_2 \sin(k(x - c_B t)) = C \cos(k(x - c_B t) - \phi) \\ = C \cos\left(2\pi \left(\frac{kx}{2\pi} - \frac{kc_B t}{2\pi}\right) - \phi\right)$$

Mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

und der Periode

$$T = \frac{2\pi}{kc_B} = \frac{2\pi}{\omega}$$

gilt:

$$C_1 \cos(k(x - c_B t)) + C_2 \sin(k(x - c_B t)) = C \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - \phi\right)$$

Wird die Ortskoordinate x um die Wellenlänge λ und die Zeit t um die Periode T erhöht, so gilt:

$$C \cos\left(2\pi\left(\frac{x+\lambda}{\lambda} - \frac{t+T}{T}\right) - \phi\right) = C \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + 1 - \frac{t}{T} - 1\right) - \phi\right) = C \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - \phi\right)$$

Ein Beobachter, der sich in der Zeit T um die Strecke λ weiterbewegt, beobachtet die gleiche Phasenlage der Welle. Die Geschwindigkeit

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{k} \frac{k c_B}{2\pi} = c_B$$

wird daher als Phasengeschwindigkeit bezeichnet.

Aus

$$k = c_B \sqrt{\frac{\rho A}{EI_y}}$$

folgt

$$c_B = k \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} .$$

Die Phasengeschwindigkeit hängt also von der Wellenlänge ab. Harmonische BiegeWellen mit unterschiedlichen Wellenlängen haben unterschiedliche Phasengeschwindigkeit. Dieses Verhalten wird als Dispersion bezeichnet.

Für numerische Analysen z.B. nach der Methode der Finiten Elemente ist es wichtig, die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Frequenz zu kennen. Damit lässt sich entscheiden, wie fein die Diskretisierung sein muss, wenn eine Obergrenze für die Frequenz vorgegeben ist. Bei Verwendung von Elementen mit einem linearen Verschiebungsansatz sollten mindestens sechs Elemente pro Wellenlänge verwendet werden.

Die Frequenz ist definiert durch

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

Für die Wellenlänge gilt: $\lambda = c_B T = \frac{c_B}{f} .$

Mit

$$c_B = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$$

folgt:

$$\lambda = \frac{2\pi}{f} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \rightarrow \lambda^2 = \frac{2\pi}{f} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$$

Also gilt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\rho A}}$$

Die gefundenen Beziehungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Wellenzahl:	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Phasengeschwindigkeit:	$c_B = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} = k \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$
Periode:	$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c_B} = \frac{2\pi}{k c_B}$
Kreisfrequenz:	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = k c_B$
Wellenlänge:	$\lambda = c_B T = \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \sqrt[4]{\frac{EI_y}{\rho A}}$

Ein Balken kann als unendlich angesehen werden, wenn seine Länge groß gegenüber der größten Wellenlänge ist. Dann sind die Biegewellen wegen der immer vorhandenen Dämpfung abgeklungen, bevor sie auf den Rand des Balkens treffen.

Allgemeine Biegewellen lassen sich als Überlagerung von harmonischen Biegewellen darstellen:

$$w(x, t) = \int_0^{\infty} C_1(k) \cos k(x - c_B t) dk + \int_0^{\infty} C_2(k) \sin k(x - c_B t) dk \\ + \int_0^{\infty} D_1(k) \cos k(x + c_B t) dk + \int_0^{\infty} D_2(k) \sin k(x + c_B t) dk$$

Bei der Integration ist zu beachten, dass die Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl abhängt. Die Funktionen $C_1(k)$, $C_2(k)$, $D_1(k)$ und $D_2(k)$ können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Da sich die einzelnen harmonischen Wellen mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit ausbreiten, verändert die Welle ihre Form.

Die Anfangsbedingungen lauten

$$w_0(x) = w(x, 0) = \int_0^{\infty} (C_1(k) + D_1(k)) \cos(kx) dk + \int_0^{\infty} (C_2(k) + D_2(k)) \sin(kx) dk$$

und

$$v_0(x) = \dot{w}(x, 0) = \int_0^{\infty} k c_B (C_1(k) - D_1(k)) \sin(kx) dk - \int_0^{\infty} k c_B (C_2(k) - D_2(k)) \cos(kx) dk$$

Sind

$$W_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) \cos(kx) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} w_0(x) \sin(kx) dx$$

und

$$V_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) \cos(kx) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) \sin(kx) dx$$

die Fourier-Transformationen der Anfangsbedingungen, dann gilt:

$$C_1(k) + D_1(k) = \frac{1}{\pi} \Re(W_0(k)) \quad , \quad C_2(k) + D_2(k) = -\frac{1}{\pi} \Im(W_0(k))$$

$$k c_B (C_1(k) - D_1(k)) = -\frac{1}{\pi} \Im(V_0(k)) \quad , \quad k c_B (C_2(k) - D_2(k)) = -\frac{1}{\pi} \Re(V_0(k))$$

Beispiel:

Es wird ein unendlicher homogener Balken betrachtet, der die Anfangsauslenkung

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{w_{max}}{2} \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right], & -L \leq x \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$$

und die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0(x) = 0$$

hat.

Aus $V_0(k) = 0$ folgt: $D_1(k) = C_1(k)$ und $D_2(k) = C_2(k)$

Die Fourier-Transformation der Anfangsauslenkung ist

$$W_0(k) = \frac{w_{max}}{2} \left[\int_{-L}^L \left(1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) \cos(kx) dx - i \int_{-L}^L \left(1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) \sin(kx) dx \right] .$$

Das erste Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \left(1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) \cos(kx) dx &= \left[\frac{\sin((\pi/L - k)x)}{2(\pi/L - k)} + \frac{\sin((\pi/L + k)x)}{2(\pi/L + k)} + \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{x=-L}^{x=L} \\ &= \frac{\sin(\pi - kL)}{\pi/L - k} + \frac{\sin(\pi + kL)}{\pi/L + k} + 2 \frac{\sin(kL)}{k} = L \sin(kL) \left(\frac{1}{\pi - kL} - \frac{1}{\pi + kL} + \frac{2}{kL} \right) \\ &= 2L \sin(kL) \left(\frac{1}{kL} + \frac{kL}{\pi^2 - (kL)^2} \right) = 2L \frac{\sin(kL)}{kL} \left(1 + \frac{(kL)^2}{\pi^2 - (kL)^2} \right) \end{aligned}$$

Das zweite Integral berechnet sich zu

$$\int_{-L}^L \left(1 + \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) \sin(kx) dx = \left[\frac{\cos((\pi/L - k)x)}{2(\pi/L - k)} - \frac{\cos((\pi/L + k)x)}{2(\pi/L + k)} - \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{x=-L}^{x=L} = 0$$

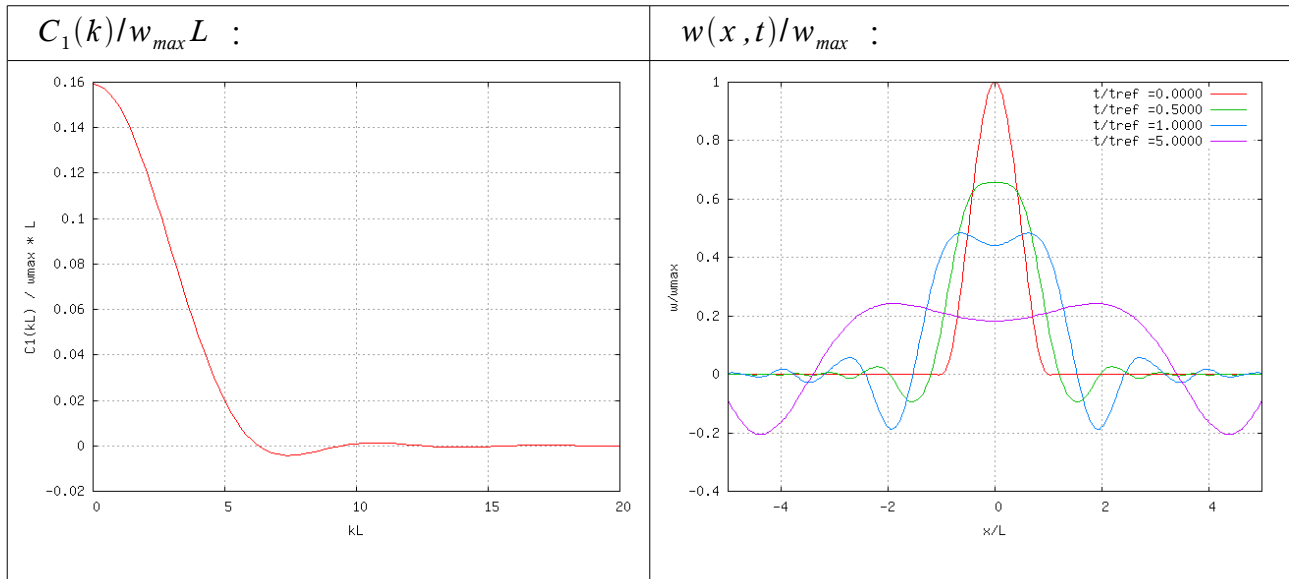
Damit gilt:

$$C_1(k) = \frac{1}{2\pi} \Re(W_0(k)) = \frac{w_{max} L}{2\pi} \frac{\sin(kL)}{kL} \left(1 + \frac{(kL)^2}{\pi^2 - (kL)^2} \right)$$

$$C_2(k) = 0$$

Die folgenden Bilder zeigen die Funktion $C_1(k)/w_{max}L$ und die Verschiebung

$w(x, t)/w_{max}$ für einige Zeitpunkte.



3.5 Rayleigh-Ritz-Verfahren

Während sich für homogene Balken in vielen Fällen analytische Lösungen für die Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen angeben lassen, ist das für Balken mit veränderlichen Kennwerten in der Regel nicht mehr möglich. Näherungslösungen können mit dem Rayleigh-Ritz-Verfahren ermittelt werden, das auf der schwachen Formulierung des Eigenwertproblems basiert. Das Rayleigh-Ritz-Verfahren bildet auch die Grundlage für die Methode der Finiten Elemente.

3.5.1 Rayleigh-Quotient

Die Eigenschwingungen sind Lösungen der schwachen Formulierung

$$\int_0^L EI_y \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \frac{d^2 W_v}{dx^2} dx - \omega_v^2 \int_0^L \rho A \tilde{W} W_v dx = 0$$

für alle Funktionen $\tilde{W}(x)$, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen.

Da die Eigenfunktionen $W_v(x)$ die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, muss die schwache Formulierung auch für $\tilde{W}(x) = W_v(x)$ erfüllt sein. Daher gilt:

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx - \omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx = 0$$

Wenn die Eigenfunktion $W_v(x)$ bekannt ist, kann daraus die Eigenkreisfrequenz ω_v bestimmt werden:

$$\omega_v^2 = \frac{\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A W_v^2 dx}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich für beliebige Funktionen $V(x)$ definieren, sofern für diese Funktionen die beiden Integrale existieren. Er wird als Rayleigh-Quotient bezeichnet:

$$R(V) = \frac{\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A V^2 dx}$$

Der Rayleigh-Quotient ist eine Abbildung, die jeder Funktion $V(x)$ eine reelle Zahl zuordnet. Solche Abbildungen werden als Funktionale bezeichnet.

Wenn die Funktion $V(x)$ die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, dann kann sie als Überlagerung der Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$V(x) = \sum_{v=1}^{\infty} q_v W_v(x)$$

Damit berechnen sich die Integrale zu

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx = \sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W_v}{dx^2} \right)^2 dx = \sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx$$

und

$$\int_0^L \rho A V^2 dx = \sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx .$$

Für den Rayleigh-Quotient folgt

$$R(V) = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \omega_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx}{\sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx} = \omega_1^2 \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_v}{\omega_1} \right)^2 q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx}{\sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx} .$$

Die Glieder beider Reihen sind alle positiv. Wegen $\omega_1 < \omega_v$ gilt daher

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_v}{\omega_1} \right)^2 q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx \geq \sum_{v=1}^{\infty} q_v^2 \int_0^L \rho A W_v^2 dx ,$$

was

$$R(V) \geq \omega_1^2$$

zur Folge hat. Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $q_v = 0$ für $v > 1$ gilt, d.h. wenn die Funktion $V(x)$ ein Vielfaches der ersten Eigenfunktion $W_1(x)$ ist.

Damit ist gezeigt:

Unter allen Funktionen, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, hat der Rayleigh-Quotient den kleinsten Wert für die erste Eigenfunktion.

Wird der Rayleigh-Quotient für irgend eine Funktion $V_1(x)$ berechnet, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, so gibt er eine obere Schranke für die Eigenkreisfrequenz

der Grundschiwingung an. Ergibt sich für eine andere Funktion $V_2(x)$, die ebenfalls die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, ein niedrigerer Wert, so ist dieser Wert eine bessere obere Abschätzung der Eigenkreisfrequenz der Grundschiwingung.

Beispiel:

Mit dem Rayleigh-Quotient wird die Eigenkreisfrequenz der Grundschiwingung für den abgebildeten Balken mit veränderlichem Querschnitt abgeschätzt.

Die wesentlichen Randbedingungen lauten:

$$W(0)=0 \quad , \quad \frac{dW}{dx}(0)=0$$

Als Testfunktion wird die Funktion

$$V(x)=x^2$$

gewählt. Ihre Ableitungen sind

$$\frac{dV}{dx}(x)=2x \quad , \quad \frac{d^2V}{dx^2}(x)=2 \quad .$$

Die Testfunktion erfüllt die wesentlichen Randbedingungen. Daher liefert ihr Rayleigh-Quotient eine obere Schranke für ω_1 .

Die beiden Integrale berechnen sich zu

$$\int_0^L EI_y \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)^2 dx = EI_y \int_0^{L/2} 4 dx + \beta EI_y \int_{L/2}^L 4 dx = 4 EI_y \left(\frac{L}{2} + \beta \frac{L}{2} \right) = 2 EI_y L (1 + \beta)$$

und

$$\int_0^L \rho A V^2 dx = \rho A \int_0^{L/2} x^4 dx + \alpha \rho A \int_{L/2}^L x^4 dx = \rho A \left(\left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{L/2} + \alpha \left[\frac{x^5}{5} \right]_{L/2}^L \right) = \frac{\rho A L^5}{160} (1 + 31\alpha) \quad .$$

Damit lautet der Rayleigh-Quotient:

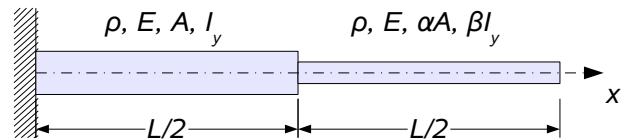
$$R(V) = 320 \frac{EI_y}{\rho A L^4} \frac{1 + \beta}{1 + 31\alpha}$$

Für den homogenen Kragbalken ist $\alpha=1$ und $\beta=1$. Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\omega_1^2 \leq 20 \frac{EI_y}{\rho A L^4}$$

Die exakte Lösung ist

$$\omega_1^2 = \kappa_1^4 \frac{EI_y}{\rho A} = 1,8751^4 \frac{EI_y}{\rho A L^4} = 12,36 \frac{EI_y}{\rho A L^4} \quad .$$



3.5.2 Ritz-Verfahren

Im Gegensatz zum Rayleigh-Quotienten benutzt das Ritz-Verfahren keine festen Testfunktionen, sondern arbeitet mit einer Überlagerung von Testfunktionen. Die Koeffizienten für die Überlagerung werden so bestimmt, dass ein Funktional einen Extremwert annimmt. Damit lassen sich auf einfache Weise oft sehr gute Näherungen erreichen.

Das Funktional für die Biegeschwingungen eines Balkens ist gegeben durch

$$\Pi(\omega, W) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 \rho A W^2 \right] dx .$$

Es ordnet jedem Paar $(\omega, W(x))$ eine reelle Zahl zu, wobei von der Funktion $W(x)$ wieder verlangt wird, dass sie die wesentlichen Randbedingungen erfüllt.

Sei nun $\tilde{W}(x)$ eine weitere Funktion, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllt. Dann gilt

$$\Pi(\omega, W + \epsilon \tilde{W}) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \epsilon \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (W + \epsilon \tilde{W})^2 dx .$$

Für fest vorgegebene Funktionen $W(x)$ und $\tilde{W}(x)$ sowie festes ω ist dadurch eine Funktion

$$f(\epsilon) = \Pi(\omega, W + \epsilon \tilde{W})$$

definiert. Ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\epsilon} &= \int_0^L EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \epsilon \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} \right) \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^L \rho A (W + \epsilon \tilde{W}) \tilde{W} dx \\ &= \int_0^L EI_y \frac{d^2 W}{dx^2} \frac{d^2 \tilde{W}}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^L \rho A W \tilde{W} dx + 2\epsilon \Pi(\omega, \tilde{W}) \end{aligned}$$

Ist speziell $W(x) = W_v(x)$ eine Eigenfunktion und $\omega = \omega_v$ die zugehörige Eigenkreisfrequenz, so gilt:

$$\frac{df}{d\epsilon} = 2\epsilon \Pi(\omega_v, \tilde{W})$$

Für $\epsilon = 0$ ist die Ableitung Null. Das Funktional hat also für alle Eigenschwingungen $(\omega_v, W_v(x))$ einen Extremwert. Diese Eigenschaft wird beim Ritz-Verfahren ausgenutzt, um Näherungslösungen zu ermitteln. Dazu wird zunächst der Näherungsansatz

$$\bar{W}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x)$$

gemacht. Die Funktionen $\phi_i(x)$ sind Ansatzfunktionen, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, und a_i sind zunächst unbekannte Koeffizienten.

Wird der Näherungsansatz in das Funktional eingesetzt, so wird das Funktional zu einer Funktion der Koeffizienten a_i sowie der Kreisfrequenz ω :

$$\Pi(\omega, \bar{W}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_y \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 \rho A \left(\sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right)^2 \right] dx = P(\omega, a_1, \dots, a_n)$$

Die Koeffizienten a_i werden nun so bestimmt, dass die Funktion $P(\omega, a_1, \dots, a_n)$ einen Extremwert annimmt. Die Bedingung dafür lautet

$$\frac{\partial P}{\partial a_j} = 0, \quad j=1, \dots, n \quad .$$

Daraus folgt

$$\int_0^L \left[EI_y \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} - \omega^2 \rho A \left(\sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right) \phi_j \right] dx = 0, \quad j=1, \dots, n \quad .$$

Das ist ein Eigenwertproblem, aus dem die n Koeffizienten a_i sowie n Eigenkreisfrequenzen $\bar{\omega}_i$ bestimmt werden können, die Näherungen für die Eigenkreisfrequenzen ω_v sind.

Mit den Abkürzungen

$$k_{ij} = k_{ji} = \int_0^L EI_y \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \quad \text{und} \quad m_{ij} = m_{ji} = \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx$$

lautet das Eigenwertproblem

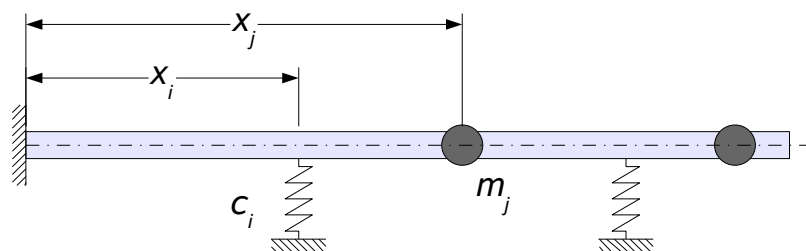
$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad .$$

Die Matrix \mathbf{K} wird als Steifigkeitsmatrix und die Matrix \mathbf{M} als Massenmatrix bezeichnet.

Das Ritz-Verfahren lässt sich leicht auf den Fall erweitern, dass der Balken auf einzelnen Federn gelagert und mit Punktmassen belegt ist:



In diesem Fall muss das Funktional um die Beiträge der Federn und der Punktmassen erweitert werden:

$$\Pi(\omega, W) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI_y \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 \rho A W^2 \right] dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_F} c_k W^2(x_k) - \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n_M} m_k W^2(x_k)$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix berechnen sich nun aus

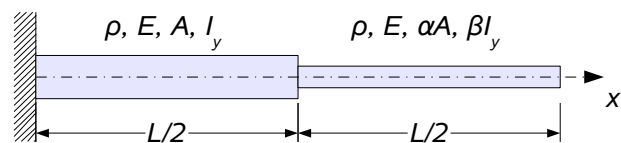
$$k_{ij} = k_{ji} = \int_0^L EI_y \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx + \sum_{k=1}^{n_F} c_k \phi_i(x_k) \phi_j(x_k)$$

und die Elemente der Massenmatrix aus

$$m_{ij} = m_{ji} = \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx + \sum_{k=1}^{n_M} m_k \phi_i(x_k) \phi_j(x_k) \quad .$$

Beispiel: Kragbalken mit veränderlichem Querschnitt

Mit dem Ritz-Verfahren wird eine Näherung für die Eigenkreisfrequenz der Grundschwingung des bereits in Abschnitt 3.5.1 untersuchten Kragbalkens mit veränderlichem Querschnitt bestimmt.



Als Ansatzfunktionen werden die Funktionen

$$\phi_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad \text{und} \quad \phi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

verwendet.

Ihre Ableitungen sind

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{2}{L} \left(\frac{x}{L}\right), \quad \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \frac{2}{L^2}$$

und

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{3}{L} \left(\frac{x}{L}\right)^2, \quad \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = \frac{6}{L^2} \left(\frac{x}{L}\right) \quad .$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Ansatzfunktionen die wesentlichen Randbedingungen

$$W(0) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0$$

erfüllen.

Für die Elemente der Steifigkeitsmatrix folgt:

$$k_{11} = \int_0^{L/2} EI_y \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx + \int_{L/2}^L \beta EI_y \left(\frac{2}{L^2}\right)^2 dx = 4 \frac{EI_y}{L^4} \left(\frac{L}{2} + \beta \frac{L}{2}\right) = 2 \frac{EI_y}{L^3} (1 + \beta)$$

$$\begin{aligned} k_{12} = k_{21} &= \int_0^{L/2} EI_y \left(\frac{2}{L^2}\right) \left(6 \frac{x}{L^3}\right) dx + \int_{L/2}^L \beta EI_y \left(\frac{2}{L^2}\right) \left(6 \frac{x}{L^3}\right) dx = 12 \frac{EI_y}{L^5} \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{L/2} + \beta \left[\frac{x^2}{2}\right]_{L/2}^L \right) \\ &= 6 \frac{EI_y}{L^5} \left(\frac{L^2}{4} + \beta \frac{3}{4} L^2 \right) = \frac{3}{2} \frac{EI_y}{L^3} (1 + 3\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22} &= \int_0^{L/2} EI_y \left(6 \frac{x}{L^3}\right)^2 dx + \int_{L/2}^L \beta EI_y \left(6 \frac{x}{L^3}\right)^2 dx = 36 \frac{EI_y}{L^6} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + \beta \left[\frac{x^3}{3} \right]_{L/2}^L \right) \\
 &= 12 \frac{EI_y}{L^6} \left(\frac{L^3}{8} + \beta \frac{7}{8} L^3 \right) = \frac{3}{2} \frac{EI_y}{L^3} (1 + 7\beta)
 \end{aligned}$$

Die Elemente der Massenmatrix berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \int_0^{L/2} \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx + \int_{L/2}^L \alpha \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx = \frac{\rho A}{L^4} \left(\left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{L/2} + \alpha \left[\frac{x^5}{5} \right]_{L/2}^L \right) \\
 &= \frac{\rho A}{5 L^4} \left(\frac{L^5}{32} + \alpha \frac{31}{32} L^5 \right) = \frac{\rho A L}{160} (1 + 31\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{12} = m_{21} &= \int_0^{L/2} \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^5 dx + \int_{L/2}^L \alpha \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^5 dx = \frac{\rho A}{L^5} \left(\left[\frac{x^6}{6} \right]_0^{L/2} + \alpha \left[\frac{x^6}{6} \right]_{L/2}^L \right) \\
 &= \frac{\rho A}{6 L^5} \left(\frac{L^6}{64} + \alpha \frac{63}{64} L^6 \right) = \frac{\rho A L}{384} (1 + 63\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{22} &= \int_0^{L/2} \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^6 dx + \int_{L/2}^L \alpha \rho A \left(\frac{x}{L}\right)^6 dx = \frac{\rho A}{L^6} \left(\left[\frac{x^7}{7} \right]_0^{L/2} + \alpha \left[\frac{x^7}{7} \right]_{L/2}^L \right) \\
 &= \frac{\rho A}{7 L^6} \left(\frac{L^7}{128} + \alpha \frac{127}{128} L^7 \right) = \frac{\rho A L}{896} (1 + 127\alpha)
 \end{aligned}$$

Damit lautet das Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix} \frac{EI_y}{2L^3} & 4(1+\beta) & 3(1+3\beta) \\ 3(1+3\beta) & 3(1+7\beta) & \end{pmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A L}{13440} \begin{pmatrix} 84(1+31\alpha) & 35(1+63\alpha) \\ 35(1+63\alpha) & 15(1+127\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den homogenen Kragbalken mit $\alpha=1$ und $\beta=1$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} \frac{EI_y}{2L^3} & 8 & 12 \\ 12 & 24 & \end{pmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A L}{420} \begin{pmatrix} 84 & 70 \\ 70 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die charakteristische Gleichung folgt aus

$$\begin{vmatrix} 4 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \frac{1}{5} \omega^2 & 6 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \frac{1}{6} \omega^2 \\ 6 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \frac{1}{6} \omega^2 & 12 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \frac{1}{7} \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

zu

$$12 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right)^2 - \frac{34}{35} \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right) \omega^2 + \frac{1}{1260} \omega^4 = 0 ,$$

was sich zu

$$\omega^4 - 1224 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right) \omega^2 + 15120 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right)^2 = 0$$

vereinfachen lässt. Die Lösungen sind

$$\bar{\omega}_{1/2}^2 = \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left(612 \pm \sqrt{612^2 - 15120} \right) ,$$

$$\text{d.h. } \bar{\omega}_1^2 = 12,48 \frac{EI_y}{\rho A L^4}, \quad \bar{\omega}_2^2 = 1211,52 \frac{EI_y}{\rho A L^4} .$$

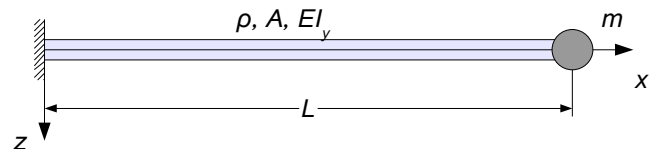
Die exakten Werte für die ersten beiden Eigenkreisfrequenzen sind

$$\omega_1^2 = 12,36 \frac{EI_y}{\rho A L^4}, \quad \omega_2^2 = 485,52 \frac{EI_y}{\rho A L^4} .$$

Mit den gewählten Ansatzfunktionen liefert das Ritz-Verfahren eine hervorragende Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz.

Beispiel: Kragbalken mit Endmasse

Für den in Abschnitt 3.2.4 behandelten Kragbalken mit einer Punktmasse am freien Ende soll mit dem Ritz-Verfahren eine Näherung für die Eigenkreisfrequenz der Grundschwingung bestimmt werden.



Die wesentlichen Randbedingungen sind

$$W(0) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 .$$

Als Ansatzfunktionen können die gleichen Funktionen wie beim Kragbalken mit veränderlichem Querschnitt gewählt werden:

$$\phi_1(x) = \left(\frac{x}{L} \right)^2, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{2}{L^2}$$

$$\phi_2(x) = \left(\frac{x}{L} \right)^3, \quad \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} = \frac{6}{L^2} \left(\frac{x}{L} \right)$$

An der Stelle, an der sich die Punktmasse befindet, haben die Ansatzfunktionen die Werte

$$\phi_1(L) = 1 \quad \text{und} \quad \phi_2(L) = 1 .$$

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich mit $\alpha=1$ und $\beta=1$ aus der Steifigkeitsmatrix des Kragbalkens mit veränderlichem Querschnitt zu

$$\mathbf{K} = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} .$$

Bei der Massenmatrix muss noch der Beitrag der Punktmasse addiert werden:

$$\mathbf{M} = \rho A L \begin{bmatrix} 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \phi_1^2(L) & \phi_1(L)\phi_2(L) \\ \phi_1(L)\phi_2(L) & \phi_2^2(L) \end{bmatrix} = \frac{\rho A L}{210} \begin{bmatrix} 42 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Mit dem Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m}{\rho A L}$$

wird daraus

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A L}{210} \begin{bmatrix} 42 + 210\mu & 25 + 210\mu \\ 25 + 210\mu & 30 + 210\mu \end{bmatrix}.$$

Aus

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

folgt:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{5} + \mu\right) \omega^2 & 6 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{6} + \mu\right) \omega^2 \\ 6 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{6} + \mu\right) \omega^2 & 12 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{7} + \mu\right) \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[4 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{5} + \mu\right) \omega^2 \right] \left[12 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{7} + \mu\right) \omega^2 \right] - \left[6 \frac{EI_y}{\rho A L^4} - \left(\frac{1}{6} + \mu\right) \omega^2 \right]^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{5} + \mu\right) \left(\frac{1}{7} + \mu\right) - \left(\frac{1}{6} + \mu\right)^2 \right] \omega^4 - \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left[4 \left(\frac{1}{7} + \mu\right) + 12 \left(\frac{1}{5} + \mu\right) - 12 \left(\frac{1}{6} + \mu\right) \right] \omega^2 \\ & \quad + 12 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\mu}{105} + \frac{1}{1260} \right) \omega^4 - \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left(4\mu + \frac{34}{35} \right) \omega^2 + 12 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Damit lautet die charakteristische Gleichung:

$$(12\mu + 1) \omega^4 - 36 \frac{EI_y}{\rho A L^4} (140\mu + 34) \omega^2 + 15120 \left(\frac{EI_y}{\rho A L^4} \right)^2 = 0$$

Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{1/2}^2 &= \frac{EI_y}{\rho A L^4} \frac{36(70\mu + 17) \pm \sqrt{36^2(70\mu + 17)^2 - 15210(12\mu + 1)}}{12\mu + 1} \\ &= \frac{3}{12\mu + 1} \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left(12(70\mu + 17) \pm \sqrt{144(4900\mu^2 + 2380\mu + 289) - 1680(12\mu + 1)} \right) \\ &= \frac{3}{12\mu + 1} \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left(12(70\mu + 17) \pm \sqrt{705600\mu^2 + 322560\mu + 39936} \right) \\ &= \frac{12}{12\mu + 1} \frac{EI_y}{\rho A L^4} \left(210\mu + 51 \pm 2\sqrt{11025\mu^2 + 5040\mu + 624} \right) \end{aligned}$$

Das folgende Diagramm zeigt die dimensionslose Kreisfrequenz

$$\omega_{1r} = \omega_1 L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI_y}}$$

der Grundschiwingung in Abhängigkeit vom Massenverhältnis. Die mit dem Ritz-Verfahren ermittelte Näherung stimmt sehr gut mit der exakten Lösung überein.

