

3.1 Abtasttheorem

Lösungen

Aufgabe 1

Das GNU Octave-Skript beginnt mit der Definition der Daten.

```
# Übungsblatt 3.1, Aufgabe 1: Alias-Effekt
#
# -----

set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename();

# Daten

f1 = 100; A1 = 2; % Parameter für 1. Harmonische
f2 = 200; A2 = -1; % Parameter für 2. Harmonische
fs = 2.5 * f2; % Ausreichende Abtastrate
fsH = 12 * f2; % Hohe Abtastrate
fsL = 1.5 * f2; % Niedrige Abtastrate
T = 2 / f1; % Länge der Zeitreihe

Anschließend werden die Zeitreihen mit unterschiedlichen Abtastraten berechnet. Für die niedrigste Abtastrate werden die beiden Beiträge getrennt gespeichert, um sie später darstellen zu können.

# Zeitreihe mit Abtastrate fs

dt = 1 / fs;
t = 0 : dt : T;
x = A1 * sin(2 * pi * f1 * t) + A2 * sin(2 * pi * f2 * t);

# Zeitreihe mit Abtastrate fsH

dtH = 1 / fsH;
tH = 0 : dtH : T;
xH = A1 * sin(2 * pi * f1 * tH) + A2 * sin(2 * pi * f2 * tH);

# Zeitreihe mit Abtastrate fsL

dtL = 1 / fsL;
tL = 0 : dtL : T;
xL1 = A1 * sin(2 * pi * f1 * tL);
xL2 = A2 * sin(2 * pi * f2 * tL);
xL = xL1 + xL2;
```

Abbildung 1.1 zeigt die Zeitreihen für die unterschiedlichen Abtastraten.

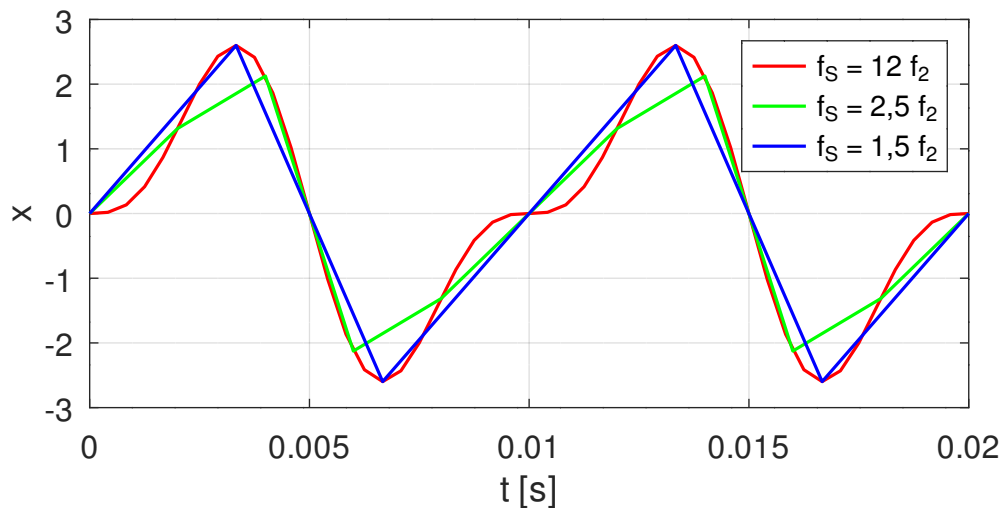


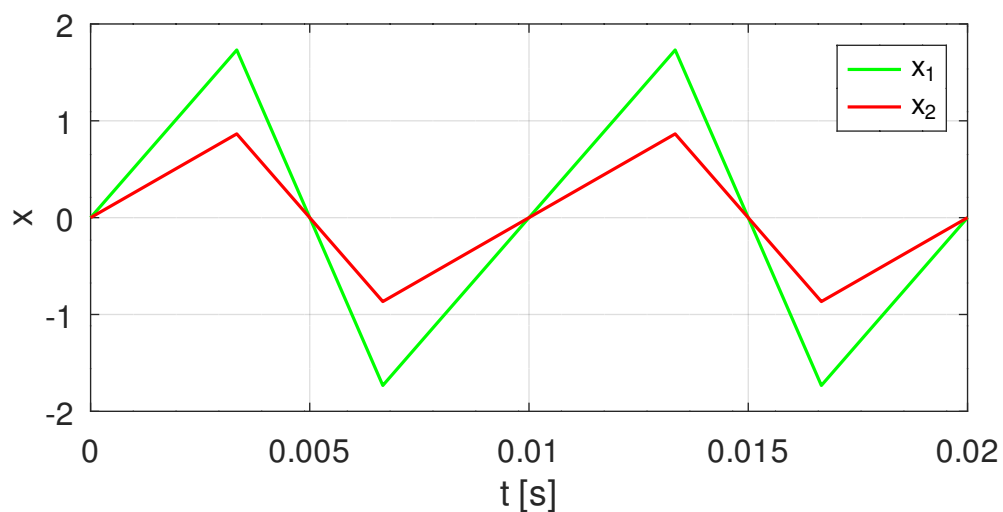
Abbildung 1.1: Vergleich der Zeitreihen für unterschiedliche Abtastraten

Darstellung der Zeitreihen für unterschiedliche Abtastraten

```
figure(1, "position", [100, 500, 750, 300],
       "paperposition", [0, 0, 15, 7]);
plot(tH, xH, "color", "red", t, x, "color", "green",
     tL, xL, "color", "blue");
legend("f_S = 12 f_2", "f_S = 2,5 f_2", "f_S = 1,5 f_2");
grid;
xlabel("t [s]"); ylabel("x");
print([file, "a.svg"], "-dsvg");
```

Darstellung der beiden Beiträge

```
figure(2, "position", [100, 500, 750, 300],
       "paperposition", [0, 0, 15, 7]);
plot(tL, xL1, "color", "green", tL, xL2, "color", "red");
legend("x_1", "x_2");
grid;
```

Abbildung 1.2: Darstellung der beiden Beiträge für $f_s = 1,5 f_2$

```
xlabel("t [s]"); ylabel("x");
print([file, "b.svg"], "-dsvg");
```

Abbildung 1.2 zeigt die beiden Beiträge für die niedrigste Abtastrate, bei der die Nyquist-Bedingung verletzt ist. Es ist zu sehen, dass beide Beiträge die gleiche Frequenz haben. In der in Abbildung 1.1 dargestellten Überlagerung ist daher keine Oberschwingung mehr erkennbar.

Aufgabe 2

Das GNU Octave-Skript lädt zunächst das Package `signal`, das die Funktion `resample` enthält. Anschließend werden die Daten definiert.

```
# Übungsblatt 3.1, Aufgabe 2: Sinus-Puls
#
# -----
```

```
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);
```

```
file = mfilename();
```

```
pkg load signal
```

```
# Daten
```

```
T = 0.01;           % Impulsdauer
n = 2;             % Faktor für Länge der Zeitreihe
```

Das Ausgangssignal enthält alle Frequenzen bis $6/T$. Zunächst wird das Signal mit Nullen vorbelegt. Anschließend wird der Impuls eingefügt.

```
# Ausgangssignal, Frequenzen bis 6 / T
```

```
fs = 12 / T;
t = 0 : (1/fs) : 2 * T;
x = zeros(1, length(t));
j = find(t < T);
x(j) = sin(2 * pi * t(j) / T);
```

Die zweifache Anwendung der Funktion `resample` entspricht einer Filterung. Der erste Aufruf führt ein Downsampling durch, wobei die Zeitreihe vorher so gefiltert wird, dass die Nyquist-Bedingung erfüllt ist. Der zweite Aufruf benutzt die Kardinalreihe, um zusätzliche Werte zu berechnen.

```
# Filtern auf fA = 2 / T
```

```
y1 = resample(x, 1, 3);
x1 = resample(y1, 3, 1);
t1 = (0 : length(x1) - 1) / fs;
```

```
# Filtern auf fA = 1 / T
```

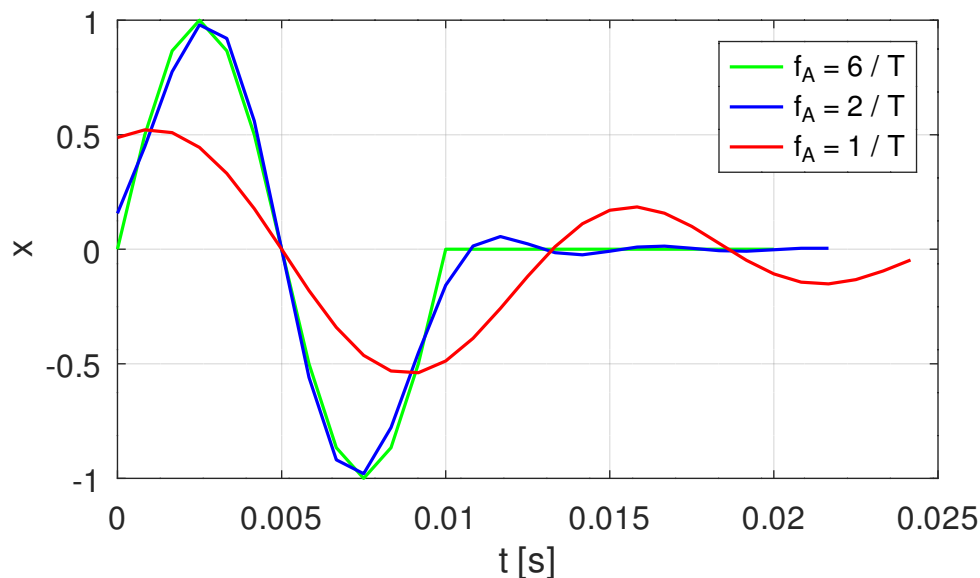


Abbildung 2.1: Vergleich der Zeitreihen

```

y2 = resample(x, 1, 6);
x2 = resample(y2, 6, 1);
t2 = (0 : length(x2) - 1) / fs;

```

Zum Schluss werden alle drei Zeitreihen in einem Diagramm dargestellt.

```

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 14, 8]);
plot(t, x, "color", "green",
      t1, x1, "color", "blue",
      t2, x2, "color", "red");
legend("f_A = 6 / T", "f_A = 2 / T", "f_A = 1 / T");
grid;
xlabel("t [s]"); ylabel("x");
print([file, ".svg"], "-dsvg");

```

Abbildung 2.1 zeigt, dass die wesentlichen Beiträge von den Frequenzen unterhalb von $f_A = 2/T$ kommen. Werden die Beiträge der höheren Frequenzen weggelassen, ergibt sich noch eine brauchbare Näherung. Werden nur die Beiträge von Frequenzen unterhalb von $f_A = 1/T$ berücksichtigt, ergibt sich eine große Abweichung.