4.2 Balkensysteme

Lösungen

Aufgabe 1

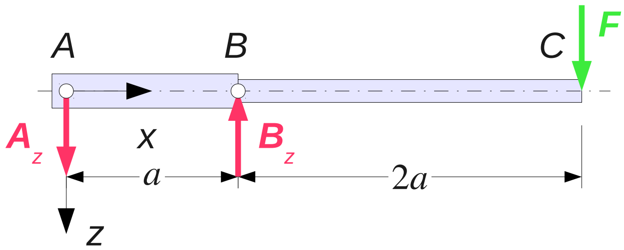
Lagerkräfte:

$$\sum M^B = 0 \ : \ a A_z - 2 a F = 0$$

$$\rightarrow \ A_z = 2F$$

$$\sum M^A = 0 \ : \ a B_z - 3 a F = 0$$

$$\rightarrow \ B_z = 3F$$



Biegemoment:

Da das System statisch bestimmt ist, hängt das Biegemoment nicht von der Biegesteifigkeit ab. Aus dem Gleichgewicht für den linken Teilbalken folgt:

$$M_y(x) = -\left(A_z x - \langle x-a \rangle B_z\right) = -\left(2x - 3\langle x-a \rangle\right) F$$

In die weiteren Integrationen geht die Biegesteifigkeit ein. Sie müssen abschnittsweise durchgeführt werden.

Abschnitt *AB*: $0 < x < a$

$$4 E I_y \frac{dw}{dx}(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\langle x-a \rangle^2 + c_1\right) F$$

$$4 E I_y w(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\langle x-a \rangle^3 + c_1 x + c_2\right) F$$

$$w(0) = 0 \ \rightarrow \ c_2 = 0$$

$$w(a) = 0 \ : \ \frac{1}{3}a^3 + c_1 a = 0 \ \rightarrow \ c_1 = -\frac{1}{3}a^2$$

Abschnitt *BC*: $a < x < 3a$

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}\langle x-a \rangle^2 + c_3\right) F$$

$$E I_y w(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\langle x-a \rangle^3 + c_3 x + c_4\right) F$$

$$w(a) = 0 \ : \ \frac{1}{3}a^3 + c_3 a + c_4 = 0 \ \rightarrow \ c_3 a + c_4 = -\frac{1}{3}a^3$$

Anschlussbedingung an der Stelle *B*:

Der Balken darf keinen Knick haben: $\frac{dw}{dx}(a-0)=\frac{dw}{dx}(a+0)$

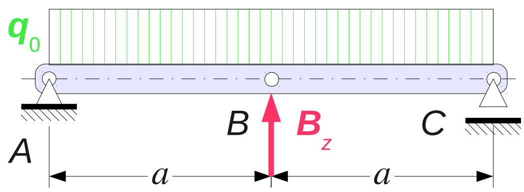
$$\left(a^2-\frac{1}{3}a^2\right)=4\left(a^2+c_3\right) \rightarrow c_3=-\frac{5}{6}a^2$$

$$c_4=-c_3 a-\frac{1}{3}a^3=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)a^3=\frac{1}{2}a^3$$

Vertikalverschiebung am Lastangriffspunkt:

$$w_C=w(3a)=\left(\frac{27}{3}-\frac{8}{2}-\frac{15}{6}+\frac{1}{2}\right)\frac{F a^3}{E I_y}=3\frac{F a^3}{E I_y}$$

Aufgabe 2

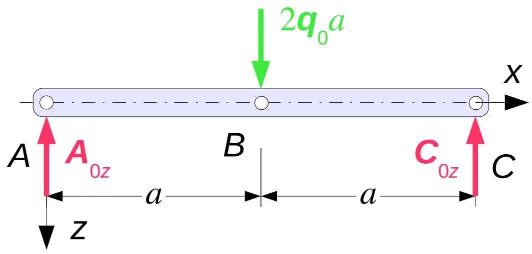


Statisch bestimmtes Teilsystem

Das System ist 1-fach statisch unbestimmt. Entfernen des Lagers im Punkt *B* führt auf ein statisch bestimmtes Grundsystem.

Lastfall 0: konstante Streckenlast

Lagerkräfte:



$$\sum M^A=0 \; : \; 2aC_{0z}-2q_0a^2=0$$

$$\rightarrow C_{0z}=q_0 a$$

$$\sum M^C=0 \; : \; -2aA_{0z}+2q_0a^2=0$$

$$\rightarrow A_{0z}=q_0 a$$

Schnittlasten (aus Tabelle):

$$Q_{0z}(x)=-\frac{q_0(2a)}{2}\left(2\frac{x}{2a}-1\right)=-q_0 a\left(\frac{x}{a}-1\right)$$

$$M_{0y}=-\frac{q_0(2a)^2}{2}\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^2-\frac{x}{2a}\right]=-\frac{q_0a^2}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-2\frac{x}{a}\right]$$

Biegelinie (aus Tabelle):

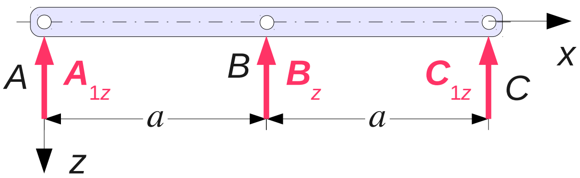
$$w_0(x)=\frac{q_0(2a)^4}{24EI_y}\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^4-2\left(\frac{x}{2a}\right)^3+\frac{x}{2a}\right]=\frac{q_0a^4}{24EI_y}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4-4\left(\frac{x}{a}\right)^3+8\frac{x}{a}\right]$$

Durchbiegung im Punkt *B*:

$$w_{0B}=w_0(a)=\frac{q_0 a^4}{24 E I_y}(1-4+8)=\frac{5}{24}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

<u>Lastfall 1: Kraft B_z</u>

Lagerkräfte:



$$\sum M^A=0\ :\ a B_z+2 a C_{1z}=0$$

$$\rightarrow\ C_{1z}=-\frac{1}{2}B_z$$

$$\sum M^C=0\ :\ -2 a A_{1z}-a B_z=0$$

$$\rightarrow\ A_{1z}=-\frac{1}{2}B_z$$

Schnittlasten (aus Tabelle):

$$Q_{1z}(x)=-B_z\left[1-\frac{1}{2}-\left\langle\frac{x}{2a}-\frac{1}{2}\right\rangle^0\right]=-\frac{B_z}{2}\left[1-2\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^0\right]$$

$$M_{1y}(x)=-2 a B_z\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2a}-\left\langle\frac{x}{2a}-\frac{1}{2}\right\rangle\right]=-\frac{B_z a}{2}\left[\frac{x}{a}-2\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle\right]$$

Biegelinie (aus Tabelle):

$$w_1(x)=-\frac{B_z(2a)^3}{6 E I_y}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2a}-\left(\frac{x}{2a}\right)^3\right)+\left\langle\frac{x}{2a}-\frac{1}{2}\right\rangle^3\right]$$

$$=-\frac{B_z a^3}{12 E I_y}\left[3\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^3+2\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3\right]$$

Durchbiegung im Punkt *B*:

$$w_{1B}=w_1(a)=-\frac{B_z a^3}{12 E I_y}(3-1)=-\frac{B_z a^3}{6 E I_y}$$

<u>Verträglichkeitsbedingung</u>

$$w_B=w_{0B}+w_{1B}=0:\ \frac{5}{24}\frac{q_0 a^4}{E I_y}-\frac{B_z a^3}{6 E I_y}=0\ \rightarrow\ B_z=\frac{30}{24}q_0 a=\frac{5}{4}q_0 a$$

Ergebnisse

Lagerkräfte:

$$A_z = A_{0z} + A_{1z} = q_0 a - \frac{1}{2}\frac{5}{4} q_0 a = \underline{\frac{3}{8} q_0 a}\ ,\quad B_z = \underline{\frac{5}{4} q_0 a}$$

$$C_z = C_{0z} + C_{1z} = q_0 a - \frac{1}{2}\frac{5}{4} q_0 a = \underline{\frac{3}{8} q_0 a}$$

Schnittlasten:

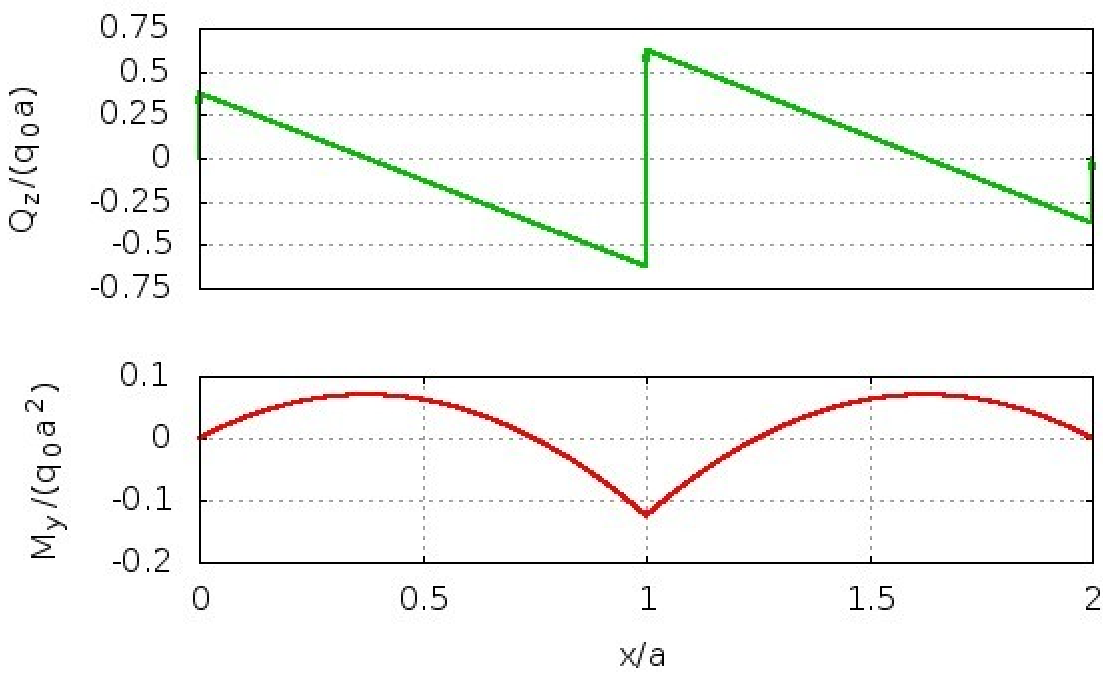
$$Q_z(x) = Q_{0z}(x) + Q_{1z}(x) = -q_0 a\left[\frac{x}{a} - 1 + \frac{5}{8}\left(1 - 2\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle^0\right)\right]$$

$$= \frac{q_0 a}{8}\left(3 - 8\frac{x}{a} + 10\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle^0\right)$$

$$M_y(x) = M_{0y}(x) + M_{1y}(x) = -\frac{q_0 a^2}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a} + \frac{5}{4}\left(\frac{x}{a} - 2\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{q_0 a^2}{8}\left[3\frac{x}{a} - 4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 10\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle\right]$$

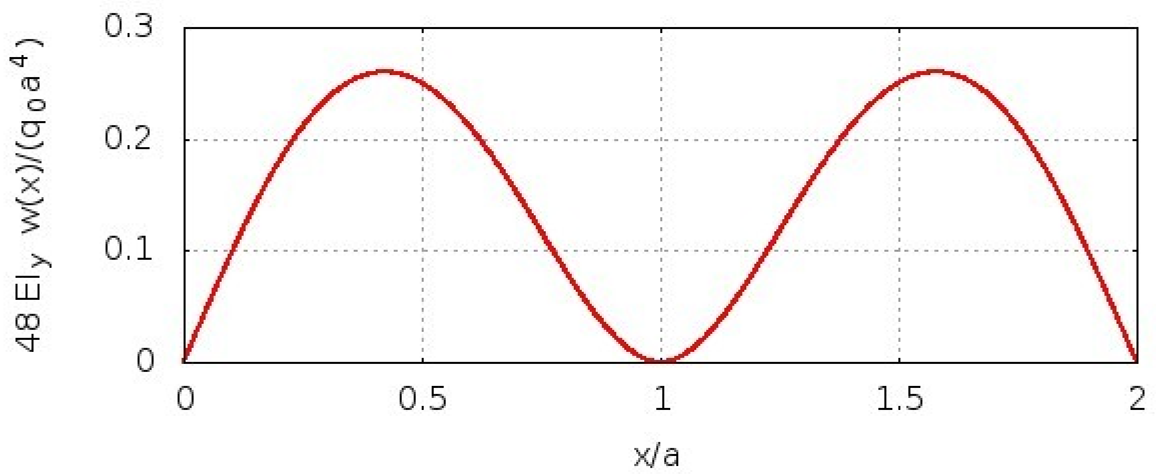
$$|M_{ymax}| = |M_y(a)| = \frac{q_0 a^2}{8}|3-4| = \frac{q_0 a^2}{8}$$



Biegelinie:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 8\frac{x}{a} - \frac{5}{2}\left(3\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^3 + 2\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle^3\right)\right]$$

$$= \frac{q_0 a^4}{48 E I_y}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{x}{a} - 10\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle^3\right]$$

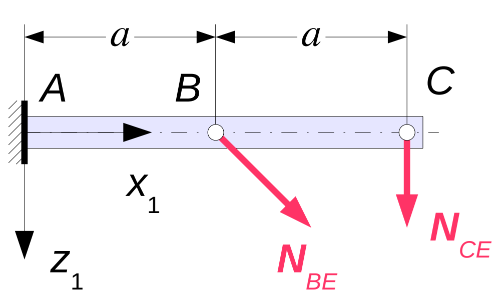


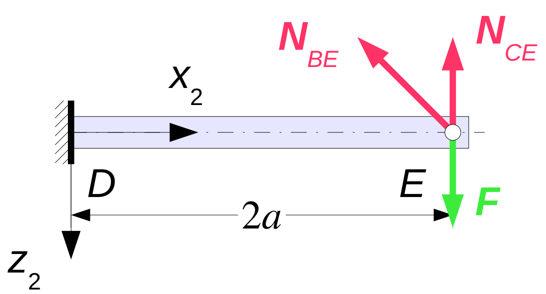
Aufgabe 3

a) <u>Normalkräfte in den Streben</u>

Statisch bestimmte Teilsysteme:

Balken *AC*: Balken *DE*:





Berechnungsgang:

1. Ermittlung der Vertikalverschiebungen w_B, w_C und w_E in Abhängigkeit von den noch unbekannten Normalkräften N_{BE} und N_{CE}
2. Ermittlung der Normalkräfte aus den Stabgleichungen für die Streben

BE und *CE*

Die Horizontalverschiebungen u_B, u_C und u_E sind null, da die Balken dehnstarr sind.

Balken *AC*:

$$w_B(N_{BE})=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{CE})=\frac{N_{CE}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{5}{6}\frac{N_{CE}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \quad w_B=\frac{a^3}{6EI_y}\left(\sqrt{2}N_{BE}+5N_{CE}\right)$$

$$w_C(N_{BE})=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{12}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{CE})=\frac{N_{CE}(2a)^3}{3EI_y}=\frac{8}{3}\frac{N_{CE}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \quad w_C=\frac{a^3}{12EI_y}\left(5\sqrt{2}N_{BE}+32N_{CE}\right)$$

Balken *DE*:

$$w_E=\frac{\left(F-\frac{\sqrt{2}}{2}N_{BE}-N_{CE}\right)(2a)^3}{3EI_y}=\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI_y}\left(2F-\sqrt{2}N_{BE}-2N_{CE}\right)$$

Strebe *BE*:

$$N_{BE}=EA\frac{\Delta L_{BE}}{\sqrt{2}a}=EA\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{w_E-w_B}{\sqrt{2}a}=\frac{EA}{2a}\left(w_E-w_B\right)$$

Strebe *CE*:

$$N_{CE}=EA\frac{\Delta L_{CE}}{a}=\frac{EA}{a}\left(w_E-w_C\right)$$

Einsetzen für die Verschiebungen ergibt:

$$N_{BE}=\frac{EA}{2a}\cdot\frac{a^3}{6EI_y}\left(16F-8\sqrt{2}N_{BE}-16N_{CE}-\sqrt{2}N_{BE}-5N_{CE}\right)$$

$$=\frac{Aa^2}{12I_y}\left(16F-9\sqrt{2}N_{BE}-21N_{CE}\right)$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{12I_y}{Aa^2}+9\sqrt{2}\right)N_{BE}+21N_{CE}=16F$$

$$N_{CE}=\frac{E\,A}{a}\cdot\frac{a^3}{12\,E\,I_y}\left(32\,F-16\sqrt{2}\,N_{BE}-32\,N_{CE}-5\sqrt{2}\,N_{BE}-32\,N_{CE}\right)$$
$$=\frac{A\,a^2}{12\,I_y}\left(32\,F-21\sqrt{2}\,N_{BE}-64\,N_{CE}\right)$$

$$\rightarrow\quad 21\sqrt{2}\,N_{BE}+\left(\frac{12\,I_y}{A\,a^2}+64\right)N_{CE}=32\,F$$

Mit $I_y/A=a^2/12$ folgt:

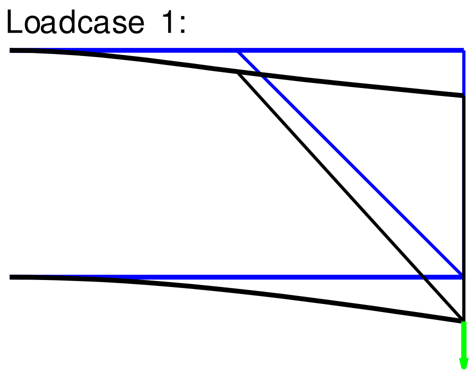
$$\begin{array}{ccccccc} \left(1+9\sqrt{2}\right) & N_{BE} & + & 21 & N_{CE} & = & 16\;F \\ 21\sqrt{2} & N_{BE} & + & 65 & N_{CE} & = & 32\;F \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$N_{BE}=1{,}370\,F\,,\quad N_{CE}=-0{,}1336\,F$$

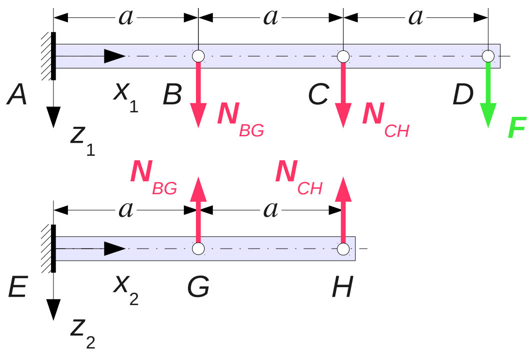
b) <u>Vertikalverschiebung des Lastangriffspunkts</u>

$$w_E=\frac{4}{3}\frac{a^3}{E\,I_y}\left(2\,F-\sqrt{2}\,N_{BE}-2\,N_{CE}\right)=\frac{4}{3}\frac{F\,a^3}{E\,I_y}\left(2-\sqrt{2}\cdot 1{,}370+2\cdot 0{,}1336\right)$$
$$=\underline{0{,}4396\,\frac{F\,a^3}{E\,I_y}}$$



Aufgabe 4

Statisch bestimmte Teilsysteme:



a) <u>Normalkräfte in den Streben</u>

Balken *AD*:

$$w_B(F)=\frac{F(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right)=\frac{4}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{BG})=\frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right)=\frac{1}{3}\frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_B(N_{CH})=\frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right)=\frac{5}{6}\frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow\quad w_B=\frac{a^3}{6EI_y}\left(8F+2N_{BG}+5N_{CH}\right)$$

$$w_C(F)=\frac{F(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}\right)=\frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{BG})=\frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)=\frac{5}{6}\frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_C(N_{CH})=\frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}\right)=\frac{8}{3}\frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow\quad w_C=\frac{a^3}{6EI_y}\left(28F+5N_{BG}+16N_{CH}\right)$$

Balken *EH*:

$$w_G(N_{BG}) = -\frac{N_{BG}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right) = -\frac{1}{3}\frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_G(N_{CH}) = -\frac{N_{CH}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right) = -\frac{5}{6}\frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \quad w_G = -\frac{a^3}{6EI_y}(2N_{BG}+5N_{CH})$$

$$w_H(N_{BG}) = -\frac{N_{BG}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right) = -\frac{5}{6}\frac{N_{BG}a^3}{EI_y}$$

$$w_H(N_{CH}) = -\frac{N_{CH}(2a)^3}{3EI_y} = -\frac{8}{3}\frac{N_{CH}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \quad w_H = -\frac{a^3}{6EI_y}(5N_{BG}+16N_{CH})$$

Kinematische Verträglichkeitsbedingungen:

$$w_B = w_G: \; 8F+2N_{BG}+5N_{CH} = -2N_{BG}-5N_{CH}$$
$$w_C = w_H: \; 28F+5N_{BG}+16N_{CH} = -5N_{BG}-16N_{CH}$$

Daraus folgt das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der Normalkräfte:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4 & N_{BG} & + & 10 & N_{CH} & = & -8 & F \\ 10 & N_{BG} & + & 32 & N_{CH} & = & -28 & F \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung:

$$N_{BG} = \frac{6}{7}F, \quad N_{CH} = -\frac{8}{7}F$$

b) <u>Vertikalverschiebung von Punkt *D*</u>

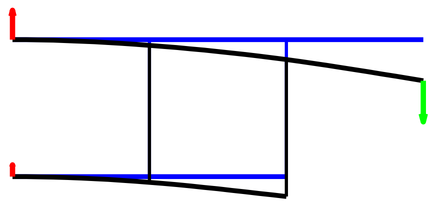
$$w_D(F) = \frac{F(3a)^3}{3EI_y} = 9\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_D(N_{CH}) = \frac{N_{CH}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}\right) = \frac{14}{3}\frac{N_{CH}a^3}{EI_y} = -\frac{8}{7}\cdot\frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI_y} = -\frac{16}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$w_D(N_{BG}) = \frac{N_{BG}(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}\right) = \frac{4}{3}\frac{N_{BG}a^3}{EI_y} = \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{7}\frac{Fa^3}{EI_y} = \frac{8}{7}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

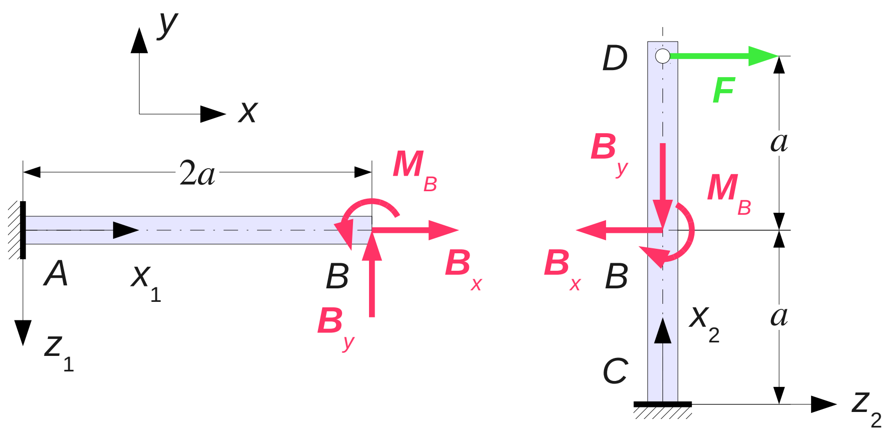
$$\rightarrow \; w_D = \frac{F a^3}{21\, E I_y}(9\cdot 21 - 16\cdot 7 + 8\cdot 3) = \underline{\frac{101}{21}\frac{F a^3}{E I_y}}$$

Loadcase 1:



Aufgabe 5

Statisch bestimmte Teilsysteme:

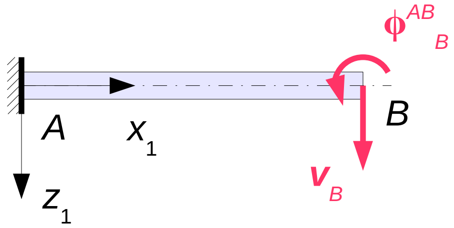


Da die Balken dehnstarr sind, gilt: $u_B = v_B = 0$

a) <u>Schnittlasten</u>

Balken *AB*:

$$v_B(B_y) = -\frac{8}{3}\frac{B_y a^3}{E I_y}$$



$$v_B(M_B) = -\frac{M_B(2a)^2}{2EI_y} = -2\frac{M_B a^2}{EI_y}$$

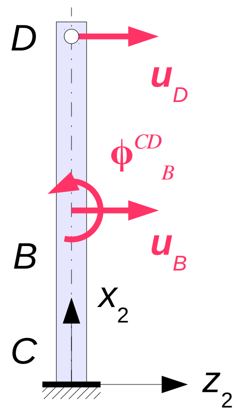
$$v_B = v_B(B_y) + v_B(M_B) = -\frac{a^2}{3EI_y}(8B_y a + 6M_B) = 0 \rightarrow 8B_y a + 6M_B = 0$$

$$\phi_B^{AB}(B_y) = \frac{B_y(2a)^2}{2EI_y} = 2\frac{B_y a^2}{EI_y}$$

$$\phi_B^{AB}(M_B) = 2\frac{M_B a}{EI_y}$$

$$\phi_B^{AB} = \phi_B^{AB}(B_y) + \phi_B^{AB}(M_B) = \frac{2a}{EI_y}(B_y a + M_B)$$

Balken *CD*:



$$u_B(F) = \frac{F(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{5}{6}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$u_B(B_x) = -\frac{B_x(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right) = -\frac{1}{3}\frac{B_x a^3}{EI_y}$$

$$u_B(M_B) = \frac{M_B(2a)^2}{2EI_y}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{M_B a^2}{2EI_y}$$

$$u_B = u_B(F) + u_B(B_x) + u_B(M_B)$$

$$= \frac{a^2}{6EI_y}(5Fa - 2B_x a + 3M_B) = 0$$

$$\rightarrow 2B_x a - 3M_B = 5Fa$$

$$\phi_B^{CD}(F) = -\frac{F(2a)^2}{2EI_y}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{3}{2}\frac{Fa^2}{EI_y}$$

$$\phi_B^{CD}(B_x) = \frac{B_x(2a)^2}{2EI_y}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{B_x a^2}{EI_y}$$

$$\phi_B^{CD}(M_B) = -\frac{1}{2}\frac{M_B(2a)}{EI_y} = -\frac{M_B a}{EI_y}$$

$$\phi_B^{CD} = \phi_B^{CD}(F) + \phi_B^{CD}(B_x) + \phi_B^{CD}(M_B) = \frac{a}{2EI_y}(-3Fa + B_x a - 2M_B)$$

Kinematische Verträglichkeitsbedingung: $\phi_B^{AB} = \phi_B^{CD}$

$$4B_y a + 4M_B = -3Fa + B_x a - 2M_B$$

$$\rightarrow -B_x a + 4B_y a + 6M_B = -3Fa$$

Zusammen mit den Bedingungen $u_B = 0$ und $v_B = 0$ stehen drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Schnittlasten zur Verfügung:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrl} u_B=0 & : & 2B_x a & & & - & 3M_B & = & 5Fa & (1) \\ v_B=0 & : & & & 8B_y a & + & 6M_B & = & 0 & (2) \\ \phi_B^{AB}=\phi_B^{CD} & : & -B_x a & + & 4B_y a & + & 6M_B & = & -3Fa & (3) \end{array}$$

Auflösen:

(1) → $B_x a=\frac{5}{2}F a+\frac{3}{2}M_B$

(2) → $B_y a=-\frac{3}{4}M_B$

in (3) → $-\frac{5}{2}F a-\frac{3}{2}M_B-3M_B+6M_B=-3Fa$

→ $(-3-6+12)M_B=(-6+5)Fa$ → $\underline{M_B=-\frac{1}{3}Fa}$

→ $B_x=\frac{5}{2}F-\frac{1}{2}F=\underline{2F}$, $\underline{B_y=\frac{1}{4}F}$

b) Horizontalverschiebung von Punkt *D*

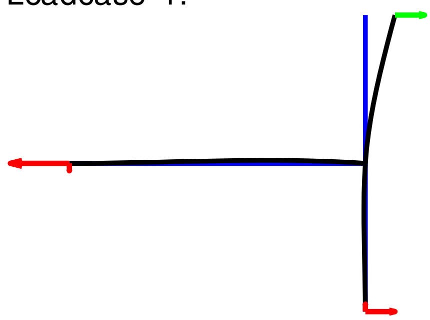
$$u_D(F)=\frac{8}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$u_D(B_x)=-\frac{B_x(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=-\frac{5}{6}\frac{B_x a^3}{EI_y}=-\frac{5}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

$$u_D(M_B)=-\frac{M_B(2a)^2}{2EI_y}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{3}{2}\frac{M_B a^2}{EI_y}=-\frac{1}{2}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

→ $u_D=\frac{Fa^3}{6EI_y}(16-10-3)=\underline{\frac{1}{2}\frac{Fa^3}{EI_y}}$

Loadcase 1:

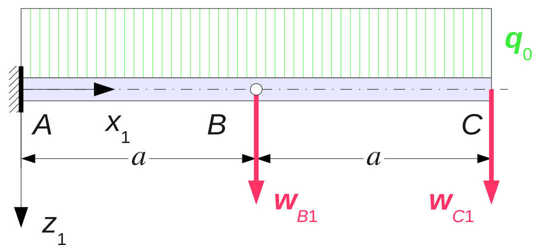


Aufgabe 6

a) Federkraft

Oberer Balken

Lastfall 1: Streckenlast



Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_1(x)=\frac{q_0(2a)^4}{24EI_y}\left[6\left(\frac{x_1}{2a}\right)^2-4\left(\frac{x_1}{2a}\right)^3+\left(\frac{x_1}{2a}\right)^4\right]$$

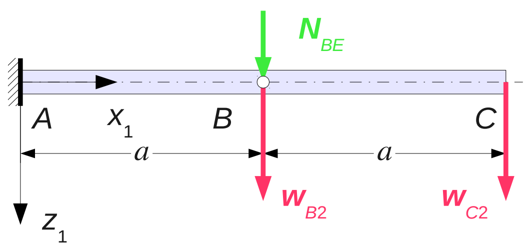
$$=\frac{q_0a^4}{24EI_y}\left[24\left(\frac{x_1}{a}\right)^2-8\left(\frac{x_1}{2}\right)^3+\left(\frac{x_1}{a}\right)^4\right]$$

Daraus folgt:

$$w_{B1}=w_1(a)=\frac{q_0a^4}{24EI_y}(24-8+1)=\frac{17}{24}\frac{q_0a^4}{EI_y}$$

$$w_{C1}=w_2(a)=\frac{16q_0a^4}{24EI_y}(6-4+1)=2\frac{q_0a^4}{EI_y}$$

Lastfall 2: Federkraft



Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x)=\frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{2a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{2a}\right)^3+\left\langle\frac{x_1}{2a}-\frac{1}{2}\right\rangle^3\right]$$

$$=\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}\left[3\left(\frac{x_1}{a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x_1}{a}-1\right\rangle^3\right]$$

Daraus folgt:

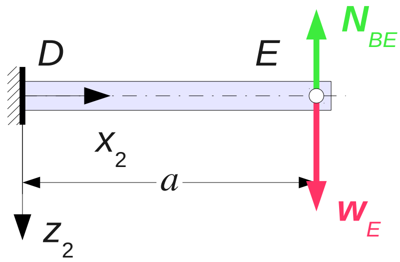
$$w_{B2}=w_2(a)=\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}(3-1)=\frac{1}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$w_{C2}=w_2(2a)=\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}(3\cdot 4-8+1)=\frac{5}{6}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

<u>Unterer Balken</u>

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_E=\frac{-N_{BE}a^3}{3EI_y}$$



<u>Verträglichkeitsbedingung</u>

$$N_{BE}=c\,\Delta L_{BE}=c\left(w_E-(w_{B1}+w_{B2})\right)$$

Einsetzen ergibt:

$$N_{BE}=c\left(-\frac{1}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}-\frac{17}{24}\frac{q_0a^4}{EI_y}-\frac{1}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}\right)=-\frac{ca^3}{EI_y}\left(\frac{2}{3}N_{BE}+\frac{17}{24}q_0a\right)$$

Daraus folgt:

$$\left(1+\frac{2}{3}\frac{ca^3}{EI_y}\right)N_{BE}=-\frac{17}{24}\frac{cq_0a^4}{EI_y}\;\rightarrow\;N_{BE}=-\frac{17}{24}\frac{\frac{ca^3}{EI_y}}{1+\frac{2}{3}\frac{ca^3}{EI_y}}q_0a=-\frac{17}{24}\frac{q_0a}{\frac{2}{3}+\frac{EI_y}{ca^3}}$$

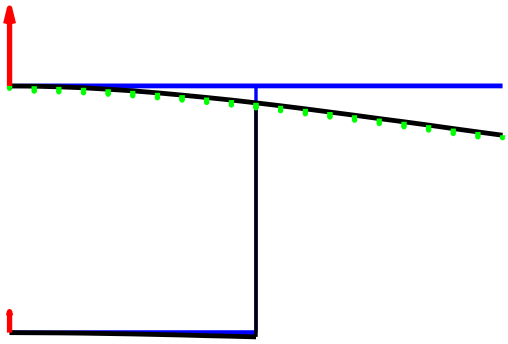
$$\rightarrow\;N_{BE}=-\frac{17q_0a}{16+24\frac{EI_y}{ca^3}}$$

Mit $c=EI_y/a^3$ folgt: $N_{BE}=-\frac{17}{40}q_0a=\underline{-0{,}425\,q_0a}$

b) Vertikalverschiebung von Punkt *C*

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{a^3}{E I_y}\left(2 q_0 a + \frac{5}{6} N_{BE}\right) = \frac{q_0 a^4}{E I_y}\left(2 - \frac{5}{6}\cdot\frac{17}{40}\right) = \frac{79}{48}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\rightarrow\quad w_C = \underline{1{,}646 \frac{q_0 a^4}{E I_y}}$$

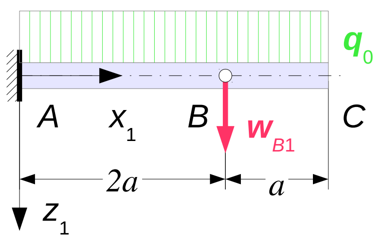


Aufgabe 7

Balken *AB*

Lastfall 1: Streckenlast

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:



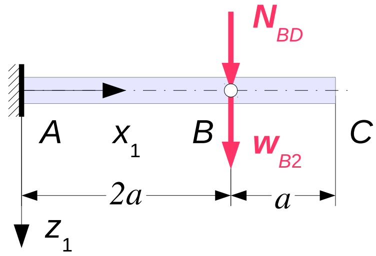
$$w_1(x_1) = \frac{q_0 (3a)^4}{24 E I_y}\left[6\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2 - 4\left(\frac{x_1}{3a}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{3a}\right)^4\right]$$

$$= \frac{q_0 a^4}{24 E I_y}\left[54\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 12\left(\frac{x_1}{a}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{a}\right)^4\right]$$

$$w_{B1} = w_1(2a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y}(54\cdot 4 - 12\cdot 8 + 16) = \underline{\frac{17}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}}$$

Lastfall 2: Unbekannte Stabkraft N_{BD}

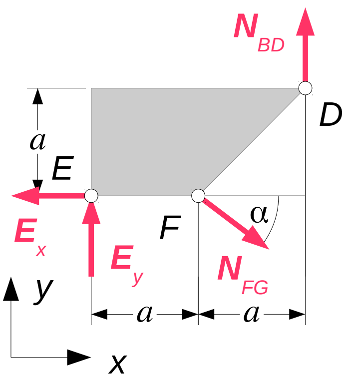
Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:



$$w_2(x_1)=$$
$$\frac{N_{BD}(3a)^3}{6EI_y}\left[2\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{3a}\right)^3+\left\langle\frac{x_1}{3a}-\frac{2}{3}\right\rangle^3\right]=$$
$$\frac{N_{BD}a^3}{6EI_y}\left[6\left(\frac{x_1}{a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{a}\right)^3+\left\langle\frac{x_1}{a}-2\right\rangle^3\right]$$

$$w_{B2}=w_2(2a)=\frac{N_{BD}a^3}{6EI_y}(6\cdot 4-8)=\underline{\frac{8}{3}\frac{N_{BD}a^3}{EI_y}}$$

<u>Starrer Körper</u>



Geometrie:

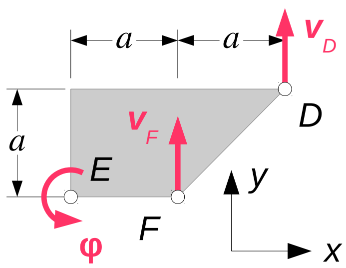
$$\tan(\alpha)=\frac{3}{4} \rightarrow \cos(\alpha)=\frac{4}{5},\quad \sin(\alpha)=\frac{3}{5}$$

Gleichgewicht:

$$\sum M^E=0 \;:\; 2aN_{BD}-aN_{FG}\sin(\alpha)=0$$

$$\rightarrow 2N_{BD}=\frac{3}{5}N_{FG} \rightarrow 10N_{BD}=3N_{FG}$$

Kinematik:



$$v_D=2a\phi,\quad u_F=0,\quad v_F=a\phi$$

<u>Stab *FG*</u>

$$\Delta L_{FG}=(u_G-u_F)\cos(-\alpha)+(v_G-v_F)\sin(-\alpha)$$
$$=v_F\sin(\alpha)=\frac{3}{5}v_F$$

$$L_{FG}=\sqrt{2^2+\frac{3^2}{2^2}}\,a=\frac{5}{2}a$$

$$N_{FG}=EA\frac{\Delta L_{FG}}{L_{FG}}=\frac{2}{5}EA\cdot\frac{3}{5}\frac{v_F}{a}=\frac{6}{25}EA\phi$$

Aus dem Momentengleichgewicht folgt:

$$N_{BD}=\frac{3}{10}N_{FG}=\frac{18}{250}EA\phi$$

Verträglichkeitsbedingung

Da der Stab *BD* starr ist, muss gelten: $v_D = -w_B$

$$2a\phi = -(w_{B1}+w_{B2}) = -\frac{17}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{8}{3}\frac{N_{BD} a^3}{E I_y} = -\frac{17}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{24}{125}\frac{A a^2}{I_y} a\phi$$

$$\left(2+\frac{24}{125}\frac{A a^2}{I_y}\right) a\phi = -\frac{17}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\phi = -\frac{17}{3}\frac{q_0 a^3}{E I_y}\frac{1}{2+\frac{24}{125}\frac{A a^2}{I_y}} = -\frac{17}{3}\frac{q_0 a^3}{E}\frac{125}{250 I_y + 24 A a^2}$$

Stabkräfte

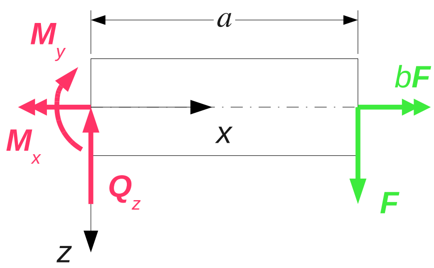
$$N_{BD} = -\frac{18}{250}\frac{17}{3}\frac{125 A q_0 a^3}{250 I_y + 24 A a^2} = -\frac{51 q_0 a}{24+250 I_y/(A a^2)}$$

$$N_{FG} = -\frac{6}{25}\frac{17}{3}\frac{125 A q_0 a^3}{250 I_y + 24 A a^2} = -\frac{170 q_0 a}{24+250 I_y/(A a^2)}$$

Aufgabe 8

a) Innendurchmesser

Die am Querarm angreifende Kraft kann durch eine im Mittelpunkt des Rohrs angreifende Kraft und ein Torsionsmoment ersetzt werden.



Die größte Beanspruchung tritt an der Einspannung auf. Sie setzt sich aus einer Biegespannung und einer Torsionsspannung zusammen.

Biegespannung

Biegemoment an der Einspannung: $M_y = -aF$

Biegespannung: $\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{aF}{W_y}$

Die betragsmäßig größte Biegespannung tritt am oberen und unteren Rand des Rohrs auf.

Mit dem Widerstandsmoment

$$W_y=\frac{\pi}{4}\frac{R_a^4-R_i^4}{R_a}=\frac{\pi}{32}\frac{d_a^4-d_i^4}{d_a}$$

des Kreisrings gilt:

$$\sigma_{max}=\frac{32\,a\,F}{\pi}\frac{d_a}{d_a^4-d_i^4}$$

Torsionsspannung

Das Torsionsmoment ist längs des Rohrs konstant: $M_x=b\,F$

Die größte Torsionsspannung tritt am äußeren Rand des Rohrs auf. Sie hat den Wert:

$$\tau_{max}=\frac{|M_x|}{W_T}=\frac{b\,F}{W_T}$$

Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_T=\frac{\pi}{2}\frac{R_a^4-R_i^4}{R_a}=\frac{\pi}{16}\frac{d_a^4-d_i^4}{d_a}$$

gilt:

$$\tau_{max}=\frac{16\,b\,F}{\pi}\frac{d_a}{d_a^4-d_i^4}$$

Auslegung

Die größte Beanspruchung tritt an der Einspannstelle im oberen und unteren Punkt des äußeren Randes des Rohrs auf. Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese berechnet sich zu

$$\sigma_{V,GH}=\sqrt{\sigma_{max}^2+3\,\tau_{max}^2}=\sqrt{\left(\frac{32\,a\,F}{\pi}\frac{d_a}{d_a^4-d_i^4}\right)^2+3\left(\frac{16\,b\,F}{\pi}\frac{d_a}{d_a^4-d_i^4}\right)^2}$$

$$=\frac{16\,F}{\pi}\frac{d_a}{d_a^4-d_i^4}\sqrt{4\,a^2+3\,b^2}\le\sigma_{zul}.$$

Auflösen nach dem gesuchten Innendurchmesser d_i ergibt:

$$\frac{16\,F\,d_a}{\pi\,\sigma_{zul}}\sqrt{4\,a^2+3\,b^2}\le d_a^4-d_i^4 \;\rightarrow\; d_i^4\le d_a^4-\frac{16\,F\,d_a\sqrt{4\,a^2+3\,b^2}}{\pi\,\sigma_{zul}}$$

Zahlenwert:

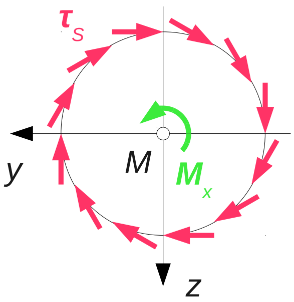
$$\sqrt{4a^2+3b^2}=\sqrt{4\cdot 300^2+3\cdot 100^2}\,\mathrm{mm}=624{,}5\,\mathrm{mm}$$

$$\frac{16\,F\,d_a}{\pi\sigma_{zul}}=\frac{16\cdot 250\,\mathrm{N}\cdot 20\,\mathrm{mm}}{\pi\cdot 180\,\mathrm{N/mm^2}}=141{,}5\,\mathrm{mm}^3$$

$$d_i^4\le 20^4\,\mathrm{mm}^4-114{,}5\,\mathrm{mm}^4\cdot 624{,}5\,\mathrm{mm}=160000\,\mathrm{mm}^4-88350\,\mathrm{mm}^4=71650\,\mathrm{mm}^4$$

$$\rightarrow\ \ d_i\le \underline{16{,}36\,\mathrm{mm}}$$

b) Schubspannung in der Schweißnaht



Es darf angenommen werden, dass die Schubspannung in der Schweißnaht konstant ist. Das resultierende Moment der Schubspannungen in beiden Schweißnähten um den Kreismittelpunkt muss mit dem Torsionsmoment im Gleichgewicht sein:

$$\sum M^M=0\ :\ \ M_x-2\cdot\frac{d_a}{2}\cdot\tau_S\,s\,\pi\,d_a=0$$

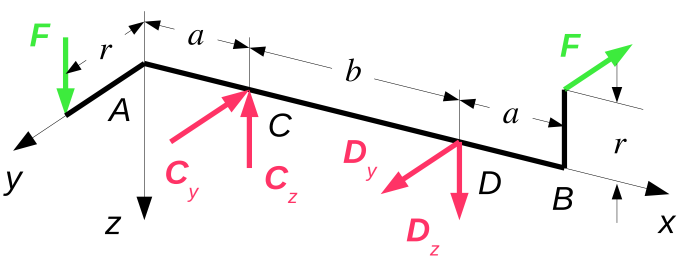
$$\rightarrow\ \ \tau_S=\frac{M_x}{\pi\,d_a^2\,s}=\frac{b\,F}{\pi\,d_a^2\,s}$$

Zahlenwert:

$$\tau_S=\frac{100\,\mathrm{mm}\cdot 250\,\mathrm{N}}{\pi\cdot 20^2\,\mathrm{mm}^2\cdot 5\,\mathrm{mm}}=\underline{3{,}980\,\mathrm{MPa}}$$

Aufgabe 9

Lagerkräfte



$$\sum M_y^C=0\ :$$

$$a\,F-b\,D_z=0$$

$$\rightarrow\ \ D_z=\frac{a}{b}F$$

$$\sum M_z^C=0\ :$$

$$b\,D_y-(b+a)\,F=0\quad\rightarrow\ \ D_y=\frac{b+a}{b}F=\left(1+\frac{a}{b}\right)F$$

$$\sum F_y = 0 \ : \ -C_y + D_y - F = 0 \ \rightarrow \ C_y = D_y - F = \frac{a}{b} F$$

$$\sum F_z = 0 \ : \ F - C_z + D_z = 0 \ \rightarrow \ C_z = F + D_z = \left(1 + \frac{a}{b}\right) F$$

Zahlenwerte:

$$C_y = \frac{1}{3} \cdot 450\,\mathrm{N} = 150\,\mathrm{N}, \quad C_z = \frac{4}{3} \cdot 450\,\mathrm{N} = 600\,\mathrm{N}$$

$$D_y = \frac{4}{3} \cdot 450\,\mathrm{N} = 600\,\mathrm{N}, \quad D_z = \frac{1}{3} \cdot 450\,\mathrm{N} = 150\,\mathrm{N}$$

<u>Biegemomente</u>

Abschnitt *AC* : Gleichgewicht für die linke Teilwelle

$$M_y(x) = -x F \ , \ M_y(a) = -a F = -45000\,\mathrm{Nmm} = -45\,\mathrm{Nm}$$

$$M_z(x) = 0$$

Abschnitt *CD*: Gleichgewicht für die linke Teilwelle

$$M_y(x) = -\left(x F - (x-a) C_z\right) = -x F + (x-a) C_z$$

$$M_y(a+b) = -(a+b) F + b C_z = (-a - b + b + a) F = 0$$

$$M_z(x) = -(x-a) C_y$$

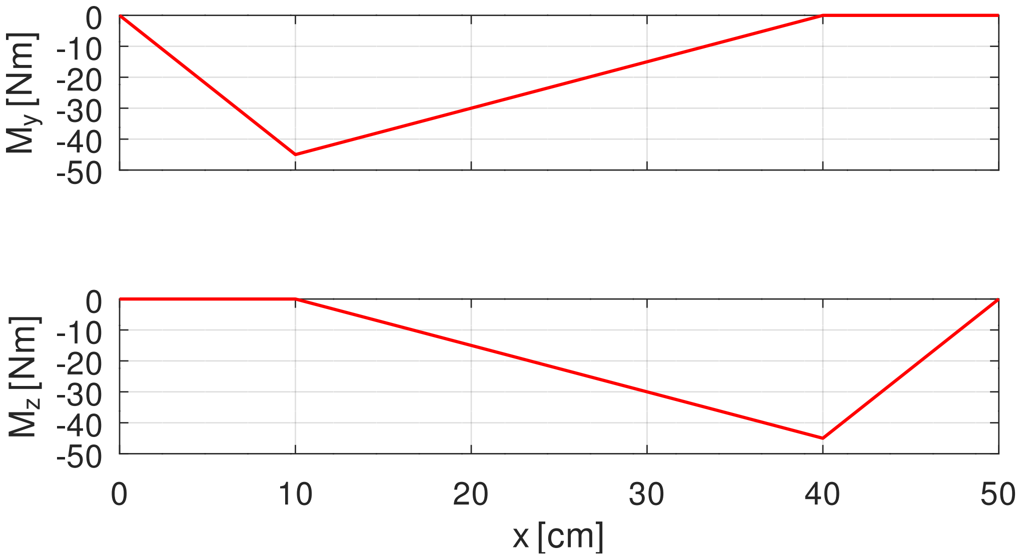
$$M_z(a+b) = -b C_y = -a F = -45\,\mathrm{Nm}$$

Abschnitt *DB*: Gleichgewicht für die rechte Teilwelle

$$M_y(x) = 0$$

$$M_z(x) = -(2a + b - x) F$$

$$M_z(a+b) = -a F, \quad M_z(2a+b) = 0$$



In den Abschnitten *AC* und *DB* besteht die Belastung aus jeweils nur einem Moment, während sich in dem Abschnitt *CD* die Momente um die *y*- und die *z*-Achse überlagern. Da beim Kreisquerschnitt das Flächenträgheitsmoment um jede Achse durch den Schwerpunkt gleich ist, kann die Biegespannung mit dem Betrag des resultierenden Moments berechnet werden:

$$M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$$

Mit $M_y(x)=-45\,\mathrm{Nm}\left(1-\dfrac{x-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)$ und $M_z(x)=-45\,\mathrm{Nm}\left(\dfrac{x-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)$

folgt:

$$M^2(x)=45^2\,\mathrm{N}^2\mathrm{m}^2\left[\left(1-\frac{x-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)^2+\left(\frac{x-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)^2\right]$$

$$=45^2\,\mathrm{N}^2\mathrm{m}^2\left[1+2\left(\frac{x-100\,\mathrm{mmm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)^2-2\left(\frac{x-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)\right]$$

Für die Stelle des Extremwerts gilt:

$$\frac{dM^2}{dx}(x_E)=0\ :\ 4\left(\frac{x_E-100\,\mathrm{mm}}{300\,\mathrm{mm}}\right)=2\ \rightarrow\ x_E=100\,\mathrm{mm}+\frac{300\,\mathrm{mm}}{2}=250\,\mathrm{mm}$$

Der Wert des Extremums ist:

$$M^2(x_E)=45^2\,\mathrm{N}^2\mathrm{m}^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2^2}\right]=\frac{45^2\,\mathrm{N}^2\mathrm{m}^2}{2}$$

Das Extremum ist kleiner als der Wert an den beiden Intervallgrenzen und daher ein Minimum.

Das größte Biegemoment tritt also in den Punkten *C* und *D* auf und beträgt:

$$M_{max} = 45\,\mathrm{Nm}$$

Torsionsmoment

Nur die beiden an den Zahnrädern angreifenden Kräfte liefern einen Beitrag zum Torsionsmoment. Das Torsionsmoment ist daher in der gesamten Welle konstant.

Aus dem Gleichgewicht am rechten Teilbalken für einen beliebigen Schnitt folgt:

$$M_x = -r\,F$$

Zahlenwert: $|M_x| = 100\,\mathrm{mm} \cdot 450\,\mathrm{N} = 45\,\mathrm{Nm}$

Spannungen

Die größten Spannungen treten am äußeren Rand des Querschnitts auf.

Für den Betrag der größten Biegespannung gilt: $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W}$

Mit dem Widerstandsmoment

$$W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$$

des Kreisquerschnitts folgt: $\sigma_{max} = \dfrac{32\,M_{max}}{\pi d^3}$

Der Betrag der größten Torsionsspannung ist: $\tau_{max} = \dfrac{|M_x|}{W_T}$

Mit dem Torsionswiderstandsmoment

$$W_T = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

des Kreisquerschnitts folgt: $\tau_{max} = \dfrac{16|M_x|}{\pi d^3}$

Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese berechnet sich zu:

$$\sigma_{V,GH} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\,\tau_{max}^2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4\,M_{max}^2 + 3\,M_x^2} \le \sigma_{zul}$$

Auflösen nach dem gesuchten Durchmesser ergibt:

$$\frac{16}{\pi \sigma_{zul}} \sqrt{4 M_{max}^2 + 3 M_x^2} \le d^3$$

Zahlenwert:

$$d^3 \ge \frac{16\sqrt{4\cdot(45\cdot 10^3\,\mathrm{Nmm})^2 + 3\cdot(45\cdot 10^3\,\mathrm{Nmm})^2}}{\pi\cdot 150\,\mathrm{N/mm^2}} = \frac{16\sqrt{7}}{\pi}\frac{45\cdot 10^3\,\mathrm{mm}^3}{150} = 4043\,\mathrm{mm}^3$$

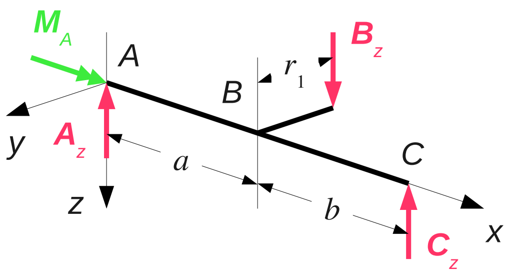
$\rightarrow$ $\underline{d \ge 16\,\mathrm{mm}}$

Aufgabe 10

<u>Welle *AC*</u>

Am Zahnrad *B* greift die vom Zahnrad *E* ausgeübte Kraft an.

Berechnung der Kräfte:



$$\sum M_x^A = 0 \;:\; M_A - r_1 B_z = 0$$

$$\rightarrow\; B_z = \frac{M_A}{r_1}$$

$$\sum M_y^A = 0 \;:\; -a B_z + (a+b) C_z = 0$$

$$\rightarrow\; C_z = \frac{a}{a+b} B_z = \frac{a}{a+b}\frac{M_A}{r_1}$$

$$\sum F_z = 0 \;:\; -A_z + B_z - C_z = 0 \;\rightarrow\; A_z = B_z - C_z = \frac{a+b-a}{a+b} B_z = \frac{b}{a+b}\frac{M_A}{r_1}$$

Biegemoment: (Gleichgewicht für den linken Teilbalken)

$$M_y(x) = -\left(-x A_z + \langle x-a\rangle B_z\right) = \frac{M_A}{r_1}\left(\frac{b\,x}{a+b} - \langle x-a\rangle\right)$$

$$M_y(0) = 0,\quad M_y(a) = \frac{M_A}{r_1}\frac{a\,b}{a+b},\quad M_y(a+b) = \frac{M_A}{r_1}(b-b) = 0$$

Das größte Biegemoment tritt an der Stelle *B* auf. Es hat den Wert:

$$M_{max} = M_y(a) = \frac{M_A}{r_1}\frac{a\,b}{a+b}$$

Torsionsmoment: (Gleichgewicht für den linken Teilbalken)

$$M_x = -M_A + \langle x-a\rangle^0 r_1 B_z = -M_A\left(1 - \langle x-a\rangle^0\right)$$

Das Torsionsmoment ist abschnittsweise konstant. Es hat im Bereich *AB* den Wert

$$M_x = -M_A$$

und ist im Bereich *BC* null.

Die größte Beanspruchung tritt an der Stelle *B* im oberen und unteren Punkt des äußeren Rands des Querschnitts auf.

Mit

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_1} = \frac{32\, M_{max}}{\pi\, d_1^3} = \frac{32}{\pi\, d_1^3} \frac{M_A}{r_1} \frac{a\, b}{a+b}$$

und $\tau_{max} = \frac{16 |M_x|}{\pi\, d_1^3} = \frac{16\, M_A}{\pi\, d_1^3}$

berechnet sich die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese zu

$$\sigma_{V,GH} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \frac{16\, M_A}{\pi\, d_1^3} \sqrt{4\left(\frac{a\, b}{r_1(a+b)}\right)^2 + 3} \le \sigma_{zul}.$$

Daraus folgt für den Durchmesser:

$$d_1 \ge 2 \sqrt[3]{\frac{2\, M_A}{\pi\, \sigma_{zul}} \sqrt{4\left(\frac{a\, b}{r_1(a+b)}\right)^2 + 3}}$$

Zahlenwert:

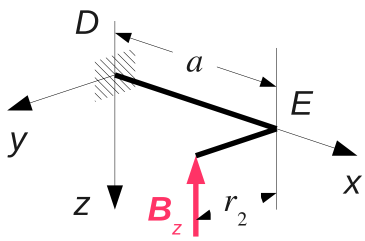
$$\frac{a\, b}{r_1(a+b)} = \frac{300 \cdot 400}{50 \cdot 700} = \frac{24}{7}$$

$$\sqrt{4\left(\frac{a\, b}{r_1(a+b)}\right)^2 + 3} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24^2}{49} + 3} = 7{,}073$$

$$\frac{2\, M_A}{\pi\, \sigma_{zul}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3\, \mathrm{Nmm}}{\pi \cdot 150\, \mathrm{N/mm^2}} = 42{,}44\, \mathrm{mm}^3$$

$$d_1 \ge 2 \sqrt[3]{43{,}44\, \mathrm{mm}^3 \cdot 7{,}073} = \underline{13{,}40\, \mathrm{mm}}$$

<u>Welle *DE*</u>



Biege- und Torsionsmoment werden aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken ermittelt:

$$M_y(x) = (a-x) B_z = \frac{a-x}{r_1} M_A$$

$$M_x = -r_2 B_z = -\frac{r_2}{r_1} M_A$$

Die größte Beanspruchung tritt an der Stelle *D* im oberen und unteren Punkt des äußeren Rands des Querschnitts auf.

Mit

$$\sigma_{max}=\frac{a}{r_1}\frac{M_A}{W_2}=\frac{32}{\pi d_2^3}\frac{M_A a}{r_1}$$

und

$$\tau_{max}=\frac{16|M_x|}{\pi d_2^3}=\frac{16}{\pi d_2^3}\frac{M_A r_2}{r_1}$$

berechnet sich die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese zu

$$\sigma_{V,GH}=\sqrt{\sigma_{max}^2+3\tau_{max}^2}=\frac{16 M_A}{\pi d_2^3 r_1}\sqrt{4a^2+3r_2^2}\le\sigma_{zul}.$$

Daraus folgt für den Durchmesser:

$$d_2\ge 2\sqrt[3]{\frac{2M_A}{\pi\sigma_{zul}}\frac{\sqrt{4a^2+3r_2^2}}{r_1}}$$

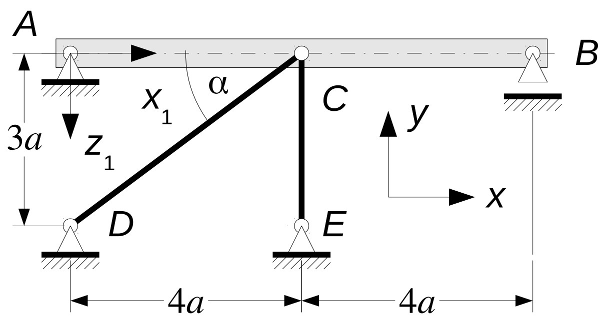
Zahlenwert:

$$\frac{\sqrt{4a^2+3r_2^2}}{r_1}=\frac{\sqrt{4\cdot 300^2+3\cdot 25^2}}{50}=12{,}03$$

$$\frac{2M_A}{\pi\sigma_{zul}}=\frac{2\cdot 10\cdot 10^3\,\mathrm{Nmm}}{\pi\cdot 150\,\mathrm{N/mm^2}}=42{,}44\,\mathrm{mm}^3$$

$$d_2\ge 2\sqrt[3]{42{,}44\,\mathrm{mm}^3\cdot 12{,}03}=\underline{15{,}99\,\mathrm{mm}}$$

Aufgabe 11



Geometrie:

$$L_{CD}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5a$$

$$\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$$

Das System wird in zwei Teilsysteme zerlegt:

1. Teilsystem 1: Balken *AB*
2. Teilsystem 2: Stäbe *CD* und *CE*

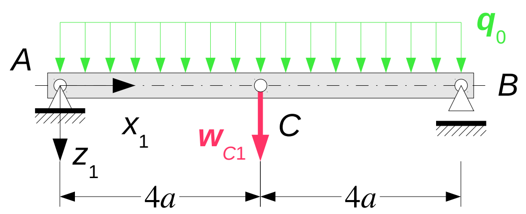
Die Verschiebung von Punkt *C* muss für beide Teilsysteme gleich sein.

Balken *AB*

Lastfall 1: Streckenlast

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

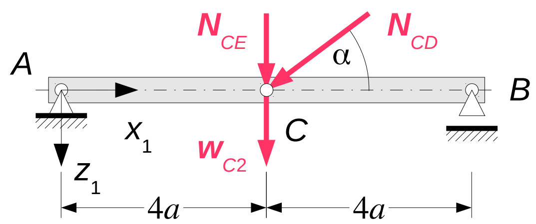
$$w_{C1} = \frac{5}{384} \frac{q_0 (8a)^4}{E I_y} = \frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$



Lastfall 2: Stabkräfte

Für die resultierende Kraft im Punkt *C* gilt:

$$F = N_{CE} + N_{CD} \sin(\alpha)$$
$$= N_{CE} + \frac{3}{5} N_{CD}$$



Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

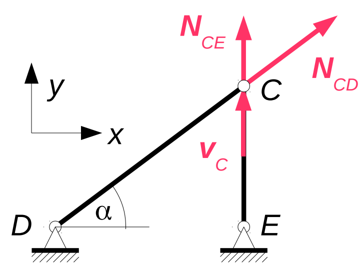
$$w_{C2} = \frac{F (8a)^3}{48 E I_y} = \frac{32}{3} \frac{a^3}{E I_y} \left(N_{CE} + \frac{3}{5} N_{CD} \right)$$

Stabsystem

Mit $u_C = 0$ gilt für die Längenänderungen:

$$\Delta L_{DC} = v_C \sin(\alpha) = \frac{3}{5} v_C$$

$$\Delta L_{EC} = v_C$$



Stabgleichungen:

$$N_{CD} = E A \frac{\Delta L_{CD}}{L_{CD}} = \frac{3}{25} \frac{E A}{a} v_C \,, \quad N_{CE} = E A \frac{\Delta L_{CE}}{L_{CE}} = \frac{1}{3} \frac{E A}{a} v_C$$

Verträglichkeit und Stabkräfte

$$v_C = -w_C = -(w_{C1} + w_{C2}) :$$

$$v_C = -\frac{160}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y} - \frac{32}{3} \frac{a^3}{E I_y} \frac{EA}{a} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{25} \right) v_C$$

$$\left[1+\frac{32}{3}\frac{a^2 A}{I_y}\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{125}\right)\right]v_C=-\frac{160}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\left(1+\frac{4864}{1125}\frac{a^2 A}{I_y}\right)v_c=-\frac{160}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Mit

$$\frac{a^2 A}{I_y}=\frac{1125}{256}$$

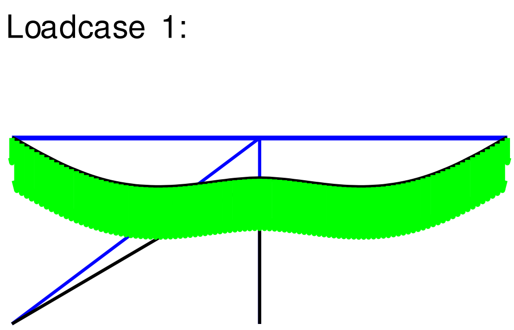
folgt:

$$20\,v_c=-\frac{160}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y} \rightarrow v_C=-\frac{8}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

Damit gilt für die Stabkräfte:

$$N_{CD}=-\frac{3}{25}\frac{E A}{a}\cdot\frac{8}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}=-\frac{8}{25}\frac{a^2 A}{I_y}q_0 a=-\frac{45}{32}q_0 a$$

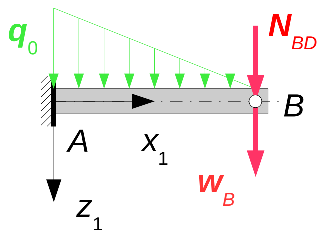
$$N_{CE}=-\frac{1}{3}\frac{E A}{a}\cdot\frac{8}{3}\frac{q_0 a^4}{E I_y}=-\frac{8}{9}\frac{a^2 A}{I_y}q_0 a=-\frac{125}{32}q_0 a$$



Aufgabe 12

Die Aufgabe lässt sich mit Superposition lösen.

Oberer Balken



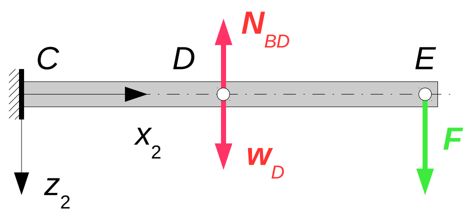
Lastfall 1: Streckenlast

$$w_{B1}=\frac{q_0 a^4}{30\,E\,I_y}$$

Lastfall 2: Kraft N_{BD}

$$w_{B2}=\frac{N_{BD}\,a^3}{3\,E\,I_y}$$

Unterer Balken



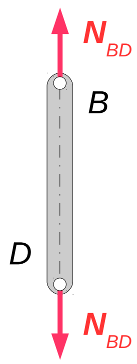
Lastfall 1: Kraft F

$$w_{D1}=\frac{8\,F\,a^3}{6\,E\,I_y}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{6}\frac{F\,a^3}{E\,I_y}$$

Lastfall 2: Kraft N_{BD}

$$w_{D2}=-\frac{8\,N_{BD}\,a^3}{6\,E\,I_y}\left(3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}\right)=-\frac{N_{BD}\,a^3}{3\,E\,I_y}$$

Stab



$$\Delta L_{BD}=\frac{N_{BD}\,a}{E\,A}$$

Verträglichkeitsbedingung

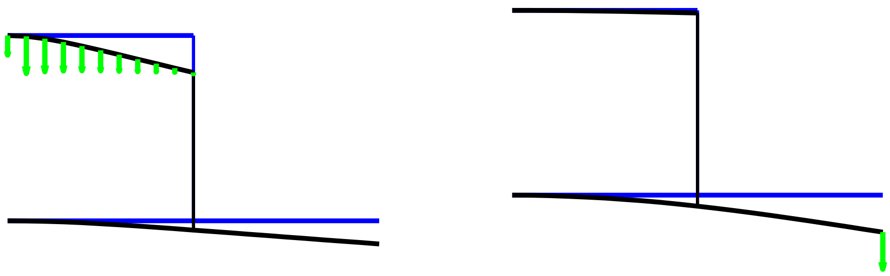
$$\Delta L_{BD}=w_D-w_B$$

$$\frac{N_{BD}\,a}{E\,A}=\frac{a^3}{6\,E\,I_y}\left(5\,F-2\,N_{BD}-\frac{q_0\,a}{5}-2\,N_{BD}\right)$$

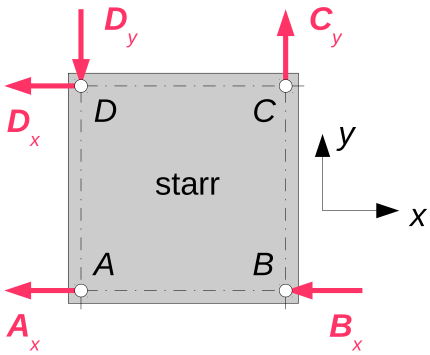
$$\left(\frac{1}{A}+\frac{2}{3}\frac{a^2}{I_y}\right)N_{BD}=\frac{a^2}{6\,I_y}\left(5\,F-\frac{q_0\,a}{5}\right)$$

$$\rightarrow\ \left(4+6\frac{I_y}{a^2\,A}\right)N_{BD}=\frac{25\,F-q_0\,a}{5}\ \rightarrow\ N_{BD}=\frac{25\,F-q_0\,a}{20+30\,I_y/(a^2\,A)}$$

Loadcase 1: Loadcase 2:



Aufgabe 13



a) Freischnitt des starren Körper

In den Gelenken *A* und *B* treten keine Kräfte in *y*-Richtung auf, da sich der starre Körper nur in *x*-Richtung bewegen kann und sich daher die Länge der in diesen Punkten angeschlossenen Balken nicht ändert.

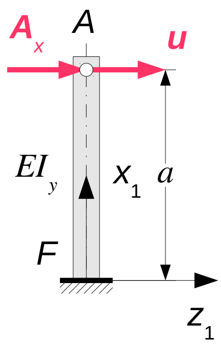
b) Verschiebung des starren Körpers

Der starre Körper kann sich nur in *x*-Richtung verschieben. Da der Körper starr ist, gilt:

$$u_A = u_B = u_C = u_D = u$$

Stab *ED*:

$$u = \Delta L_{ED} = a\left(\frac{D_x}{EA} + \alpha_T \Delta T\right) \rightarrow D_x = EA\left(\frac{u}{a} - \alpha_T \Delta T\right)$$



Balken *FA* und *GB*:

Aus Tabelle:

$$u = \frac{1}{3}\frac{A_x a^3}{EI_y} \rightarrow A_x = \frac{3EI_y}{a^3} u$$

ebenso: $B_x = \frac{3 E I_y}{a^3} u$

Kräftegleichgewicht des starren Körpers in *x*-Richtung:

$$\sum F_x = 0 \; : \; -D_x - A_x - B_x = 0$$

Einsetzen der Beziehungen für die Kräfte ergibt:

$$E A \left(\frac{u}{a} - \alpha_T \Delta T \right) + 6 \frac{E I_y}{a^3} u = 0$$

$$\left(A + 6 \frac{I_y}{a^2} \right) u = A a \alpha_T \Delta T \rightarrow \left(1 + 6 \frac{I_y}{a^2 A} \right) u = a \alpha_T \Delta T$$

Mit $I_y / (a^2 A) = 1/6$ folgt: $u = \frac{1}{2} a \alpha_T \Delta T$

c) <u>Gelenkkräfte</u>

Mit den Ergebnissen aus Teil b) folgt:

$$A_x = B_x = \frac{3}{2} \frac{E I_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

$$D_x = E A \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \alpha_T \Delta T = -\frac{1}{2} E A \alpha_T \Delta T$$

Die restlichen beiden Kräfte folgen aus den verbleibenden beiden Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:

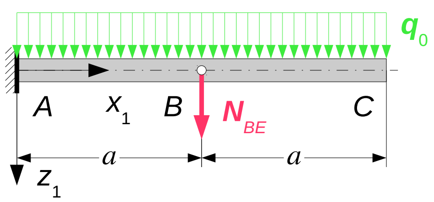
$$\sum M^D = 0 \; : \; a C_y - a (A_x + B_x) = 0 \rightarrow C_y = A_x + B_x = 3 \frac{E I_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

$$\sum F_y = 0 \; : \; C_y - D_y = 0 \rightarrow D_y = C_y = 3 \frac{E I_y}{a^2} \alpha_T \Delta T$$

Aufgabe 14

<u>Balken *ABC*</u>

Lastfall 1: Streckenlast

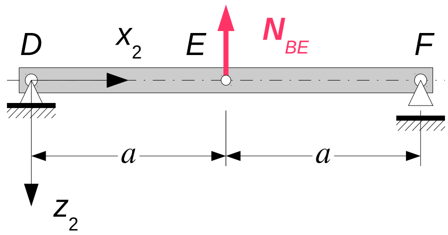


$$w_{B1}=\frac{q_0(2a)^4}{24EI_y}\left(6\cdot\frac{1}{2^2}-4\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=\frac{q_0 a^4}{24EI_y}(24-8+1)=\frac{17}{24}\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

Lastfall 2: Stabkraft

$$w_{B2}=\frac{N_{BE}(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}(3-1)=\frac{1}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

<u>Balken *DEF*</u>



$$w_E=-\frac{N_{BE}(2a)^3}{3EI_y}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2^2}$$
$$=-\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}$$

<u>Stab *BE*</u>

$$\Delta L_{BE}=\frac{N_{BE}a}{EA}$$

<u>Verträglichkeit</u>

$$\Delta L_{BE}=w_E-w_B$$

$$\frac{N_{BE}a}{EA}=-\frac{N_{BE}a^3}{6EI_y}-\frac{17}{24}\frac{q_0 a^4}{EI_y}-\frac{1}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

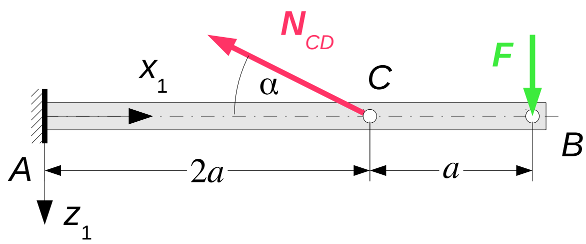
$$17\frac{q_0 a^3}{I_y}=-\left(\frac{24}{A}+4\frac{a^2}{I_y}+8\frac{a^2}{I_y}\right)N_{BE}=-12\frac{a^2}{I_y}\left(2\frac{I_y}{a^2 A}+1\right)N_{BE}$$

$$\rightarrow\quad N_{BE}=-\frac{17}{12}\frac{q_0 a}{1+2I_y/(a^2 A)}$$

Aufgabe 15

<u>Balken *AB*</u>

Geometrie: $\sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$



Lastfall 1: Kraft F

Aus Tabelle:

$$w_1(x_1)=\frac{F(3a)^3}{6EI_y}\left(3\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{3a}\right)^3\right)=\frac{Fa^3}{6EI_y}\left(9\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_1^3}{a^3}\right)$$

$$w_{C1}=w_1(2a)=\frac{Fa^3}{6EI_y}(9\cdot 4-8)=\frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

Lastfall 2: Seilkraft N_{CD}

Aus Tabelle:

$$w_2(x_1)=-\frac{N_{CD}\sin(\alpha)(3a)^3}{6EI_y}\left(3\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{3a}\right)^3+\left\langle\frac{x_1}{3a}-\frac{2}{3}\right\rangle^3\right)$$

$$=-\frac{N_{CD}a^3}{6\sqrt{5}EI_y}\left(6\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_1^3}{a^3}+\left\langle\frac{x_1}{a}-2\right\rangle^3\right)$$

$$w_{C2}=w_2(2a)=-\frac{N_{CD}a^3}{6\sqrt{5}EI_y}(6\cdot 4-8)=-\frac{8N_{CD}a^3}{3\sqrt{5}EI_y}$$

<u>Seil *CD*</u>

Mit $u_C = 0$ (Balken *AB* ist dehnstarr) gilt für die Längenänderung:

$$\Delta L_{CD}=-v_C\sin(180°-\alpha)=-v_C\sin(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{5}}v_C$$

Aus der Stabgleichung

$$\Delta L_{CD}=\frac{N_{CD}\cdot\sqrt{5}a}{EA}$$

folgt:

$$v_C=-\sqrt{5}\Delta L_{CD}=-\frac{5a}{EA}N_{CD}$$

<u>Verträglichkeitsbedingung</u>

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}=-v_C \rightarrow \frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI_y}-\frac{8N_{CD}a^3}{3\sqrt{5}EI_y}=\frac{5N_{CD}a}{EA}$$

Mit

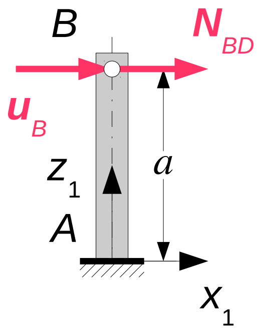
$$A=15\frac{I_y}{a^2}$$

folgt:

$$\frac{a^3}{3 I_y}\left(14 F-\frac{8}{\sqrt{5}} N_{CD}\right)=\frac{5 N_{CD} a^3}{15 I_y}=\frac{N_{CD} a^3}{3 I_y}$$

$$\rightarrow\ 14 F=\left(1+\frac{8}{\sqrt{5}}\right) N_{CD}\ \rightarrow\ N_{CD}=\frac{14 F}{1+\frac{8}{\sqrt{5}}}=\frac{14\sqrt{5} F}{8+\sqrt{5}}=3{,}058 F$$

Aufgabe 16

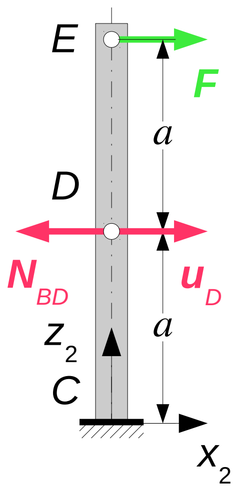


Balken *AB*

Aus Tabelle:

$$u_B=\frac{1}{3}\frac{N_{BD} a^3}{E I_y}$$

Balken *CE*



Lastfall 1: Kraft F

$$u_{D1}=\frac{F (2a)^3}{6 E I_y}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{F a^3}{6 E I_y}(6-1)=\frac{5}{6}\frac{F a^3}{E I_y}$$

Lastfall 2: Kraft N_{BD}

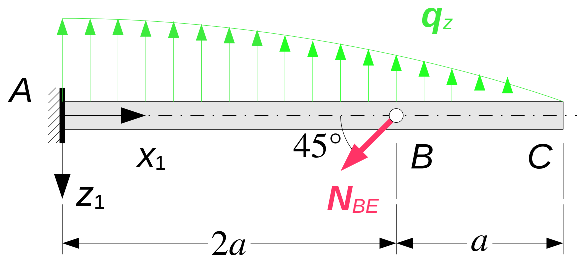
$$u_{D2}=-\frac{N_{BD} (2a)^3}{6 E I_y}\left(\frac{3}{2^3}-\frac{1}{2^3}\right)=-\frac{N_{BD} a^3}{3 E I_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$u_B=u_{D1}+u_{D2}:\ \frac{1}{3}\frac{N_{BD} a^3}{E I_y}=\frac{5}{6}\frac{F a^3}{E I_y}-\frac{N_{BD} a^3}{3 E I_y}$$

$$\rightarrow\ 4 N_{BD}=5 F\ \rightarrow\ N_{BD}=\frac{5}{4} F$$

Aufgabe 17



Tragflügel *ABC*

Lastfall 1: Streckenlast

$$EI_y \frac{d^4 w_1}{dx_1^4} = -q_0 \left(1 - \frac{1}{9}\frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

$$EI_y \frac{d^3 w_1}{dx_1^3} = -q_0 \left(x_1 - \frac{1}{27}\frac{x_1^3}{a^2} + c_1\right) = -Q_z(x_1)$$

$$EI_y \frac{d^2 w_1}{dx_1^2} = -q_0 \left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{108}\frac{x_1^4}{a^2} + c_1 x_1 + c_2\right) = -M_y(x_1)$$

$$EI_y \frac{dw_1}{dx_1} = -q_0 \left(\frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{540}\frac{x_1^5}{a^2} + \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3\right)$$

$$EI_y w_1 = -q_0 \left(\frac{1}{24}x_1^4 - \frac{1}{3240}\frac{x_1^6}{a^2} + \frac{1}{6}c_1 x_1^3 + \frac{1}{2}c_2 x_1^2 + c_3 x_1 + c_4\right)$$

Randbedingungen:

$$Q_z(3a) = 0 \ : \ 3a - a + c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -2a$$

$$M_y(3a) = 0 \ : \ \frac{9}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2 - 6a^2 + c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{9}{4}a^2$$

$$\frac{dw_1}{dx_1}(0) = 0 \ : \ c_3 = 0$$

$$w_1(0) = 0 \ : \ c_4 = 0$$

Verschiebung von Punkt *B*:

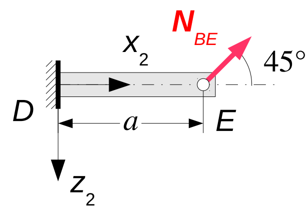
$$w_{B1} = w_1(2a) = -\frac{q_0 a^4}{EI_y}\left(\frac{2^4}{24} - \frac{2^6}{3240} - \frac{2}{6}\cdot 2^3 + \frac{9}{8}\cdot 2^2\right) = -\frac{2009}{810}\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

Lastfall 2: Strebenkraft N_{BE}

aus Tabelle: $$w_2(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{N_{BE}(3a)^3}{EI_y}\left[3\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a}\right)^3 + \left\langle\frac{x_1}{3a} - \frac{2}{3}\right\rangle^3\right]$$

$$w_{B2} = w_2(2a) = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}\left(6\cdot 2^2 - 2^3\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

Balken *DE*



aus Tabelle:

$$w_E = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{N_{BE}\,a^3}{E\,I_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$\Delta L_{BE} = 0 \;\rightarrow\; w_B = w_E$$

$$-\frac{2009}{810}\frac{q_0\,a^4}{E\,I_y} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{N_{BE}\,a^3}{E\,I_y} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{N_{BE}\,a^3}{E\,I_y}$$

$$\rightarrow\; \frac{3}{2}\sqrt{2}\,N_{BE} = \frac{2009}{810}\,q_0\,a$$

$$\rightarrow\; N_{BE} = \frac{2\cdot 2009}{3\cdot 810\sqrt{2}}\,q_0\,a = \frac{2009\sqrt{2}}{2430}\,q_0\,a = 1{,}169\,q_0\,a$$

Aufgabe 18

a) Schnittlasten

Rechter Teilbalken:

$$N = \sum F_x = F_x = 100\,\mathrm{kN}$$

$$Q_y = \sum F_y = 0\,,\; Q_z = \sum F_y = 0$$

$$M_x = \sum M_x^X = h\,F_y = 80\,\mathrm{mm}\cdot 80\,\mathrm{kN} = 6{,}4\,\mathrm{kNm}$$

$$M_y = \sum M_y^X = -h\,F_x = -80\,\mathrm{mm}\cdot 100\,\mathrm{kN} = -8\,\mathrm{kNm}$$

$$M_z = \sum M_z^X = 0$$

b) Querschnittskennwerte

$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(5^2 - 3^2\right)\mathrm{cm}^2 = 50{,}27\,\mathrm{cm}^2$$

$$I_T = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(5^4 - 3^4\right)\mathrm{cm}^4 = 854{,}5\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2}\,I_T = 427{,}3\,\mathrm{cm}^4$$

c) Spannungen

Normalspannung:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} R = \frac{100 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{50{,}27 \cdot 10^2\,\mathrm{mm}^2} + \frac{8 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}}{427{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} \cdot 50\,\mathrm{mm}$$
$$= 19{,}89\,\mathrm{MPa} + 93{,}61\,\mathrm{MPa} = 113{,}5\,\mathrm{MPa}$$

Schubspannung:

$$\tau_{xy} = \frac{M_x}{I_T} R = \frac{6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{Nmm}}{854{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} \cdot 50\,\mathrm{mm} = 37{,}45\,\mathrm{MPa}$$

d) Sicherheit gegen Fließen

Vergleichsspannung:

$$\sigma_{V,GH} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\,\tau_{xy}^2} = \sqrt{113{,}5^2 + 3 \cdot 37{,}45^2}\,\mathrm{MPa} = \sqrt{17090}\,\mathrm{MPa} = 130{,}7\,\mathrm{MPa}$$

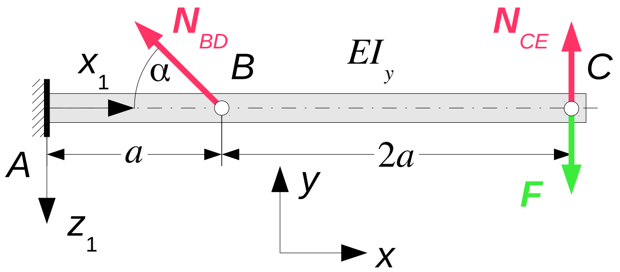
Sicherheit:

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{V,GH}} = \frac{295\,\mathrm{MPa}}{130{,}7\,\mathrm{MPa}} = 2{,}25$$

Aufgabe 19

Kragbalken

Winkel: $\alpha = 45°$



Lastfall 1: $F - N_{CE}$

aus Tabelle:

$$w_1(x_1) = \frac{(F - N_{CE})(3a)^3}{6EI_y}\left[3\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a}\right)^3\right] = \frac{(F - N_{CE})a^3}{6EI_y}\left[9\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^3\right]$$

$$w_{B1} = w_1(a) = \frac{4}{3}\frac{(F - N_{CE})a^3}{EI_y}, \quad w_{C1} = w_1(3a) = 9\frac{(F - N_{CE})a^3}{EI_y}$$

Lastfall 2: N_{BD}

aus Tabelle:

$$w_2(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{N_{BD}(3a)^3}{E I_y}\left[3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{3a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{3a}\right)^3 + \left\langle\frac{x_1}{3a}-\frac{1}{3}\right\rangle^3\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{N_{BD}a^3}{E I_y}\left[3\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 + \left\langle\frac{x_1}{a}-1\right\rangle^3\right]$$

$$w_{B2} = w_2(a) = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{N_{BD}a^3}{E I_y}\ ,\ \ w_{C2} = w_2(3a) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{N_{BD}a^3}{E I_y}$$

<u>Stäbe</u>

Stab *DB*: $\Delta L_{DB} = v_B \sin(-\alpha) = -w_B \sin(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} w_B$

$$\rightarrow\ w_B = \sqrt{2}\,\Delta L_{DB} = \sqrt{2}\frac{N_{BD}\cdot\sqrt{2}\,a}{E A} = \frac{2 N_{BD} a}{E A}$$

Stab *CE*: $\Delta L_{CE} = w_C = \frac{N_{CE}a}{E A}$

<u>Verträglichkeitsbedingungen</u>

$w_B = w_{B1} + w_{B2}$:

$$\frac{2 N_{BD} a}{E A} = \frac{4}{3}\frac{(F - N_{CE})a^3}{E I_y} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{N_{BD}a^3}{E I_y} \qquad (1)$$

$w_C = w_{C1} + w_{C2}$:

$$\frac{N_{CE} a}{E A} = 9\frac{(F - N_{CE})a^3}{E I_y} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{N_{BD}a^3}{E I_y} \qquad (2)$$

$$6\frac{E I_y}{a^3}\cdot(1)\ \rightarrow\ \left(12\frac{I_y}{a^2 A} + \sqrt{2}\right)N_{BD} + 8 N_{CE} = 8F \qquad (1')$$

$$3\frac{E I_y}{a^3}\cdot(2)\ \rightarrow\ 2\sqrt{2}N_{BD} + \left(3\frac{I_y}{a^2 A} + 27\right)N_{CE} = 27F \qquad (2')$$

Mit

$$\frac{I_y}{a^2 A} = \frac{1}{3}$$

folgt das Gleichungssystem:

(1') $\left(4+\sqrt{2}\right) N_{BD} + 8 N_{CE} = 8 F$

(2') $2\sqrt{2} N_{BD} + 28 N_{CE} = 27 F$

Es hat die Lösung:

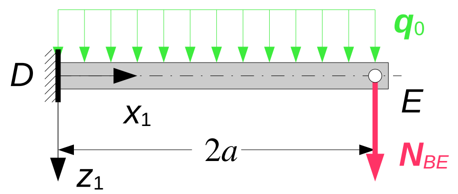
$$N_{BD}=0{,}06203\, F \ , \quad N_{CE}=0{,}9580\, F$$

Aufgabe 20

Balken *DE*

Lastfall 0: q_0

$$w_{E0}=\frac{q_0(2a)^4}{8EI_y}=2\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$



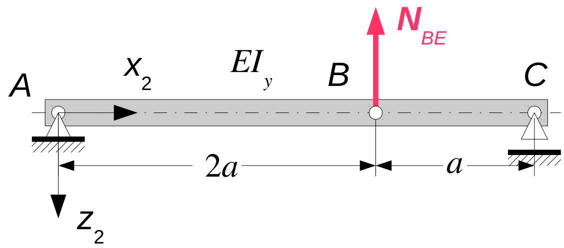
Lastfall 1: N_{BE}

$$w_{E1}=\frac{N_{BE}(2a)^3}{3EI_y}=\frac{8}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

Balken *ABC*

$$w_{B1}=\frac{-N_{BE}(3a)^3}{3EI_y}\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=-\frac{4}{9}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$



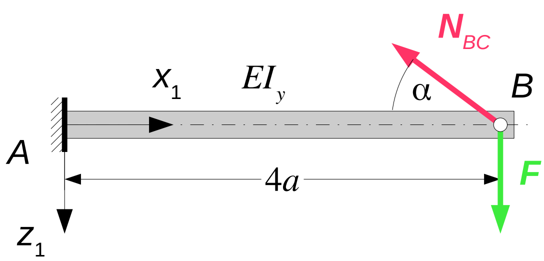
Verträglichkeitsbedingung

$$w_{E0}+w_{E1}=w_{B1}: \ 2\frac{q_0 a^4}{EI_y}+\frac{8}{3}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}=-\frac{4}{9}\frac{N_{BE}a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \ (24+4)N_{BE}=-18 q_0 a \ \rightarrow \ N_{BE}=-\frac{9}{14}q_0 a$$

Aufgabe 21

Geometrie: $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$



Balken *AB*: $w_B = \frac{(4a)^3 (F - N_{BC} \sin(\alpha))}{3 E I_y} = \left(\frac{1}{3} F - \frac{1}{5} N_{BC}\right) \frac{64 a^3}{E I_y}$

Seil *BC*:

$$\Delta L_{BC} = v_B \sin(-\alpha) = -\frac{3}{5} v_B$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{5 a N_{BC}}{E A} = -\frac{3}{5} v_B \rightarrow v_B = -\frac{25}{3} \frac{N_{BC} a}{E A}$$

Verträglichkeit: $w_B = -v_B$

$$\left(\frac{1}{3} F - \frac{1}{5} N_{BC}\right) \frac{64 a^3}{E I_y} = \frac{25}{3} \frac{N_{BC} a}{E A}$$

$$5 F - 3 N_{BC} = \frac{125}{64} \frac{I_y}{a^2 A} N_{BC} = \frac{125}{64} \frac{8}{125} N_{BC} = \frac{1}{8} N_{BC}$$

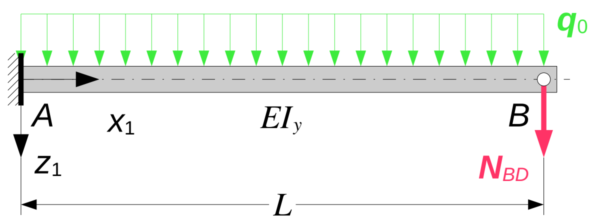
$$40 F = (1 + 24) N_{BC} \rightarrow N_{BC} = \frac{40}{25} F = \frac{8}{5} F$$

Aufgabe 22

Balken *AB*:

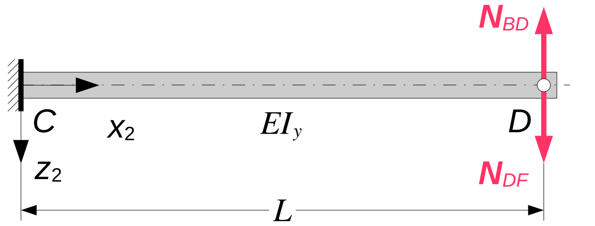
Lastfall 0: q_0 $\qquad w_{B0} = \frac{q_0 L^4}{8 E I_y}$

Lastfall 1: N_{BD} $\qquad w_{B1} = \frac{N_{BD} L^3}{3 E I_y}$



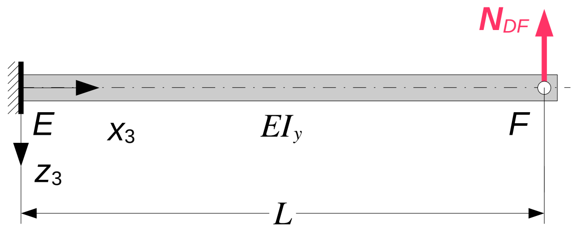
Balken *CD*:

$$w_D = \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y}$$



Balken *EF*:

$$w_F = \frac{-N_{DF} L^3}{3 E I_y}$$



Verträglichkeitsbedingungen:

$$w_B = w_D: \quad \frac{q_0 L^4}{8 E I_y} + \frac{N_{BD} L^3}{3 E I_y} = \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y}$$

$$\rightarrow \; 16 N_{BD} - 8 N_{DF} = -3 q_0 L \qquad (1)$$

$$w_D = w_F: \quad \frac{(N_{DF} - N_{BD}) L^3}{3 E I_y} = \frac{-N_{DF} L^3}{3 E I_y}$$

$$\rightarrow \; -N_{BD} + 2 N_{DF} = 0 \qquad (2)$$

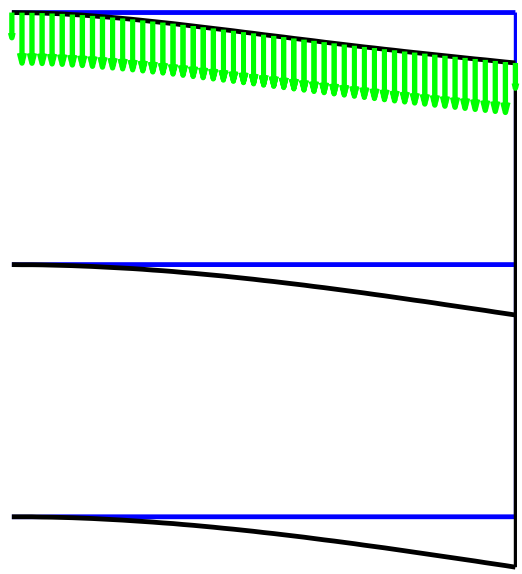
Auflösen nach den Kräften:

(2) → $N_{BD} = 2 N_{DF}$

in (1) → $(32-8) N_{DF} = -3 q_0 L$ → $N_{DF} = -\frac{3}{24} q_0 L = -\frac{1}{8} q_0 L$

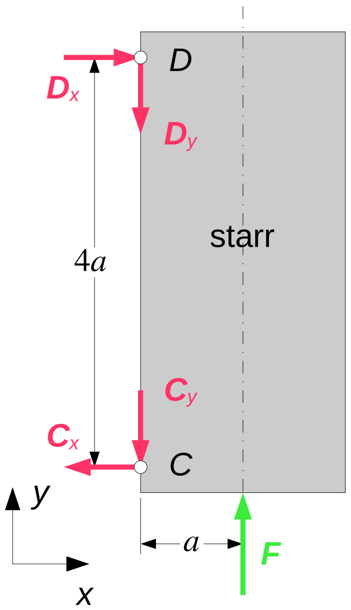
→ $N_{BD} = -\frac{1}{4} q_0 L$

Loadcase 1:



Aufgabe 23

Gleichgewichtsbedingungen für Booster:



$$\sum M^C = 0 \;:\; aF - 4aD_x = 0 \quad \rightarrow \quad D_x = \frac{1}{4}F$$

$$\sum F_x = 0 \;:\; D_x - C_x = 0 \quad \rightarrow C_x = D_x = \frac{1}{4}F$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; F - C_y - D_y = 0$$

$$\rightarrow \; C_y + D_y = F \qquad (1)$$

Balken *AC*: $v_C = \dfrac{C_y a^3}{3EI_y}$

Balken *BD*: $v_D = \dfrac{D_y a^3}{3\cdot 2EI_y} = \dfrac{D_y a^3}{6EI_y}$

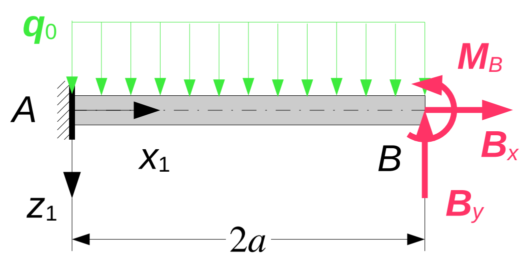
Verträglichkeitsbedingung: $v_D = v_C$

$$\frac{D_y a^3}{6EI_y} = \frac{C_y a^3}{3EI_y} \quad \rightarrow \quad D_y = 2C_y$$

Einsetzen in (1) ergibt: $3C_y = F \quad \rightarrow \quad C_y = \frac{1}{3}F \;,\; D_y = \frac{2}{3}F$

Aufgabe 24

<u>Balken *AB*</u>



Lastfall 0: q_0

$$w_{B0}^{AB} = \frac{q_0 (2a)^4}{8EI_y} = 2\frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

$$\phi_{B0}^{AB} = -\frac{q_0 (2a)^3}{6EI_y} = -\frac{4}{3}\frac{q_0 a^3}{EI_y}$$

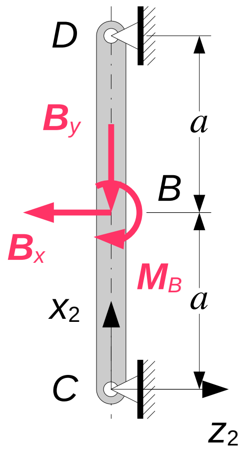
Lastfall 1: B_y

$$w_{B1}^{AB} = -\frac{B_y (2a)^3}{3EI_y} = -\frac{8}{3}\frac{B_y a^3}{EI_y} \;,\; \phi_{B1}^{AB} = \frac{B_y (2a)^2}{2EI_y} = 2\frac{B_y a^2}{EI_y}$$

Lastfall 2: M_B

$$w_{B2}^{AB} = \frac{M_B (2a)^2}{2EI_y}(1-2) = -2\frac{M_B a^2}{EI_y} \;,\; \phi_{B2}^{AB} = 2\frac{M_B a}{EI_y}$$

Balken *CD*



Lastfall 1: B_x

$$w_{B1}^{CD} = -\frac{B_x (2a)^3}{3EI_y}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} = -\frac{1}{6}\frac{B_x a^3}{EI_y}$$

$$\phi_{B1}^{CD} = \frac{B_x (2a)^2}{6EI_y}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2^2}\right)\right] = 0$$

Lastfall 2: M_B

$$w_{B2}^{CD} = \frac{M_B (2a)^2}{3EI_y}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2}+1\right) = 0$$

$$\phi_{B2}^{CD} = -\frac{M_B (2a)}{6EI_y}\left(\frac{3}{2^2}+2-\frac{6}{2}+\frac{3}{2^2}\right) = -\frac{1}{6}\frac{M_B a}{EI_y}$$

Verträglichkeitsbedingungen

Balken *CD* ist dehnstarr: $w_B^{AB} = w_{B0}^{AB} + w_{B1}^{AB} + w_{B2}^{AB} = 0$

$$2\frac{q_0 a^4}{EI_y} - \frac{8}{3}\frac{B_y a^3}{EI_y} - 2\frac{M_B a^2}{EI_y} = 0 \quad \rightarrow \quad 8 B_y a + 6 M_B = 6 q_0 a^2 \qquad (1)$$

Balken *AB* ist dehnstarr: $w_B^{CD} = w_{B1}^{CD} + w_{B2}^{CD} = 0$

$$-\frac{1}{6}\frac{B_x a^3}{EI_y} = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0$$

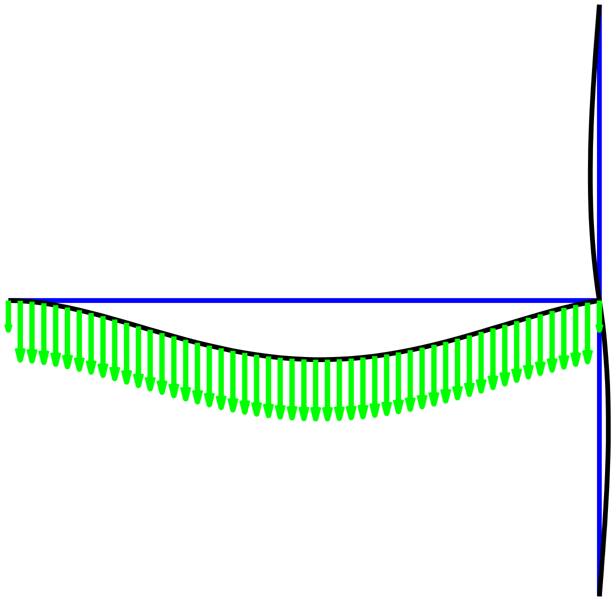
Balken sind starr verbunden: $\phi_B^{AB} = \phi_B^{CD}$

$$-\frac{4}{3}\frac{q_0 a^3}{EI_y} + 2\frac{B_y a^2}{EI_y} + 2\frac{M_B a}{EI_y} = -\frac{1}{6}\frac{M_B a}{EI_y} \quad \rightarrow \quad 12 B_y a + 13 M_B = 8 q_0 a^2 \qquad (2)$$

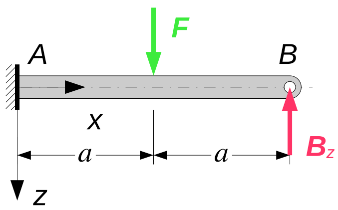
Auflösen der Gleichungen (1) und (2):

$$B_y = \frac{15}{16} q_0 a \,, \quad M_B = -\frac{1}{4} q_0 a^2$$

Loadcase 1:



Aufgabe 25



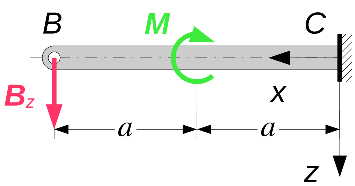
Balken *AB*

Lastfall 0: F

$$w_{B0}^{AB}=\frac{F(2a)^3}{6EI_y}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{Fa^3}{6EI_y}(6-1)=\frac{5}{6}\frac{Fa^3}{EI_y}$$

Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{AB}=\frac{-B_z(2a)^3}{3EI_y}=-\frac{8}{3}\frac{B_z a^3}{EI_y}$$



Balken *BC*

Lastfall 0: M

$$w_{B0}^{BC}=\frac{M(2a)^2}{2EI_y}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{Ma^2}{2EI_y}(1-4)=-\frac{3}{2}\frac{Ma^2}{EI_y}$$

Lastfall 1: B_z

$$w_{B1}^{BC} = \frac{B_z (2a)^3}{3EI_y} = \frac{8}{3}\frac{B_z a^3}{EI_y}$$

Verträglichkeitsbedingung

$$w_B^{AB} = w_B^{BC}: \quad \frac{5}{6}\frac{F a^3}{EI_y} - \frac{8}{3}\frac{B_z a^3}{EI_y} = -\frac{3}{2}\frac{M a^2}{EI_y} + \frac{8}{3}\frac{B_z a^3}{EI_y}$$

$$\rightarrow \ 5Fa - 16 B_z a = -9M + 16 B_z a$$

$$\rightarrow (5+3\cdot 9)F = 32 B_z \quad \rightarrow \quad B_z = F$$

Verschiebung von Punkt *B*

$$w_B = w_B^{AB} = \left(\frac{5}{6} - \frac{16}{6}\right)\frac{F a^3}{EI_y} = -\frac{11}{6}\frac{F a^3}{EI_y}$$

Probe:

$$w_B^{BC} = \left(-\frac{9}{2} + \frac{8}{3}\right)\frac{F a^3}{EI_y} = -\frac{11}{6}\frac{F a^3}{EI_y}$$