Aufgabe 24.7

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!

b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!

c) Bestimmen Sie eine Startnäherung für die Iteration, indem Sie die Nichtdiagonalelemente vernachlässigen!

d) Führen Sie mit diesem Startvektor je zwei Iterationsschritte durch und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

Lösung:

a) Gesamtschrittverfahren

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(11 \qquad\quad -z_n) \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(15 - 2x_n + z_n) \\ z_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(27 - \ x_n - y_n) \end{aligned}$$

Einzelschrittverfahren

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(11 \qquad\qquad -z_n \quad) \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(15 - 2x_{n+1} + z_n \quad) \\ z_{n+1} &= \tfrac{1}{8}(27 - \ x_{n+1} - y_{n+1}) \end{aligned}$$

b) 1. Zeile: $|8| > |0| + |1|$, 2. Zeile: $|8| > |2| + |-1|$, 3. Zeile: $|8| > |1| + |1|$

Das starke Zeilensummenkriterium ist erfüllt, so dass beide Verfahren konvergieren.

c) Vernachlässigung der Diagonalelemente führt auf $8x_0 = 11$, $8y_0 = 15$, $8z_0 = 27$, so dass sich die Startnäherung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}375 \\ 1{,}875 \\ 3{,}375 \end{pmatrix}$ ergibt.

d) Gesamtschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1,37500000	1,87500000	3,37500000
1	0,95312500	1,95312500	2,96875000
2	1,00390625	2,00781250	3,01171875

Einzelschrittverfahren

n	x_n	y_n	z_n
0	1,375000000	1,875000000	3,375000000
1	0,953125000	2,058593750	2,998535156
2	1,000183106	1,999771119	3,000005722

Gaußalgorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 8 & 27 \\ 2 & 8 & -1 & 15 \\ 8 & 0 & 1 & 11 \\ \hline 1 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 6 & -17 & -39 \\ 0 & -8 & -63 & -205 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{6} & -\frac{39}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{514}{6} & -\frac{1542}{6} \\ \hline 1 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{6} & -\frac{39}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

exakte Lösung: $\underline{\underline{x = 1, \ y = 2, \ z = 3}}$