ALGEBRA, 6. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei $\mathbf{R}$ ein Ring mit Einselement 1 und $\mathbf{J} \subset \mathbf{R}$ ein Ideal. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind: (a) $\mathbf{J} \neq \mathbf{R}$ (b) $1 \notin \mathbf{J}$ (c) $\mathbf{R}^\times \cap \mathbf{J} = \emptyset$.

2. Sei $\mathbf{R}$ ein kommutativer Ring mit Eins 1. Ein Element $x \in \mathbf{R}$ heißt nilpotent, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $x^n = 0$ ist. Zeigen Sie:

   (a) Die nilpotenten Elemente von $\mathbf{R}$ bilden ein Ideal $\mathbf{J}$, und in $\mathbf{R}/\mathbf{J}$ ist nur die Null nilpotent.

   (b) Sei $k = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ die Primfaktorzerlegung von $k \geq 2$. Das Element $\overline{a} \in \mathbb{Z}_k$ ist genau dann nilpotent, wenn $p_1 \cdots p_t | a$. Weiterhin gilt es zu zeigen: $\overline{0}$ ist genau dann das einzige nilpotente Element in $\mathbb{Z}_k$, wenn k quadratfrei ist.

3. Man bestimme das durch 12 und 16 erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}$.

4. Sei $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ der Schiefkörper der Quaternionen. Seien

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

   Offenbar bilden $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{H}$, und es gilt $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$ sowie $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.

   (a) **(HA)** Sei $\mathsf{Im}\,\mathbb{H}$ der von $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ erzeugte Unterraum. Man zeige: Für alle x, $y \in \mathsf{Im}\,\mathbb{H}$ gilt $x^2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ und $xy + yx \in \mathbb{R}\mathbf{1}$. Man zeige auch:

$$\mathsf{Im}\,\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} \mid x^2 \in \mathbb{R}\mathbf{1} \text{ und } x \notin \mathbb{R}\mathbf{1} \setminus \{0\}\}.$$

   (b) **(HA)** Man zeige: Das Zentrum von $\mathbb{H}$, also die Menge $\{x \in \mathbb{H} \mid xy = yx \text{ für alle } y \in \mathbb{H}\}$, ist gerade $\mathbb{R}\mathbf{1}$. (Hinweis: Man schreibe jedes Element in $\mathbb{H}$ eindeutig in der Form $\alpha\mathbf{1} + u$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathsf{Im}\,\mathbb{H}$ und verwende Teil a.)

   (c) **(HA)** Man beschreibe die Beziehungen "$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$" mathematisch korrekt mithilfe von injektiven Homomorphismen (Einbettungen).

   (d) Man zeige, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{H}$ unendlich viele Lösungen besitzt.

5. Zeigen Sie: Ein Integritätsbereich, der nur endlich viele Ideale besitzt, ist ein Körper. (Ergänzung zu Ü 5/5).
   Ist dieses Ergebnis auf $\mathrm{End}_K(V)$ (vgl. HA 6/6) anwendbar?

6. Beschreiben Sie alle endlichen Körper mit höchstens 6 Elementen mithilfe ihrer Gruppentafeln.