

Präzession und Nutation eines Gyroskops

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DER PRÄZSSION UND NUTATION EINES GYROSKOPS UND BESTIMMUNG DES TRÄGHEITSMOMENTES

- Bestätigung der Proportionalität zwischen Rotationsfrequenz f_R der Drehscheibe und Zeit T_P einer Präzession des Gyroskops und Bestimmung des Trägheitsmomentes aus der graphischen Auftragung $f_R(T_P)$.
- Bestätigung der Proportionalität zwischen Rotationsfrequenz f_R und Nutationsfrequenz f_N durch graphische Auftragung $f_N(f_R)$ bzw. der entsprechenden Zeiten $T_R(T_N)$.

UE1040500

07/16 UD



Fig. 1: Messanordnung zur Präzession eines Gyroskops (ohne angehängte Zusatzmasse).

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der sich um eine in einem Punkt fixierte Achse dreht. Greift eine äußere Kraft an der Achse an, so bewirkt das Drehmoment eine Änderung des Drehimpulses. Der Kreisel bewegt sich dann in die zur Figurenachse und zur einwirkenden Kraft senkrechte Richtung. Diese Bewegung nennt man Präzession. Wird ein ruhig drehender Kreisel gegen seine Drehachse gestoßen, führt er Kippbewegungen aus, die Nutation genannt werden. Beide Bewegungen überlagern sich im Allgemeinen.

Im Experiment wird ein Gyroskop eingesetzt, dessen große Kreisscheibe reibungsarm um eine in einem Auflagepunkt gelagerte Drehachse rotiert. Eine Gegenmasse ist so justiert, dass der Auflagepunkt mit dem Schwerpunkt übereinstimmt. Befindet sich das Gyroskop im Gleichgewicht und wird die Drehscheibe in Rotation versetzt, wirkt ein konstanter Drehimpuls L :

$$(1) \quad L = I \cdot \omega_R$$

I : Trägheitsmoment, ω_R : Winkelgeschwindigkeit

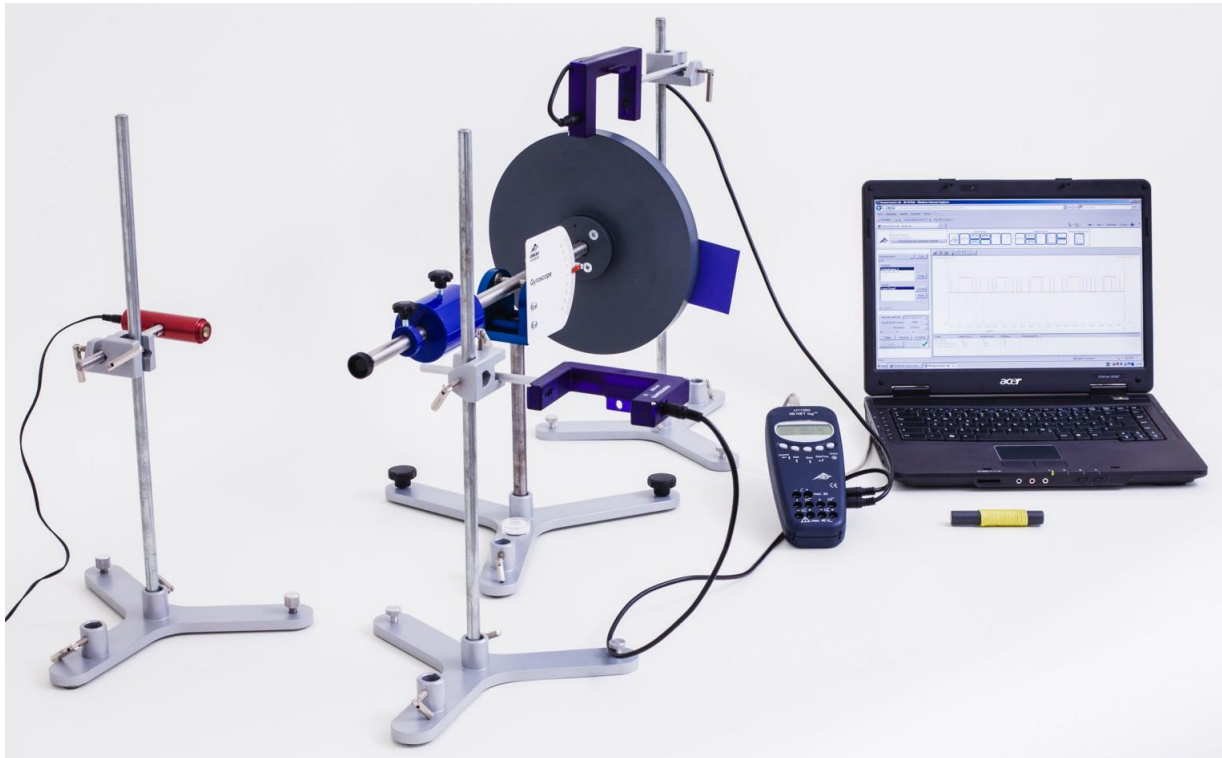


Fig. 2 Messanordnung zur Nutation eines Gyroskops.

Das Trägheitsmoment der rotierenden Scheibe des Gyroskops ist gegeben durch:

$$(2) \quad I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

M : Masse der Scheibe, R : Radius der Scheibe

Wird die Drehachse mit einer Zusatzmasse m beschwert, so bewirkt das durch die zusätzliche Gewichtskraft hervorgerufene Drehmoment τ eine Änderung des Drehimpulses:

$$(3) \quad \tau = m \cdot g \cdot r = \frac{dL}{dt}$$

r : Abstand vom Lagerpunkt der Drehachse zum Angriffspunkt der Zusatzmasse

Die Drehachse bewegt sich dann gemäß Fig. 3 um den Winkel

$$(4) \quad d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot dt}{L}$$

und präzediert. Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung:

$$(5) \quad \omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{m \cdot g \cdot r}{L} = \frac{m \cdot g \cdot r}{I \cdot \omega_R}$$

und mit $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$:

$$(6) \quad \frac{1}{T_R} = f_R = \frac{m \cdot g \cdot r}{4 \cdot \pi^2 \cdot I} \cdot T_P$$

Wird die Drehscheibe ohne zusätzliches, äußeres Drehmoment in Rotation versetzt und die Drehachse leicht seitlich angeschlagen (Fig. 4), führt das Gyroskop Nutationsbewegungen aus. Die Winkelgeschwindigkeit der Nutation ist dabei direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation:

$$(7) \quad \omega_N = C \cdot \omega_R \text{ bzw. } T_R = C \cdot T_N$$

C : Konstante

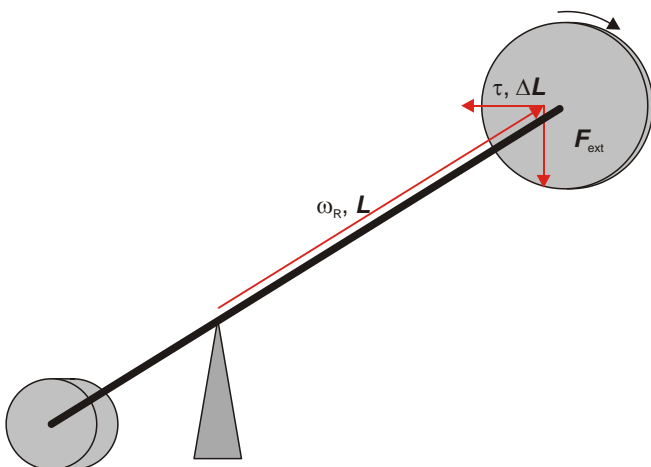


Fig. 3 Schematische Skizze des Gyroskops für die Präzession.

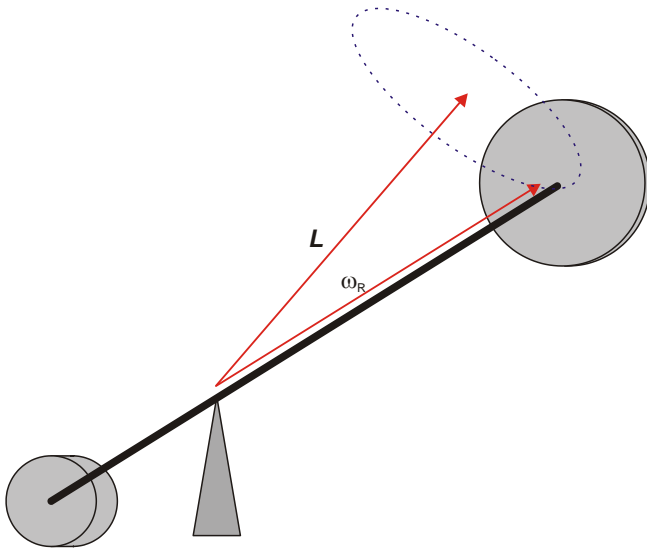


Fig. 4 Schematische Skizze des Gyroskops für die Nutation.

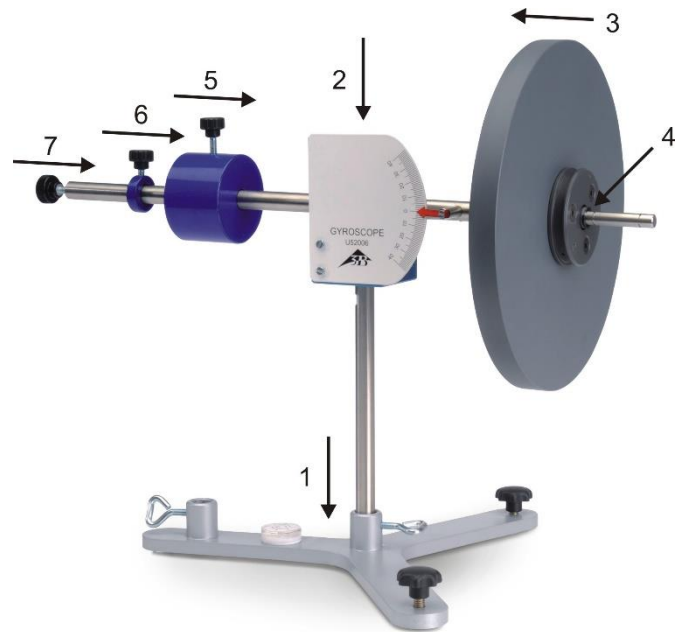


Fig. 5 Inbetriebnahme des Gyroskops.

GERÄTELISTE

1	Gyroskop	1000695 (U52006)
2	Lichtschränke	1000563 (U11365)
1	Diodenlaser, rot	1003201 (U22000)
1	3B NET/og™ @230V	1000540 (U11300-230)
oder		
1	3B NET/og™ @115V	1000539 (U11300-115)
1	3B NET/lab™	1000544 (U11310)
3	Stativfuß, 3-Bein, 150 mm	1002835 (U13270)
3	Universalmuffe	1002830 (U13255)
3	Stativstange, 750 mm	1002935 (U15003)

- Den Zeiger für die Schwungscheibe mit Hilfe des Klettbandes so an der Schwungscheibe befestigen wie in Fig. 1 bzw. Fig. 2 gezeigt.

INBETRIEBNAHME DES GYROSKOPS

- Den Stativfuß auf einer ebenen, schwingungsfreien Arbeitsplatte platzieren und mit Hilfe der Libelle waagrecht ausrichten.
- Die Stativstange in den Stativfuß einführen und fixieren (Fig .5, 1).
- Den Rotorkopf mit Hauptachse auf die Stativstange setzen (Fig .5, 2).
- Schwungscheibe bis zum Anschlag auf die Gyroskop-Hauptachse schieben, so dass die Seiltrommel vom Rotorkopf weg zeigt (Fig .5, 3). Den Abstandshalter einsetzen und die Schwungscheibe mit der Sicherungsscheibe sichern (Fig .5, 3). Die Stellschraube am anderen Ende der Hauptachse zunächst ganz heraus schrauben.
- Nacheinander die große Gegenmasse und die kleine Stellmasse auf das andere Ende der Hauptachse schieben und die Stellschraube wieder in die Hauptachse hineinschrauben (Fig .5, 5,6,7). Die Gegen- und die Stellmasse so verschieben, dass die Hauptachse waagrecht ausgerichtet ist (Zeiger auf der Null-Position der Skala) und jeweils mit den Feststellschrauben fixieren. Ggf. Feinjustage mit der Stellschraube vornehmen.

AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

- Die beiden Lichtschranken mit Hilfe des Stativmaterials so aufbauen und positionieren wie in Fig. 1 bzw. Fig. 2 gezeigt und mit Hilfe der Kabel mit den 8-Pin-miniDIN-Steckern an die Analog-Eingänge A und B des NET/og™ anschließen.

Hinweis:

Bei der Messung der Nutation wird die Lichtschranke, die die Nutationsperiode aufnimmt, nicht im „internen Lichtschrankenmodus“, sondern im „Laser-Lichtschrankenmodus“ betrieben. Dieser wird durch Schließen der mechanischen Blende aktiviert und der Diodenlaser auf die seitliche Öffnung der Lichtschranke ausgerichtet.

- Den Computer einschalten und das 3B NET/lab™ starten. Das 3B NET/og™ mit Hilfe des USB-Kabels an den Computer anschließen und einschalten. Im 3B NET/lab™ unter „Geräteanschluss“ die Schaltfläche „Test“ anklicken, um die Verbindung zu prüfen.
- Die Analogeingänge A und B im 3B NET/lab™ auf 20 V DC konfigurieren und durch Anklicken der Schaltfläche „Eingänge OK“ bestätigen.
- Die Parameter

Messintervall/Rate:	10 ms	100 Hz	Osz
Anzahl der Messwerte:	10000		
Messdauer:	01:40,0 s		

 einstellen und durch Anklicken der Schaltfläche „Parameter OK“ bestätigen.

- Für die Messung der Präzession als Zusatzmasse den Gewichtehalter mit den drei aufgesteckten Scheibengewichten in die Bohrung am vorderen Ende der Hauptachse einhängen.
- Für die Messung der Nutation keine Zusatzmasse einhängen.
- Die Metallhülse des Starter-Fadens in die Bohrung an der Seiltrommel stecken und den Starter-Faden aufrollen.
- Die Schaltfläche „Starten“ im 3B NET/lab™ anklicken, es beginnt die Aufnahme von Messwerten.
- Das hintere Ende der Hauptachse mit einer Hand, und den Griff des Starter-Fadens mit der anderen Hand festhalten. Die Schwungscheibe durch gleichmäßiges, schnelles, kräftiges Ziehen des Starter-Fadens in Rotation versetzen, und die Hauptachse anschließend sofort loslassen.

Hinweise:

Den Starter-Faden beim Ziehen so lange unter Spannung halten, bis er komplett abgerollt ist, er kann sich sonst in der rotierenden Seiltrommel verheddern.

Ggf. den Start der Messung im 3B NET/lab™ und das Versetzen der Schwungscheibe in Rotation zu zweit durchführen.

Darauf achten, dass das Gyroskop während des Vorgangs in etwa waagrecht ausgerichtet bleibt.

- Für die Messung der Nutation diese durch einen leichten, seitlichen Schlag auf die Gyroskopachse auslösen.

MESSBEISPIEL UND AUSWERTUNG

- Masse M der Schwungscheibe: 1,5 kg
- Radius R der Schwungscheibe: 12,5 cm
- Zusatzmasse m : 150 g
- Abstand vom Lagerpunkt der Drehachse zum Angriffspunkt der Zusatzmasse r : 22,5 cm

Fig. 6 (oben) bzw. Fig. 7 (oben) zeigen typische Ergebnisse für die Messung der Präzession bzw. Nutation im 3B NET/lab™ gemäß den Anordnungen nach Fig. 1 bzw. Fig. 2.

- Die Präzessions-, Nutations- und Rotationszeiten T_P , T_N und T_R über die aufgenommenen Zeitverläufe der Pulse bestimmen.

In Fig. 6 bzw. Fig. 7 entspricht Analogeingang A (blau) jeweils dem Zeitverlauf des Rotations-Signals und Analogeingang B (rot) dem Zeitverlauf des Präzessions- bzw. Nutations-Signals.

Die Präzessionszeit kann mit Hilfe der Kursoren direkt abgelesen werden als Zeit zwischen zwei Pulsen. Z.B. erhält man für die erste Periode der Präzession aus Fig. 6 (mitte) $T_P = 16,52$ s.

Die Nutationszeit kann mit Hilfe der Kursoren ebenfalls direkt abgelesen werden, s. Fig. 7 (mitte). Dazu werden im Signal Bereiche mit mindestens drei aufeinanderfolgenden, etwa gleich langen Pulsen identifiziert. Da eine Nutationsperiode drei aufeinanderfolgenden Verdunklungen der Lichtschranke entspricht, entspricht die Nutationszeit der Zeit zwischen dem ersten und dem dritten Puls. Z.B. erhält man für die erste Periode der Nutation aus Fig. 7 (mitte) $T_N = 1,64$ s.

Die Rotationszeit wird aus mehreren aufeinanderfolgenden Pulsen bestimmt, in denselben Bereichen, in denen zuvor die zugehörigen Präzessions- bzw. Nutationszeiten bestimmt wurden.



Fig. 6 Präzession des Gyroskops. Aufgenommener Zeitverlauf (oben) sowie Bestimmung von Präzessionszeit T_P (mitte) und Rotationszeit T_R (unten) im 3B NET/lab™.

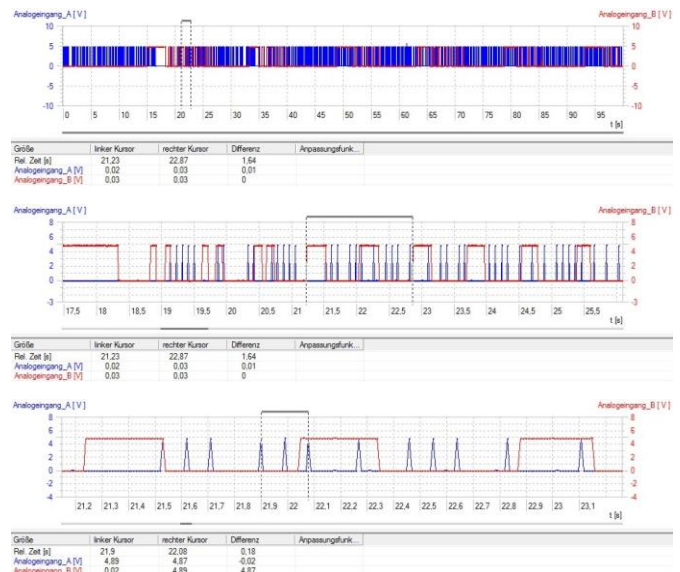


Fig. 7 Nutation des Gyroskops. Aufgenommener Zeitverlauf (oben) sowie Bestimmung von Nutationszeit T_N (mitte) und Rotationszeit T_R (unten) im 3B NET/lab™.

Z.B. erhält man für die zur ersten Präzessionsperiode gehörige Rotationsperiode aus Fig. 6 (unten) $T_R = 0,24$ s / 3 = 0,08 s, und für die zur ersten Nutationsperiode gehörige Rotationsperiode aus Fig. 7 (unten) $T_R = 0,18$ s / 2 = 0,09 s.

- Die ermittelten Zeiten in Tab. 1 bzw. Tab. 2 eintragen.

Tab. 1: Präzession des Gyroskops. Aus der Messung bestimmte Präzessionszeiten T_P und Rotationszeiten T_R sowie die daraus berechneten Rotationsfrequenzen f_R .

T_P / s	T_R / s	f_R / Hz
16,52	0,08	12,50
15,31	0,09	11,11
14,17	0,10	10,00
12,68	0,11	9,09
11,06	0,12	8,33
10,63	0,13	7,69

Tab. 2: Nutation des Gyroskops. Aus der Messung bestimmte Nutationszeiten T_N und Rotationszeiten T_R .

T_N / s	T_R / s
1,64	0,09
1,78	0,10
1,99	0,11
2,19	0,12
2,35	0,13

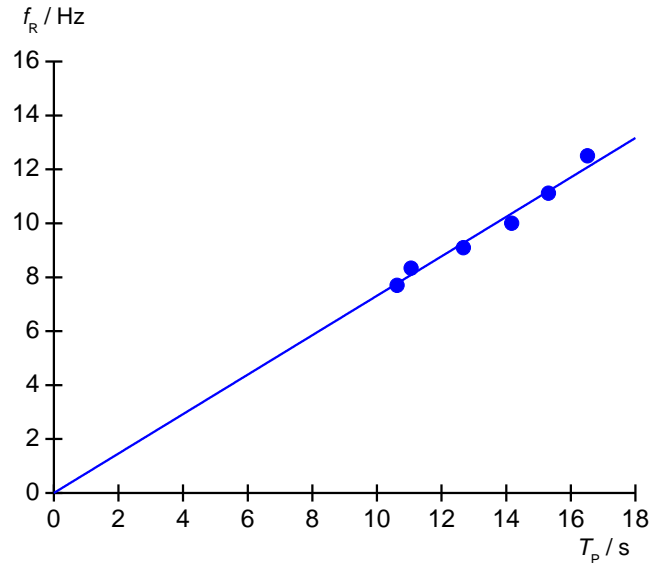


Fig. 8 Rotationsfrequenz f_R der Drehscheibe in Abhängigkeit von der Präzessionszeit T_P .

- Aus den Rotationszeiten in Tab. 1 die Rotationsfrequenzen berechnen und ebenfalls in Tab. 1 eintragen.
- Die Rotationsfrequenzen gegen die Präzessionszeiten in einem Diagramm auftragen und eine Ursprungsgerade anpassen (Fig. 8).
- Aus der Geradensteigung a nach Gleichung (6) das Trägheitsmoment der Schwungscheibe bestimmen:

$$f_R = \frac{m \cdot g \cdot r}{4 \cdot \pi^2 \cdot I} \cdot T_P = a \cdot T_P \Rightarrow$$

$$I = \frac{m \cdot g \cdot r}{4 \cdot \pi^2 \cdot a} = \frac{0,15 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,225 \text{ m}}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0,73 \frac{1}{\text{s}^2}}$$

$$= 0,0115 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- Das Trägheitsmoment der Schwungscheibe nach Gleichung (2) bestimmen:

$$I = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \text{ kg} \cdot (0,125 \text{ m})^2 = 0,0117 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Die Werte stimmen im Rahmen ihres relativen Messfehlers von ca. 1.5% sehr gut überein.

- Die Rotationszeiten aus Tab. 2 gegen die Nutationszeiten in einem Diagramm auftragen und eine Ursprungsgerade anpassen (Fig. 9).

Die direkte Proportionalität der Nutations- zur Rotationsperiode nach Gleichung (7) wird bestätigt.

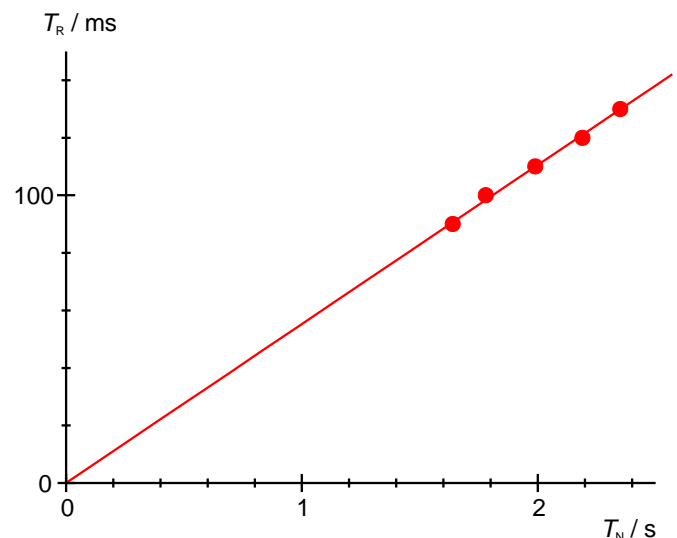


Fig. 9 Rotationszeit T_R in Abhängigkeit von der Nutationszeit T_N .

