ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

381

ÜBER MAJORANTEN INDEFINITER BILINEARFORMEN

VON

GERD WITTSTOCK

HELSINKI 1966
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1966.381

Am 14. Mai 1965 vorgelegt von R. NEVANLINNA und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1966

Über Majoranten indefiniter Bilinearformen*

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Bilinearformen (indefinite Metriken, indefinite Skalarprodukte) und deren Majoranten auf reellen oder komplexen linearen Räumen unendlicher Dimension betrachtet.

Schon aus der klassischen Theorie der Hilbertschen Räume ist vieles über Bilinearformen bekannt. Im Vordergrund des Interesses dieser Theorie stehen jedoch einerseits das positiv definite Hermitesche Skalarprodukt des Hilbertschen Raumes und andererseits diejenigen Eigenschaften der Bilinearformen, die bei der Erörterung der linearen Transformationen des Raumes eine Rolle spielen.

Ausgehend von unterschiedlichen Fragestellungen haben während der letzten Jahre zahlreiche Autoren indefinite Metriken abgehandelt. Einen Bericht über die Entwicklung dieser Forschungsrichtung findet man in dem Artikel [5]. (Einzelne Arbeiten der in dieser Einleitung erwähnten Autoren sind nur dann in dem Literaturverzeichnis aufgeführt, wenn sie nicht schon in [5] oder [23] referiert worden sind, oder wenn sie für die Zwecke dieser Arbeit besonders wichtig sind.)

R. Nevanlinna hat in den Jahren 1952 bis 1956 eine Theorie der Hermiteschen indefiniten Skalarprodukte auf einem Hilbertschen Raum in den Arbeiten [31]—[35] entwickelt. Eine ähnliche Theorie war im Jahre 1951 von M. R. Hestenes [7] auf einige Fragen der Variationsrechnung angewandt worden. R. Nevanlinna hat wohl als erster im Fall einer Hermiteschen Bilinearform auf einem Hilbertraum die Frage nach den Eigenschaften der Majoranten behandelt, die hier auch für allgemeinere Fälle betrachtet wird.

Die von R. Nevanlinna in [34] begonnenen Untersuchungen über die Darstellbarkeit einer Linearform in bezug auf eine Hermitesche indefinite Bilinearform sind von I. S. Louhivaara, F. E. Browder und W. Littmann weitergeführt und im Anschluss an einen Satz von P. D. Lax und A. N. Mil-

---

* Die Kurzfassung [42] dieser Abhandlung ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin als Dissertation angenommen worden.

gram auch für Bilinearformen, die nicht Hermitesch zu sein brauchen, verallgemeinert worden; wegen dieser Resultate verweisen wir auf [23]. Die eben erwähnten Autoren sowie E. Hölder [11]—[13] und S. Hildebrandt [8]—[9] haben auch Anwendungen auf gewisse Fragen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen behandelt. Der Verfasser [41] hat das Problem der Darstellbarkeit von Linearformen in bezug auf die von N. Aronszajn eingeführten koerziven Bilinearformen betrachtet. (Koerzive Bilinearformen haben eine gröbste Majorante und lassen sich durch ihr Verhalten zu dieser kennzeichnen.) Einer Idee von S. Hildebrandt und E. Wienholtz [10] folgend hat S. Stenholm [40] kürzlich die Darstellbarkeit von Linearformen in bezug auf eine Bilinearform, die nicht Hermitesch ist, erneut behandelt.

Mit Hilfe der Nevanlinnaschen Theorie hat E. Pesonen [36] die Frage nach der Spektraldarstellung von Hermiteschen Bilinearformen in bezug auf eine indefinite Metrik behandelt.

Auf der Grundlage der Veröffentlichungen von R. Nevanlinna und der Monographie [4] von N. Bourbaki hat E. Scheibe [39] Methoden aus der Theorie der topologischen linearen Räume zur Untersuchung indefiniter Bilinearformen herangezogen.

Eine Darstellung verschiedener Fragen über Bilinearformen findet man bei N. Aronszajn [1]. Dort wird der aus der Theorie der lokalkonvexen Räume bekannte Prozess der Polarenbildung benutzt, um Eigenschaften der Majoranten einer Bilinearform zu suchen.

Schon im Jahre 1944 sind die bezüglich einer quasipositiven Hermiteschen indefiniten Metrik selbstadjungierten Transformationen eines separablen Hilbertschen Raumes von L. S. Pontrjagin [37] untersucht worden. Er behandelte speziell die Frage, zu einer solchen Transformation einen invarianten Teilraum zu finden, der in bezug auf das indefinite Skalarprodukt maximal positiv ist. Diese und verwandte Fragestellungen wurden von M. G. Kreĭn, I. S. Iohvidov, Ju. P. Ginzburg, H. Langer, J. Bognár, M. A. Naĭmark, R. S. Ismagilov und anderen fortgeführt. Resultate aus dieser Arbeitsrichtung findet man in [14]—[15], [5] und auch in den neueren Arbeiten [18]—[19], [21]—[22], [2]—[3], [24]—[30] und [16]. R. Kühne [20] hat dann Ergebnisse dieser Untersuchungen benutzt, um einige mit den Resultaten von E. Pesonen [36] verwandte Sätze nachzuweisen.

In der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel I gezeigt, dass die Majoranten wichtig für Stetigkeitsbetrachtungen von Bilinearformen auf topologischen linearen Räumen sind. In Kapitel II werden ein Beweis für die Existenz minimaler Majoranten gegeben und die Eigenschaften minimaler Majoranten untersucht. Kapitel III bringt die Behandlung von Zerlegungsmajoranten. In Kapitel IV wird die Klasse derjenigen Hermiteschen Bilinearformen charakterisiert, für die eine Zerlegungsmajorante eine gröbste

Majorante ist. Die meisten bisher in der Literatur untersuchten Bilinearformen gehören zu diesem Typ. In Kapitel V werden die quasipositiven Bilinearformen im Hinblick auf ihre Majoranten untersucht.

Der Verfasser beabsichtigt, in einer weiteren Arbeit zu zeigen, dass der Fragenkreis von L. S. Pontrjagin und M. G. Kreĭn sich für die in den Kapiteln IV und V untersuchten Bilinearformen behandeln lässt.

I. Vorbemerkungen

1. *Bilineare und quadratische Formen.* Wir wollen einige im folgenden benötigte Begriffe zusammenstellen. Mit X, Y, Z bezeichnen wir lineare Räume über dem Körper $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$ der reellen bzw. der komplexen Zahlen. Eine Abbildung Q von $X \times X$ in den Koeffizientenkörper heisst *Bilinearform* auf X, wenn für alle $x \in X$ die partiellen Abbildungen $Q(x\,,\,.)$ linear und die partiellen Abbildungen $Q(\,.\,,x)$ konjugiert linear sind. In der Menge der Bilinearformen können wir eine Konjugation $Q \to Q^*$ durch die Vorschrift

$$Q^*(x\,,y) = \overline{Q(y\,,x)} \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in X$$

einführen. Eine Bilinearform Q, für die $Q = Q^*$ gilt, heisst *Hermitesch.*

Zur Abkürzung verwenden wir für die Werte der Bilinearform Q auf der Diagonalen von $X \times X$ die Schreibweise $Q(x)$ statt $Q(x\,,x)$, für alle $x \in X$. Auf einem komplexen linearen Raum X ist die Bilinearform Q schon durch ihre Werte auf der Diagonalen von $X \times X$ eindeutig bestimmt. Es gilt die *Polarisationsformel*

$$Q(x\,,y) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n\, Q(x + i^n\, y) \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in X\,.$$

Auf reellen linearen Räumen gilt nur für Hermitesche Bilinearformen ein analoges Resultat. Für eine Hermitesche Bilinearform Q auf einem reellen linearen Raum X gilt die *Polarisationsformel*

$$Q(x\,,y) = \frac{1}{4}\,(\,Q(x+y) - Q(x-y)\,) \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in X\,.$$

Ist X ein komplexer linearer Raum, so nennen wir eine Abbildung Q_q von X in die komplexen Zahlen eine *quadratische Form* auf X, wenn die durch die Vorschrift

$$Q(x\,,y) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n\, Q_q(x + i^n\, y) \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in X$$

definierte Abbildung Q von $X \times X$ in die komplexen Zahlen eine Bilinearform auf X ist. Ist Y ein reeller linearer Raum, so nennen wir eine Abbildung Q_q von Y in die reellen Zahlen eine *quadratische Form* auf Y, wenn die durch die Vorschrift

$$Q(x\,,y) = \frac{1}{4}\,(\,Q_q(x+y) - Q_q(x-y)\,) \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in Y$$

definierte Abbildung von $Y \times Y$ in die reellen Zahlen eine Bilinearform auf Y ist.

Ist Q eine Bilinearform, so ist die Abbildung Q_q, die durch die Vorschrift $Q_q(x) = Q(x)$, für alle $x \in X$, definiert wird, eine quadratische Form auf X. Die Polarisationsformeln besagen, dass für eine beliebige Bilinearform Q auf einem komplexen linearen Raum die zu der soeben konstruierten quadratischen Form Q_q gehörende Bilinearform wieder Q ist. Auf einem reellen linearen Raum gilt nur für Hermitesche Bilinearformen ein analoges Resultat. Ist Q_q eine quadratische Form und Q die zugehörige Bilinearform, so schreiben wir statt $Q_q(x)$ kürzer $Q(x)$, für alle $x \in X$.

Auf einem reellen linearen Raum entsprechen sich eineindeutig die Hermiteschen Bilinearformen und die quadratischen Formen. Auf einem komplexen linearen Raum ist eine Bilinearform Q dann und nur dann Hermitesch, wenn die zugehörige quadratische Form Q_q reellwertig ist.

Eine quadratische Form P_q heisst *positiv* (oder auch positiv semidefinit), wenn für alle $x \in X$ die Ungleichung $P(x) \geqq 0$ gilt. Gilt für alle $x \in X$, $x \neq 0$, die Ungleichung $P(x) > 0$, so heisst P_q *positiv definit*. Wir schreiben $P_q \geqq 0$ und $P_q > 0$. Eine Hermitesche Bilinearform P heisst positiv, bzw. positiv definit, wenn die zugehörige quadratische Form P_q positiv, bzw. positiv definit ist.

Für eine positive Hermitesche Bilinearform P gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|P(x\,,y)|^2 \leqq P(x)\,P(y) \qquad \text{für alle} \quad x\,,y \in X\,.$$

Für die Abbildung $\sqrt{P} : x \to +\sqrt{P(x)}$, für alle $x \in X$, gilt

$$\sqrt{P(\lambda\,x)} = |\lambda|\,\sqrt{P(x)} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{P(x+y)} \leqq \sqrt{P(x)} + \sqrt{P(y)}$$

für alle $x\,,y \in X$ und alle Zahlen λ. Die Funktion $\sqrt{P}$ ist eine Halbnorm auf X. Umgekehrt heisst eine Halbnorm p *quadratisch*, wenn die Abbildung $p^2 : x \to (p(x))^2$, für alle $x \in X$, eine quadratische Form auf X ist.

Ist Q eine Bilinearform, so heisst der lineare Raum

$$\mathcal{N}_l(Q) = \{\, x \mid \; x \in X\,, \;\; Q(x\,,y) = 0 \text{ für alle } y \in X \,\}$$

der *linksseitige Nullraum* der Bilinearform Q. Analog definieren wir den rechtsseitigen Nullraum $\mathcal{N}_r(Q)$. Es gilt $\mathcal{N}_r(Q) = \mathcal{N}_l(Q^*)$. Für eine Hermitesche Bilinearform Q ist $\mathcal{N}_r(Q) = \mathcal{N}_l(Q)$. Wir schreiben dann kürzer $\mathcal{N}(Q)$. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt, dass für eine positive Hermitesche Bilinearform P der Nullraum

$$\mathcal{N}(P) = \{ x \mid x \in X , \; P(x) = 0 \}$$

ist. Eine Bilinearform Q heisst *linksseitig nichtausgeartet*, wenn $\mathcal{N}_l(Q) = \{0\}$ ist. Eine nichtausgeartete Hermitesche Bilinearform auf einem linearen Raum X heisst eine *indefinite Metrik* auf X.

Auf dem linearen Raum X sei eine Topologie $\mathfrak{T}$ erklärt, so dass das Paar $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer linearer Raum ist (siehe G. Köthe [17], Seite 148 f.). Eine Bilinearform Q auf X heisst *linksseitig stetig* auf $(X, \mathfrak{T})$, wenn für alle $x \in X$ die Linearform $Q(\, . \, , x)$ eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T})$ in den Koeffizientenkörper ist. Analog definieren wir die rechtsseitige Stetigkeit. Eine Bilinearform Q ist dann und nur dann rechtsseitig stetig, wenn die konjugierte Bilinearform Q^* linksseitig stetig ist. Eine Hermitesche Bilinearform ist also dann und nur dann linksseitig stetig, wenn sie rechtsseitig stetig ist. Wir sagen in diesem Fall, dass die Hermitesche Bilinearform partiell stetig ist. Eine Bilinearform Q heisst *stetig* auf einem topologischen linearen Raum $(X, \mathfrak{T})$, wenn Q eine stetige Abbildung des Produktraumes $(X, \mathfrak{T}) \times (X, \mathfrak{T})$ in den Koeffizientenkörper ist.

Aus dem Zusammenhang zwischen einer Bilinearform Q und ihrer zugehörigen quadratischen Form Q_q folgt, dass eine Bilinearform Q auf einem topologischen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen dann und nur dann stetig ist, wenn Q_q eine stetige Abbildung ist. Auf einem topologischen linearen Raum über dem Körper der reellen Zahlen gilt der analoge Satz nur für Hermitesche Bilinearformen.

2. *Majoranten einer Bilinearform.* Es sei Q eine Bilinearform und p eine Halbnorm auf dem linearen Raum X. Wenn es zu jedem $y \in X$ eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, gibt, so dass die Abschätzung

$$|Q(x, y)| \leqq \lambda \, p(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt, so heisst p eine *linksseitige Majorante* von Q. Wir sagen auch, die Halbnorm p majorisiert die Bilinearform Q linksseitig. Analog definieren wir rechtsseitige Majoranten. Bei einer Hermiteschen Bilinearform ist jede linksseitige Majorante auch eine rechtsseitige Majorante; wir nennen die Halbnorm p dann eine *partielle Majorante.*

Wenn es zu einer Bilinearform Q und einer Halbnorm p eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, gibt, so dass die Abschätzung

$$|Q(x, y)| \leqq \lambda\, p(x)\, p(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

gilt, so heisst p eine *Majorante* von Q. Wir sagen auch, die Halbnorm p majorisiert die Bilinearform Q. Wir werden oft annehmen, dass $\lambda = 1$ ist.

Ist P eine positive Bilinearform und majorisiert die Halbnorm $\sqrt{P}$ die Bilinearform Q (partiell), so sagen wir auch, P ist eine (partielle) Majorante von Q.

Wir wollen im folgenden verschiedene Majoranten einer Bilinearform miteinander vergleichen. Eine Halbnorm p heisst *kleiner* als eine Halbnorm q, wenn

$$p(x) \leqq q(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Wir führen noch eine weitere Ordnung unter den Halbnormen auf einem linearen Raum ein. Eine Halbnorm p heisst *gröber* als eine Halbnorm q, wenn es eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, gibt, so dass

$$p(x) \leqq \lambda\, q(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt; in diesem Fall sagen wir auch, q ist feiner als p. Zwei Halbnormen p und q heissen *äquivalent*, wenn p gröber als q und q gröber als p ist. Eine Halbnorm p heisst *echt gröber* als eine Halbnorm q, wenn p gröber als q und nicht äquivalent mit q ist. Eine Halbnorm p erzeugt auf dem linearen Raum X die Topologie $\mathfrak{T}(p)$. Eine Halbnorm p ist dann und nur dann gröber als eine Halbnorm q, wenn die Topologie $\mathfrak{T}(p)$ gröber als die Topologie $\mathfrak{T}(q)$ ist.

Eine Majorante p einer Bilinearform Q heisst *minimal*, wenn jede gröbere Majorante von Q mit p äquivalent ist. Eine Majorante p einer Bilinearform heisst eine *gröbste Majorante*, wenn jede andere Majorante feiner als p ist.

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung des Begriffes der Majorante für die Untersuchung stetiger Bilinearformen auf topologischen linearen Räumen. Für den Fall lokalkonvexer Räume findet man diesen Satz bei N. Aronszajn [1].

Satz 1. *Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer linearer Raum. Eine Bilinearform Q auf X ist dann und nur dann stetig auf $(X, \mathfrak{T})$, wenn es eine auf $(X, \mathfrak{T})$ stetige Halbnorm p gibt, die die Bilinearform Q majorisiert. Die Topologie $\mathfrak{T}(p)$ ist dann gröber als die Topologie $\mathfrak{T}$.*

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich hinreichend. Wir werden zeigen, dass die Bedingung auch notwendig ist. Da Q stetig ist, gibt es eine Nullumgebung U, so dass

$$|Q(x, y)| \leqq 1 \qquad \text{für alle} \quad x, y \in U$$

gilt. Diese Abschätzung gilt auch noch auf der absolutkonvexen Hülle $\Gamma\, U$ von U: Zwei beliebige Elemente $u, v \in \Gamma\, U$ lassen sich in der Form

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \qquad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leqq 1 \quad \text{und} \quad x_1, \ldots, x_m \in U$$

und

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \qquad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \leqq 1 \quad \text{und} \quad y_1, \ldots, y_n \in U$$

schreiben, und man kann abschätzen:

$$|Q(u, v)| \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i \mu_j| \, |Q(x_i, y_j)| \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i \mu_j| \leqq 1 .$$

Ist p die Distanzfunktion der absolutkonvexen Menge ΓU, so ist p eine stetige Halbnorm auf $(X, \mathfrak{T})$ (siehe G. Köthe [17], Seite 183 f.) und es gilt die Ungleichung

$$|Q(x, y)| \leqq p(x)\, p(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X .$$

Die Bilinearform Q ist durch die stetige Halbnorm p majorisiert.

Bei L. J. Savage [38], N. Aronszajn [1] und bei Yu. P. Ginzburg und I. S. Iohvidov [5] findet man Beispiele für Bilinearformen, zu denen es keine Majoranten gibt[1]). Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass nicht-majorisierbare Bilinearformen in keiner mit der linearen Struktur des Raumes verträglichen Topologie stetig sind. Derartige Bilinearformen heissen *total unstetig.*

3. *Schwache und starke Topologie.* Aus einer Bilinearform Q auf einem linearen Raum X gehen lokalkonvexe Topologien hervor, die wir jetzt durch erzeugende Familien von Halbnormen erklären werden (siehe G. Köthe [17], Seite 206).

Die Familie der Halbnormen

$$\max_{y \in N} |Q(\,.\,, y)| : \qquad x \to \max_{y \in N} |Q(x, y)| ,$$

wobei $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$ alle endlichen Teilmengen von X durchläuft, bildet ein erzeugendes Halbnormensystem für die *linksseitig schwache Topologie* $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$. Analog definieren wir die rechtsseitig schwache Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$. Für eine Hermitesche Bilinearform Q sind die linksseitig und die rechtsseitig schwache Topologie gleich. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{T}_s(Q)$. Der topologische lineare Raum $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ ist dann und nur dann separiert, wenn die Bilinearform Q linksseitig nichtausgeartet ist.

Die Familie aller in der linksseitig schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ nach unten halbstetigen Halbnormen bildet ein erzeugendes Halbnormensystem

[1]) Das Beispiel in [38] stammt von G. W. Mackey.

für die *linksseitig starke Topologie* $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$. Analog definieren wir die rechtsseitig starke Topologie $\mathfrak{T}_{rb}(Q)$. Für eine Hermitesche Bilinearform Q stimmen die linksseitig und die rechtsseitig starke Topologie überein. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{T}_{b}(Q)$. Der topologische lineare Raum $(X, \mathfrak{T}_{lb}(Q))$ ist dann und nur dann separiert, wenn die Bilinearform Q linksseitig nichtausgeartet ist.

Die hier gegebene Definition der starken Topologie ist äquivalent der in der Theorie der lokalkonvexen Räume üblichen (siehe G. Köthe [17], Seite 259).

Einen lokalkonvexen Raum, auf dem jede nach unten halbstetige Halbnorm stetig ist, nennen wir *tonneliert* (siehe G. Köthe [17], Seite 259).

Verschiedene Varianten des folgenden Lemmas sind in der Funktionalanalysis gebräuchlich.

Lemma 1. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Für die beiden linearen Abbildungen A und A^* von X in sich gelte die Beziehung*

$$Q(A\,x\,, y) = Q(x\,, A^*\,y) \qquad \textit{für alle} \quad x\,, y \in X\,.$$

Dann ist A eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ in sich und auch eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T}_{lb}(Q))$ in sich.

Beweis. Sind $y_1, \ldots, y_n \in X$, so gehören die beiden Halbnormen $\max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(\,.\,, y_i)|$ und $\max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(\,.\,, A^*\,y_i)|$ zu den erzeugenden Halbnormen der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$. Da

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(A\,x\,, y_i)| = \max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(x\,, A^*\,y_i)|\,,$$

für alle $x \in X$, gilt, ist A eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ in sich.

Gehört die Halbnorm p zu den erzeugenden Halbnormen der linksseitig starken Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$, so ist p in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ nach unten halbstetig. Da die Abbildung A eine stetige Abbildung des Raumes $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ in sich ist, ist die Halbnorm $p(A\,.\,)$ auch in der linksseitig schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ nach unten halbstetig und gehört zu den erzeugenden Halbnormen der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$. So ist A eine stetige Abbildung des Raumes $(X, \mathfrak{T}_{lb}(Q))$ in sich.

II. Polarität

1. *Polarenbildung.* Wir wollen nun den aus der Theorie der Dualitäten bekannten Prozess der Polarenbildung (siehe G. Köthe [17], Seite 246 f.) für unseren Spezialfall untersuchen. N. Aronszajn [1] hat mit den Methoden der Polarenbildung wichtige Resultate über Majoranten von Bilinear-

formen gefunden. Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnorm p sei eine rechtsseitige Majorante der Bilinearform Q. Die reellwertige Funktion

$$p^{\pi}(x) = \inf\{\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}, \ |Q(x, y)| \leqq \lambda\, p(y) \text{ für alle } y \in X\},$$

für alle $x \in X$, heisst die *linksseitige Polare* der rechtsseitigen Majorante p. Ist $S(p)$ die Menge $\{y \mid y \in X, \ p(y) \leqq 1\}$, so kann man die Polare p^{π} auch durch die Vorschrift

$$p^{\pi}(x) = \sup\{|Q(x, y)| \mid y \in S(p)\} \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

definieren. Analog bildet man die rechtsseitige Polare q_{π} zu einer linksseitigen Majorante q. Im Falle einer Hermiteschen Bilinearform Q bezeichnen wir die Polare einer partiellen Majorante p immer mit p^{π}.

Die Polare p^{π} einer rechtsseitigen Majorante p einer Bilinearform Q ist eine Halbnorm, die Q linksseitig majorisiert (siehe N. Aronszajn [1]). Es gilt die Ungleichung

$$|Q(x, y)| \leqq p^{\pi}(x)\, p(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X.$$

Its p quadratisch, so ist auch p^{π} quadratisch (siehe N. Aronszajn [1]). Ist p eine rechtsseitige Majorante der Bilinearform Q, so gilt mit der Halbnorm $q = \max(p, p^{\pi})$ die Ungleichung $|Q(x, y)| \leqq q(x)\, q(y)$ für alle $x, y \in X$. Also ist jede partiell majorisierbare Bilinearform auch majorisierbar. Wie aus dem obigen zu sehen ist, ist eine partielle Majorante dann und nur dann eine Majorante, wenn sie feiner als ihre Polare ist.

In Abschnitt I.3 hatten wir eine Ordnung unter den Halbnormen eingeführt. Der folgende Satz zeigt, dass die Polarenbildung mit dieser Ordnung verträglich ist.

Satz 2. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnormen p und q seien zwei rechtsseitige Majoranten der Bilinearform Q. Gilt für alle $x \in X$ die Ungleichung $q(x) \leqq p(x)$, so folgt für die Polaren die Ungleichung $q^{\pi}(x) \geqq p^{\pi}(x)$ für alle $x \in X$. Ist p feiner als q, so ist p^{π} gröber als q^{π}.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Polaren. Ist λ eine positive reelle Zahl, so ist mit p auch die Halbnorm $\lambda\, p$ eine Majorante von Q. Für die Polaren gilt $(\lambda\, p)^{\pi} = \lambda^{-1} p^{\pi}$. Da die Halbnorm q gröber als die Halbnorm p ist, existiert eine reelle Zahl λ, $0 < \lambda < +\infty$, so dass $q(y) \leqq \lambda\, p(y)$ für alle $y \in X$ gilt. Für die Polaren folgt dann die Ungleichung

$$\lambda\, q^{\pi}(x) \geqq \lambda\, (\lambda\, p)^{\pi}(x) = p^{\pi}(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Für die *Bipolare* $p^{\pi}{}_{\pi}$ gilt $p^{\pi}{}_{\pi}(y) \leqq p(y)$ für alle $y \in X$. Analog gilt $p^{\pi}{}_{\pi}{}^{\pi}(x) \leqq p^{\pi}(x)$ für alle $x \in X$. Wenden wir auf die erste Ungleichung den obigen Satz 2 an, so folgt ${p^\pi}_\pi{}^\pi(x) \geqq p^\pi(x)$ für alle $x \in X$. Es gilt also ${p^\pi}_\pi{}^\pi = p^\pi$.

2. *Bipolarensatz.*[2]) Wir wollen die Struktur der Bipolaren ${p^\pi}_\pi$ einer rechtsseitigen Majorante p von einer Bilinearform Q untersuchen. Uns interessiert, wann die Gleichung ${p^\pi}_\pi = p$ gilt. Wir beweisen zuerst ein Lemma, das Auskunft über das Verhalten der Polaren p^π einer rechtsseitigen Majoranten p von einer Bilinearform Q in der linksseitig schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ gibt.

Lemma 2. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnorm p sei eine rechtsseitige Majorante der Bilinearform Q. Die Polare p^π ist dann in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ nach unten halbstetig.*

Beweis. Die Halbnormen $|Q(\,.\,, y)|$ sind in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ stetig. Dann ist die Funktion $p^\pi(x) = \sup \{ |Q(x, y)| \mid y \in S(p) \}$ nach unten halbstetig.

Zu einer beliebigen Halbnorm p auf einem topologischen linearen Raum $(X, \mathfrak{T})$ kann man den unteren Limes $\underline{p}$ von p wie folgt bilden: Ist $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter des Punktes x in der Topologie $\mathfrak{T}$, so ist (siehe G. Köthe [17], Seite 42)

$$\underline{p}(x) = \liminf_{U \in \mathfrak{U}(x)} \{ p(y) \mid y \in U \} .$$

Man sieht leicht, dass die Funktion $\underline{p}$ eine in der Topologie $\mathfrak{T}$ nach unten halbstetige Halbnorm auf dem linearen Raum X ist.

Satz 3. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnorm p sei eine rechtsseitige Majorante der Bilinearform Q. Die Bipolare ${p^\pi}_\pi$ ist gleich der in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$ gebildeten Halbnorm $\underline{p}$.*

Korollar 1. *Eine rechtsseitige Majorante p einer Bilinearform Q ist dann und nur dann gleich ihrer Bipolaren ${p^\pi}_\pi$, wenn p in der Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$ nach unten halbstetig ist.*

Korollar 2. *Zwei rechtsseitige Majoranten einer Bilinearform Q, die in der Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$ nach unten halbstetig sind, sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Polaren äquivalent sind.*

Beweis des Satzes (siehe auch G. Köthe [17], Seite 248). Wie wir am Ende des Abschnittes II.1 gesehen haben, gilt im allgemeinen die Ungleichung ${p^\pi}_\pi \leqq p$. Nach Lemma 2 ist die Bipolare ${p^\pi}_\pi$ in der Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$ nach unten halbstetig. Wir erhalten die Ungleichung ${p^\pi}_\pi \leqq \underline{p}$. Wenn es nun eine Stelle $y_0 \in X$ gibt, an der ${p^\pi}_\pi(y_0) < \underline{p}(y_0)$ gilt, so

[2]) Der Verfasser möchte dankbar erwähnen, dass Herr Professor Dr. I. Halperin ihn auf die Verwandtschaft des Inhaltes dieses Abschnittes mit einigen Sätzen der Arbeit [6] von I. Halperin und W. A. J. Luxemburg aufmerksam gemacht hat.

liegt der Punkt y_0 ausserhalb der Menge $S(\underline{p}, \varrho) = \{ y \mid y \in X , \underline{p}(y) \leqq \varrho \}$, wenn für den Radius ϱ die Abschätzung $p^{\pi}{}_{\pi}(y_0) < \varrho < \underline{p}(y_0)$ gilt. Diese Menge ist absolutkonvex und abgeschlossen in der Topologie $\mathfrak{T}_{rs}(Q)$. Es gibt eine Linearform $Q(x , .)$, die y_0 von der Menge $S(\underline{p}, \varrho)$ strikt trennt (siehe G. Köthe [17], Seite 244):

$$\sup \{ |Q(x , y)| \mid y \in S(\underline{p}, \varrho) \} \leqq 1 < \operatorname{Re} Q(x , y_0) .$$

Aus der linken Seite dieser Ungleichung und aus Satz 2 folgt $p^{\pi}(x) \leqq \underline{p}^{\pi}(x) \leqq \varrho^{-1}$. Aus der rechten Seite folgt dann aber $p^{\pi}{}_{\pi}(y_0) > \varrho$. Also gilt $p^{\pi}{}_{\pi} = \underline{p}$.

Korollar 1 folgt unmittelbar aus Satz 3. Korollar 2 ist eine Folgerung aus Korollar 1 und aus Satz 2.

3. *Minimale Majoranten.* Aus dem folgenden Lemma erhält man ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, dass eine Majorante minimal (siehe I.2) ist, sowie einen Beweis für die Existenz minimaler Majoranten. Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von N. Aronszajn [1].

Lemma 3. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnorm p majorisiere die Bilinearform Q. Dann gibt es eine gröbere Halbnorm p_0, die Q auch majorisiert und für die $p_0 = \max(p_0{}^{\pi}, p_{0\pi})$ gilt.*

Beweis. Wir können annehmen, dass die Ungleichung

$$|Q(x , y)| \leqq p(x)\, p(y) \qquad \text{für alle} \quad x , y \in X$$

gilt. Die Polaren p^{π} und p_{π} sind dann kleiner als p. Aus den für alle $x , y \in X$ gültigen Ungleichungen

$$|Q(x , y)| \leqq p^{\pi}(x)\, p(y) \qquad \text{und} \qquad |Q(x , y)| \leqq p(x)\, p_{\pi}(y)$$

folgt für alle $x , y \in X$ die Abschätzung

$$|Q(x , y)| \leqq \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(p(x)^2 + p^{\pi}(x)^2)}\,\sqrt{\tfrac{1}{2}\,(p(y)^2 + p_{\pi}(y)^2)} \leqq p_1(x)\, p_1(y) ,$$

wobei

$$p_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(p^2 + \max(p^{\pi 2}, p_{\pi}{}^2))}$$

ist. Es gilt für alle $x \in X$ die Ungleichung $p_1(x) \leqq p(x)$. Setzen wir das Verfahren fort, so erhalten wir eine monoton fallende Folge $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ von Halbnormen, die alle die Bilinearform Q majorisieren. Die Halbnorm $p_0 = \lim_{k\to\infty} p_k$ ist eine Majorante von Q. Wir werden zeigen, dass die Relation $p_0 = \max(p_0{}^{\pi}, p_{0\pi})$ gilt.

Die Folgen $(p_k{}^{\pi})_{k=1}^{\infty}$ und $(p_{k\pi})_{k=1}^{\infty}$ sind monoton wachsend und beschränkt. Nach Satz 2 folgen aus der Ungleichung $p_0 \leqq p_k$ die beiden

Ungleichungen $p_0^\pi \geqq p_k^\pi$ und $p_{0\pi} \geqq p_{k\pi}$. Für die beiden Halbnormen $q_l = \lim_{k\to\infty} p_k^\pi$ und $q_r = \lim_{k\to\infty} p_{k\pi}$ gelten die Abschätzungen $q_l \leqq p_0^\pi$ und $q_r \leqq p_{0\pi}$. Da die Ungleichung

$$|Q(x, y)| \leqq p_k^\pi(x)\, p_k(y) \leqq q_l(x)\, p_k(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

und für alle natürlichen Zahlen $k = 1, 2, \ldots$ gilt, folgt

$$|Q(x, y)| \leqq q_l(x)\, p_0(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X .$$

Diese Ungleichung besagt aber gerade, dass $p_0^\pi \leqq q_l$ ist. Analog erhält man die Ungleichung $p_{0\pi} \leqq q_r$. Es gilt also $\lim_{k\to\infty} p_k^\pi = p_0^\pi$ und $\lim_{k\to\infty} p_{k\pi} = p_{0\pi}$. Folglich ist

$$\lim_{k\to\infty} \max(p_k^\pi, p_{k\pi}) = \max(p_0^\pi, p_{0\pi}) .$$

Aus der Definition von p_0 folgt nun

$$p_0 = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(p_k^2 + \max(p_k^{\pi 2}, p_{k\pi}^2))} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(p_0^2 + \max(p_0^{\pi 2}, p_{0\pi}^2))} .$$

Daraus ergibt sich die Gleichung $p_0 = \max(p_0^\pi, p_{0\pi})$.

Ist Q Hermitesch, so haben wir eine Majorante p_0 gefunden, für die $p_0 = p_0^\pi$ gilt. Derartige Majoranten heissen *selbstassoziiert* (siehe N. Aronszajn [1]).

Satz 4. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Eine Majorante p der Bilinearform Q ist dann und nur dann minimal, wenn p mit der Halbnorm $\max(p^\pi, p_\pi)$ äquivalent ist.*

Korollar. *Jede minimale Majorante einer Hermiteschen Bilinearform Q ist zu einer selbstassoziierten Majorante äquivalent. Aus Lemma 2 folgt, dass die selbstassoziierten Majoranten in der Topologie $\mathfrak{T}_s(Q)$ nach unten halbstetig sind.*

Eine Majorante einer Hermiteschen Bilinearform ist minimal, wenn sie mit ihrer Polaren äquivalent ist. Im allgemeinen ist die Äquivalenz von p mit einer ihrer Polaren nur hinreichend und nicht notwendig dafür, dass die Majorante p minimal ist.

Beweis des Satzes. Die Halbnormen p und $\max(p^\pi, p_\pi)$ seien äquivalent. Die Halbnorm q sei eine weitere Majorante, die gröber als p ist. Nach Satz 2 ist dann q^π feiner als p^π und q_π feiner als p_π. Da q eine Majorante ist, ist q feiner als q^π und q_π. Die Halbnorm q ist feiner als die Halbnorm $\max(p^\pi, p_\pi)$ und folglich feiner als p. Die Majoranten p und q sind äquivalent.

Die Halbnorm p sei eine minimale Majorante von Q. Nach Lemma 3 existiert eine gröbere Halbnorm p_0, die Q auch majorisiert und die mit der Halbnorm $\max(p_0^\pi, p_{0\pi})$ äquivalent ist. Da p eine minimale Majorante ist, ist p äquivalent mit p_0. Nach Satz 2 sind auch die Polaren von

p und p_0 äquivalent. Die Halbnorm p ist äquivalent der Halbnorm $\max(p^{\pi}, p_{\pi})$. Aus dem soeben gezeigten folgt auch das Korollar.

Satz 5. *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Halbnorm p majorisiere die Bilinearform Q. Dann gibt es eine minimale Majorante p_0 von Q, die gröber als p ist.*

Beweis. Nach Lemma 3 gibt es eine Majorante p_0 von Q, die gröber als p ist und die mit der Halbnorm $\max(p_0^{\pi}, p_{0\pi})$ äquivalent ist. Nach Satz 4 ist p_0 eine minimale Majorante.

III. Zerlegungsmajoranten

1. *Direkte Summen von Räumen mit Bilinearformen.* Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X, und R sei eine Bilinearform auf dem linearen Raum Y. Eine bijektive lineare Abbildung A von X auf Y heisst ein *Isomorphismus* von (X, Q) auf (Y, R), wenn die Gleichung

$$Q(x, y) = R(A\,x, A\,y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

erfüllt ist.

Für $i = 1, 2$ sei Q_i eine Bilinearform auf dem linearen Raum X_i. Unter der *direkten Summe* $(X_1, Q_1) \oplus (X_2, Q_2)$ verstehen wir dann den Raum $X_1 \oplus X_2$, versehen mit der durch

$$Q_1 \oplus Q_2 : \qquad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \rightarrow Q_1(x_1, y_1) + Q_2(x_2, y_2),$$

für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \oplus X_2$, erklärten Bilinearform $Q_1 \oplus Q_2$. Wir schreiben

$$(X_1, Q_1) \oplus (X_2, Q_2) = (X_1 \oplus X_2, Q_1 \oplus Q_2).$$

Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Ferner seien X_i ($i = 1, 2$) zwei lineare Teilräume von X. Die Einschränkung der Bilinearform Q auf den Raum X_i wird mit $Q \mid X_i$ bezeichnet. Wir können die direkte Summe $(X_1, Q \mid X_1) \oplus (X_2, Q \mid X_2)$ bilden. Durch τ: $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2$ wird eine lineare Abbildung von $X_1 \oplus X_2$ auf X erklärt. Der Raum (X, Q) heisst die direkte Summe der beiden Teilräume $(X_i, Q \mid X_i)$ ($i = 1, 2$), wenn die Abbildung τ einen Isomorphismus von der direkten Summe $(X_1, Q \mid X_1) \oplus (X_2, Q \mid X_2)$ auf (X, Q) vermittelt. Wir schreiben dann

$$(X, Q) = (X_1, Q \mid X_1) \oplus (X_2, Q \mid X_2).$$

Der nächste Satz gestattet uns im folgenden ein leichtes Umgehen mit der schwachen und der starken Topologie von direkten Summen von Räumen mit indefiniter Metrik.

Satz 6. *Es sei* Q *eine Bilinearform auf dem linearen Raum* X. *Der Raum* (X, Q) *gestatte eine Darstellung als direkte Summe zweier Teilräume* $(X_i, Q \mid X_i)$ $(i = 1, 2)$:

$$(X, Q) = (X_1, Q \mid X_1) \oplus (X_2, Q \mid X_2).$$

Dann gilt $\mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_i = \mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i)$ *und* $\mathfrak{T}_{lb}(Q) \mid X_i = \mathfrak{T}_{lb}(Q \mid X_i)$ *für* $i = 1, 2$. *Weiterhin haben wir die beiden Darstellungen von* X *als topologisch direkte Summe:*

(i) $$(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q)) = (X_1, \mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_1) \oplus (X_2, \mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_2)$$

und

(ii) $$(X, \mathfrak{T}_{lb}(Q)) = (X_1, \mathfrak{T}_{lb}(Q) \mid X_1) \oplus (X_2, \mathfrak{T}_{lb}(Q) \mid X_2).$$

Beweis. Wir bezeichnen die zu der Darstellung $X = X_1 \oplus X_2$ gehörenden Projektionen mit F_1 und F_2: Der Wertevorrat $\mathfrak{R}(F_i)$ von F_i ist X_i $(i = 1, 2)$, und $F_1 + F_2$ ist gleich der identischen Transformation I. Aus der Definition der direkten Summe folgt, dass die beiden Abbildungen F_1 und F_2 Q-symmetrisch sind: Es gilt $Q(F_i x, y) = Q(x, F_i y)$ für alle $x, y \in X$. Nach Lemma 1 in Abschnitt I.3 sind die Projektionen F_i $(i = 1, 2)$ stetige Abbildungen von $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ und von $(X, \mathfrak{T}_{lb}(Q))$ in sich. Daraus folgen die beiden Darstellungen (i) und (ii) (siehe G. Köthe [17], Seite 159).

Wir zeigen, dass $(X_i, \mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_i) = (X_i, \mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i))$ ist. Eine Halbnorm aus dem Erzeugendensystem der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i)$ hat die Form $\max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(\,.\,, y_j) \mid$, wobei $y_1, \ldots, y_n \in X_i$. Diese Halbnorm ist offensichtlich die Einschränkung auf X_i von einer Halbnorm aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ auf X. Eine Halbnorm aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_i$ hat die Form

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(\,.\,, z_j) \mid,$$

wobei $z_1, \ldots, z_n \in X$ sind. Nun gilt für alle $x \in X_i$ die Gleichung

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(x, z_j) \mid = \max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(F_i x, z_j) \mid = \max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(x, F_i z_j) \mid.$$

Die Einschränkung der Halbnorm $\max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(\,.\,, z_j) \mid$ hat also die Form $\max_{1 \leq j \leq n} \mid Q(\,.\,, F_i z_j) \mid$ und gehört folglich zu den erzeugenden Halbnormen der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i)$.

Wir zeigen, dass $(X_i, \mathfrak{T}_{lb}(Q) \mid X_i) = (X_i, \mathfrak{T}_{lb}(Q \mid X_i))$ ist. Eine Halbnorm p aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q \mid X_i)$ ist in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i)$ nach unten halbstetig. Aus dem bisherigen Teil des Beweises folgt, dass die Halbnorm $p(F_i\,.\,)$ eine nach unten halbstetige Funktion auf $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ ist. Da $p(F_i\,.\,) \mid X_i = p$ ist, ist die

Halbnorm p die Einschränkung auf X_i von einer Halbnorm aus dem Erzeugengensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$. Die Einschränkung $q \mid X_i$ einer Halbnorm q aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$ ist in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_i$ nach unten halbstetig. Da $\mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid X_i = \mathfrak{T}_{ls}(Q \mid X_i)$ gilt, gehört $q \mid X_i$ zu den erzeugenden Halbnormen der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q \mid X_i)$.

2. *Kanonische Zerlegungen.* Es sei X ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform Q. Der Raum (X, Q) gestatte eine Darstellung $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$ als direkte Summe zweier Teilräume $(X^+, Q \mid X^+)$ und $(X^-, Q \mid X^-)$, wobei $Q_q \mid X^+$ und $Q_q \mid X^-$ positiv sind. Wir nennen diese Darstellung eine *kanonische Zerlegung* des Raumes (X, Q). M. R. Hestenes [7], R. Nevanlinna [31]—[35] und E. Scheibe [39] haben kanonische Zerlegungen untersucht.

Zu der Darstellung $X = X^+ + X^-$ gehören die Projektionen F^+ und F^- mit den Eigenschaften $\mathfrak{R}(F^+) = X^+$ und $\mathfrak{R}(F^-) = X^-$ und $F^+ + F^- = I$. Die beiden Projektionen F^+ und F^- sind Q-symmetrisch. Wir definieren den Operator $J = F^+ - F^-$. Es gilt $J^2 = I$. Wir bilden die Hermitesche Bilinearform $P = Q \mid X^+ \oplus (-Q \mid X^-)$. Es gilt also $(X, P) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, -Q \mid X^-)$. Weiterhin bilden wir die Bilinearformen

$$Q^+ = \tfrac{1}{2}(P + Q) \qquad \text{und} \qquad Q^- = \tfrac{1}{2}(P - Q).$$

Die Bilinearform P heisst die von der betreffenden Zerlegung erzeugte Zerlegungsmajorante von Q (siehe R. Nevanlinna [32]—[35]). Diese Bezeichnung wird durch die im folgenden angegebenen Eigenschaften von P gerechtfertigt.

Satz 7. *Es sei X ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform Q. Der Raum (X, Q) gestatte eine kanonische Zerlegung $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$. Die Operatoren F^+, F^-, J und die Bilinearform P seien wie oben definiert. Dann gilt:*

(i) *Die Bilinearform P ist positiv. Es gilt $(X^+, P \mid X^+) = (X^+, Q \mid X^+)$ und $(X^-, P \mid X^-) = (X^-, -Q \mid X^-)$. Der Raum (X, P) hat eine Darstellung*

$$(X, P) = (X^+, P \mid X^+) \oplus (X^-, P \mid X^-)$$

als direkte Summe der beiden Teilräume $(X^+, P \mid X^+)$ und $(X^-, P \mid X^-)$. Daraus folgen die Formeln $Q(Jx, y) = P(x, y)$ und $P(Jx) = P(x)$ für alle $x, y \in X$. Die Bilinearformen P und Q erzeugen dieselbe schwache und starke Topologie auf dem linearen Raum X.

(ii) *Die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist eine selbstassoziierte Majorante der Bilinearform Q. Die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist eine minimale Majorante (siehe II.2, Satz 4).*

Beweis. (i): Aus der kanonischen Zerlegung von Q und der Definition von P folgen die Gleichungen $P \mid X^+ = Q \mid X^+$ und $P \mid X^- = -Q \mid X^-$ und die Darstellung von (X , P) als direkte Summe. Wir erhalten die Abschätzung

$$P(x) = Q(F^+ x) - Q(F^- x) \geqq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in X .$$

Die Hermitesche Bilinearform P ist positiv. Analog folgt

$$Q(J\, x , y) = Q((F^+ - F^-)\, x , y) = Q(F^+ x , F^+ y) - Q(F^- x , F^- y) = P(x , y)$$

für alle $x , y \in X$. Da $J^2 = I$ ist, folgt hieraus $P(Jx) = P(x)$.

(ii): Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$| Q(x , y) |^2 = | P(J\, x , y) |^2 \leqq P(J\, x)\, P(y) \leqq P(x)\, P(y)$$

für alle $x , y \in X$. Die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist eine Majorante von Q. Da die Abbildung J bijektiv ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{P}^\tau(x) &= \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R} , \quad | Q(x , y) | \leqq \lambda \sqrt{P(y)} \quad \text{für alle } y \in X \} \\ &= \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R} , \quad | Q(x , Jy) | \leqq \lambda \sqrt{P(J\, y)} \quad \text{für alle } y \in X \} \\ &= \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R} , \quad | P(x , y) | \leqq \lambda \sqrt{P(y)} \quad \text{für alle } y \in X \} . \end{aligned}$$

Da die Schwarzsche Ungleichung scharf ist, folgt $\sqrt{P}^\tau = \sqrt{P}$.

3. *Ein Vergleichbarkeitskriterium.* Wir wollen ein Kriterium finden, das uns gestattet zu entscheiden, wann eine minimale Majorante einer Hermiteschen Bilinearform Q mit einer vorgegebenen Zerlegungsmajorante äquivalent ist. Dieses Kriterium wird es uns erlauben, im folgenden Kapitel eine Klasse von Räumen (X , Q) zu charakterisieren, auf denen es eine gröbste Majorante von Q gibt.

Lemma 4. *Es sei X ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform Q. Der Raum (X , Q) gestatte eine kanonische Zerlegung*

$$(X , Q) = (X^+ , Q \mid X^+) \oplus (X^- , Q \mid X^-) .$$

Die Operatoren F^+, F^-, J und die Zerlegungsmajorante P seien wie in Abschnitt III.2 definiert. Eine minimale Majorante q der Bilinearform Q ist dann und nur dann äquivalent mit der Majorante $\sqrt{P}$, wenn einer der Operatoren F^+, F^-, J auf $(X , \mathfrak{T}(q))$ stetig ist.

Beweis. Aus den beiden Beziehungen $F^+ + F^- = I$ und $F^+ - F^- = J$ folgt, dass die Stetigkeit von einem der Operatoren F^+, F^-, J die Stetigkeit der anderen beiden nach sich zieht. Auf Grund der Aussage (i) des Satzes 7 ist die angegebene Bedingung notwendig. Ist andererseits J eine stetige Abbildung von $(X , \mathfrak{T}(q))$ in sich, so existiert eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, so dass die Ungleichung

$$q(J\,x) \leqq \lambda\, q(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Wir können dann aber abschätzen

$$P(x) = Q(J\,x\,,x) \leqq q(J\,x)\,q(x) = \lambda\,(q(x))^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Die Halbnorm q ist feiner als $\sqrt{P}$. Da q eine minimale Majorante von Q ist, muss q äquivalent mit $\sqrt{P}$ sein.

Satz 8. *Es sei X ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform Q. Der Raum $(X\,,Q)$ gestatte eine kanonische Zerlegung $(X\,,Q) = (X^+\,,Q \mid X^+) \oplus (X^-\,,Q \mid X^-)$. Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei P. Eine weitere minimale Majorante q der Bilinearform Q ist dann und nur dann äquivalent mit der Halbnorm $\sqrt{P}$, wenn auf mindestens einem der beiden Teilräume X^+ oder X^- die Einschränkungen von q und $\sqrt{P}$ äquivalent sind.*

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Sind nun etwa auf X^+ die Halbnormen $\sqrt{P} \mid X^+$ und $q \mid X^+$ äquivalent, so können wir zeigen, dass dann die Projektion F^+ eine stetige Abbildung von $(X\,,\mathfrak{T}(q))$ in sich ist. Nach dem soeben bewiesenen Lemma 4 sind dann die beiden Majoranten q und $\sqrt{P}$ auf ganz X äquivalent. Da die Halbnormen $q \mid X^+$ und $\sqrt{P} \mid X^+$ äquivalent sind, gibt es eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, so dass

$$(q(x))^2 \leqq \lambda\,P(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X^+$$

gilt. Da q eine Majorante von Q ist, ergibt sich

$$(q(F^+x))^2 \leqq \lambda\,P(F^+x) = \lambda\,Q(F^+x) = \lambda\,Q(F^+x\,,x) \leqq \lambda\,q(F^+x)\,q(x)$$

für alle $x \in X$. Daraus folgt nun

$$q(F^+x) \leqq \lambda\,q(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Die Projektion F^+ ist also eine stetige Abbildung von $(X\,,\mathfrak{T}(q))$ in sich.

IV. Hermitesche Bilinearformen mit gröbsten Majoranten

1. *Hermitesche Bilinearformen mit gröbsten Majoranten.* Wir wollen untersuchen, wann für eine Hermitesche Bilinearform, zu der es eine kanonische Zerlegung gibt, die zugehörige Zerlegungsmajorante eine gröbste Majorante ist. Hinreichende Kriterien haben R. Nevanlinna [32] und N. Aronszajn [1] angegeben.

Satz 9. *Es sei X ein linearer Raum und Q eine (indefinite) Hermitesche Bilinearform auf X. Der Raum $(X\,,Q)$ gestatte eine kanonische Zerlegung*

$(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$. *Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei* P *(siehe III.2). Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *Es gibt eine gröbste Majorante von* Q .

(ii) *Alle minimalen quadratischen Majoranten sind äquivalent.*

(iii) *Auf mindestens einem der beiden Teilräume* $(X^+, Q \mid X^+)$ *oder* $(X^-, Q \mid X^-)$ *ist die in Abschnitt I.3 erklärte starke Topologie gleich der von der Einschränkung der Zerlegungsmajorante* $\sqrt{P}$ *erzeugten Topologie.*

(iv) *Mindestens einer der beiden Teilräume* $(X^+, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^+))$ *oder* $(X^-, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^-))$ *ist tonneliert (siehe I.3).*

Beweis. Wir werden die Äquivalenz in der natürlichen Reihenfolge beweisen. Der erste Schluss ist einfach. Aus der Aussage (i) folgt, dass alle minimalen Majoranten äquivalent sind. Dann sind erst recht alle minimalen quadratischen Majoranten äquivalent. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir durch einen indirekten Beweis zeigen, dass aus (ii) die Aussage (iii) folgt. Im dritten Abschnitt zeigen wir, dass aus (iii) die Aussage (iv) und aus (iv) wieder (i) folgt.

2. *Konstruktion von zwei nichtvergleichbaren selbstassoziierten quadratischen Majoranten.* Wir geben zuerst ein einfaches Lemma, das wir für den nachfolgenden Widerspruchsbeweis benötigen.

Lemma 5. *Es sei* P *eine positive Hermitesche Bilinearform auf dem linearen Raum* X . *Die Halbnorm* q *majorisiere* P *partiell. Wenn die Halbnorm* q *echt gröber als die Halbnorm* $\sqrt{P}$ *ist, dann gibt es zu jeder Nullfolge* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ *von positiven, endlichen reellen Zahlen* ε_n *eine Folge* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *von* P *-orthonormalen Vektoren in* X *mit*

$$P(e_m, e_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad m, n = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad m \neq n$$

und

$$P(e_n) = 1 \quad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

so dass für alle natürlichen Zahlen n *die Ungleichung*

$$q(e_n) < \varepsilon_n \sqrt{P(e_n)} = \varepsilon_n$$

gilt.

Beweis. Da die Halbnorm q echt gröber als die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist, gibt es im Raum X einen Vektor x_1 , für den die Ungleichung $q(x_1) < \varepsilon_1 \sqrt{P(x_1)}$ gilt. Wir setzen $e_1 = x_1/\sqrt{P(x_1)}$. Wir betrachten nun alle Vektoren $x \in X$ mit $P(x, e_1) = 0$. Entweder gilt für alle diese Vektoren $q(x) \geqq \varepsilon_2 \sqrt{P(x)}$ oder es gibt einen Vektor $x_2 \in X$ mit $P(x_2, e_1) = 0$, für den $q(x_2) < \varepsilon_2 \sqrt{P(x_2)}$ gilt. Wenn wir den Vektor x_2 noch normieren, haben wir e_2 gefunden.

Sofern das Verfahren nicht abbricht, können wir für jede natürliche Zahl n einen Vektor e_n konstruieren, so dass die Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ die geforderten Eigenschaften hat.

Bricht das Verfahren bei einer Zahl n, $2 \leqq n < +\infty$, ab, so gilt $q(z) \geqq \varepsilon_{n+1} \sqrt{P(z)}$ für alle Vektoren z aus der Menge

$$Z = \{ z \mid z \in X, \ P(z, e_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n \} .$$

Auf dem linearen Teilraum Z sind die Halbnormen $q \mid Z$ und $\sqrt{P} \mid Z$ äquivalent. Die Räume $(Z, \mathfrak{T}(q \mid Z))$ und $(Z, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Z))$ sind gleich. Wir bezeichnen die lineare Hülle der Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ mit Y. Der Raum $(Y, P \mid Y)$ ist ein endlichdimensionaler Teilraum von (X, P), und $P \mid Y$ ist auf Y nichtausgeartet. Der Teilraum $(Z, P \mid Z)$ ist ein Komplementärraum zu $(Y, P \mid Y)$ in bezug auf den Raum (X, P). Es gilt $(X, P) = (Y, P \mid Y) \oplus (Z, P \mid Z)$. Folglich gilt

$$(X, \mathfrak{T}(\sqrt{P})) = (Y, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Y)) \oplus (Z, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Z)) .$$

Wir zeigen ferner, dass der Teilraum $(Z, \mathfrak{T}(q \mid Z))$ ein Komplementärraum zu dem Teilraum $(Y, \mathfrak{T}(q \mid Y))$ in dem topologischen linearen Raum $(X, \mathfrak{T}(q))$ ist. Der Beweis verläuft nach einem bewährten Schema. Man muss nur beachten, dass die vorkommenden Topologien nicht notwendig separiert sind. Mit F bezeichnen wir die zu der Darstellung $X = Y \oplus Z$ gehörende Projektion auf den Teilraum Y. Es gilt $\mathcal{R}(F) = Y$ und $\mathcal{N}(F) = \{ z \mid z \in X, F z = 0 \} = Z$. Es reicht zu zeigen, dass F eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T}(q))$ auf $(Y, \mathfrak{T}(q \mid Y))$ ist (siehe G. Köthe [17], Seite 159). Es sei z_0 ein Häufungspunkt von Z. Da q die Bilinearform P partiell majorisiert, folgt $P(z_0, e_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Der Punkt z_0 liegt in Z, und Z ist also ein abgeschlossener Teilraum von $(X, \mathfrak{T}(q))$. Auf dem Quotientenraum X / Z ist die von $\mathfrak{T}(q)$ induzierte Quotiententopologie $\mathfrak{T}_0$ separiert. $(X / Z, \mathfrak{T}_0)$ ist ein separierter, endlichdimensionaler, topologischer linearer Raum. Wir bezeichnen mit K die kanonische Abbildung von $(X, \mathfrak{T}(q))$ auf $(X / Z, \mathfrak{T}_0)$. Nach dem Homomorphiesatz existiert eine bijektive lineare Abbildung $I: X / Z \to Y$, so dass $F = I \circ K$ gilt. Nach einem Satz von A. Tychonoff (siehe G. Köthe [17], Seite 154) ist I eine stetige Abbildung von $(X / Z, \mathfrak{T}_0)$ auf $(Y, \mathfrak{T}(q \mid Y))$. Die Projektion $F = I \circ K$ ist also stetig. So haben wir die Darstellung

$$(X, \mathfrak{T}(q)) = (Y, \mathfrak{T}(q \mid Y)) \oplus (Z, \mathfrak{T}(q \mid Z))$$

bewiesen.

Da die Halbnorm q die Bilinearform P partiell majorisiert, ist der endlichdimensionale Teilraum $(Y, \mathfrak{T}(q \mid Y))$ separiert. Nach dem schon einmal angewandten Satz von Tychonoff sind die beiden endlichdimensionalen, separierten, topologischen linearen Räume $(Y, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Y))$ und $(Y, \mathfrak{T}(q \mid Y))$ gleich. Aus den beiden oben bewiesenen Darstellungen folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}(X, \mathfrak{T}(q)) &= (Y, \mathfrak{T}(q \mid Y)) \oplus (Z, \mathfrak{T}(q \mid Z)) \\ &= (Y, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Y)) \oplus (Z, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid Z)) = (X, \mathfrak{T}(\sqrt{P})).\end{aligned}$$

Diese Gleichung steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme, dass die Halbnorm q echt gröber als die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist. Das Verfahren zur Konstruktion der Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ kann also nicht bei einer endlichen Zahl abbrechen, womit Lemma 5 bewiesen ist.

Wir können nun zeigen, dass aus der Aussage (ii) in Satz 9 die Aussage (iii) folgt. Es sei (X, Q) ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform. Es gebe eine kanonische Zerlegung $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$. Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei P. Die Aussage (iii) in Satz 9 sei nicht erfüllt. Auf X^+ ist die Topologie $\mathfrak{T}_b(Q \mid X^+)$ verschieden von der Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^+)$, und auf X^- ist die Topologie $\mathfrak{T}_b(Q \mid X^-)$ verschieden von der Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^-)$. Dann existiert eine selbstassoziierte quadratische Majorante $\sqrt{R}$ von Q, die mit der Zerlegungsmajorante $\sqrt{P}$ nicht vergleichbar ist.

Wir beachten im folgenden die in Satz 6 angegebenen Zusammenhänge zwischen den von Q auf X, X^+, X^- erzeugten schwachen und starken Topologien. Nach Satz 7 gilt $P \mid X^+ = Q \mid X^+$ und $P \mid X^- = -Q \mid X^-$. Die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist eine selbstassoziierte Majorante der Bilinearform Q (siehe Satz 7) und ist in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q)$ nach unten halbstetig (siehe Lemma 2). Die Halbnorm $\sqrt{P}$ gehört zu den erzeugenden Halbnormen der starken Topologie $\mathfrak{T}_b(Q)$ (siehe I.3). Unsere Voraussetzung besagt also, dass auf X^+ und X^- die Einschränkung der starken Topologie echt feiner als die von der Einschränkung der Zerlegungsmajorante erzeugte Topologie ist.

Auf X^+ gibt es also eine Halbnorm q aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_b(Q \mid X^+)$, die nicht gröber als die Halbnorm $\sqrt{P} \mid X^+$ ist. Die Halbnorm $p = \max(\sqrt{P} \mid X^+, q)$ ist echt feiner als die Halbnorm $\sqrt{P} \mid X^+$ und ist auch in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q \mid X^+)$ nach unten halbstetig. Da die Halbnorm p die Bilinearform $Q \mid X^+$ majorisiert, können wir ihre Polare p^π bilden. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt, dass $\sqrt{P} \mid X^+$ eine selbstassoziierte Majorante der Bilinearform $Q \mid X^+ = P \mid X^+$ ist. Korollar 2 von Satz 3 (siehe II.2) besagt, dass die Polare p^π echt gröber als $\sqrt{P} \mid X^+$ ist, da p echt feiner als $\sqrt{P} \mid X^+$

ist. Nach Lemma 5 gibt es eine Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ von P-orthonormalen Vektoren $e_n \in X^+$ mit

$$P(e_m, e_n) = 0 \qquad \text{für} \quad m, n = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad m \neq n$$

und

$$\mathrm{P}(e_n) = 1 \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

so dass für alle $n = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$p^{\pi}(e_n) \leqq 2^{-n} \sqrt{P(e_n)} = 2^{-n}$$

gilt. Wir bezeichnen die zu der Darstellung $X = X^+ \oplus X^-$ gehörende Projektion auf X^+ mit F^+ (siehe III.2). Für alle $x \in X$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt die Ungleichung

$$|P(x, e_n)| = |P(F^+ x, e_n)| \leqq p(F^+ x)\, p^{\pi}(e_n) \leqq 2^{-n}\, p(F^+ x)\,.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \,|\, P(x, e_n)\,|^2$$

ist also für alle $x \in X$ konvergent. Analog finden wir auf X^- eine Folge $(e_{-n})_{n=1}^{\infty}$ von P-orthonormalen Vektoren $e_{-n} \in X^-$ mit

$$P(e_{-n}, e_{-m}) = 0 \qquad \text{für alle} \quad m, n = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad m \neq n$$

und

$$P(e_{-n}) = 1 \qquad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

so dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \,|\, P(x, e_{-n})\,|^2$$

für alle $x \in X$ konvergiert. Da $(X, P) = (X^+, P \,|\, X^+) \oplus (X^-, P \,|\, X^-)$ ist (siehe Satz 7), gilt allgemein die Beziehung

$$P(e_n, e_m) = 0 \qquad \text{für} \quad -\infty < m, n < +\infty \quad \text{und} \quad m \neq n\,.$$

Wir schreiben nun die Bilinearform Q in der Form

$$\begin{aligned}
&Q(x, y)\\
&= Q(x, y) - \sum_{n=1}^{\infty} P(x, e_n)\, P(e_n, y) + \sum_{n=1}^{\infty} P(x, e_{-n})\, P(e_{-n}, y)\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(P(x, e_n) + \sqrt{1-2^{-n}}\, P(x, e_{-n})\right)\left(P(e_n, y) + \sqrt{1-2^{-n}}\, P(e_{-n}, y)\right)\\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\sqrt{1-2^{-n}}\, P(x, e_n) + P(x, e_{-n})\right)\left(\sqrt{1-2^{-n}}\, P(e_n, y) + P(e_{-n}, y)\right)
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in X$. Wir definieren eine quadratische Form R_q durch
$R(x)$

$$= P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} | P(x, e_n) |^2 - \sum_{n=1}^{\infty} | P(x, e_{-n}) |^2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \{ |P(x, e_n) + \sqrt{1-2^{-n}} P(x, e_{-n})|^2 + |\sqrt{1-2^{-n}} P(x, e_n) + P(x, e_{-n})|^2 \}$$

für alle $x \in X$. Nach der Besselschen Ungleichung folgt

$$P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} |P(x, e_n)|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |P(x, e_{-n})|^2 \geqq 0$$

für alle $x \in X$. Die quadratische Form R_q ist also positiv. Man überzeugt sich leicht, dass $|Q(x)| \leqq R(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Mit Hilfe der Polarisationsformel (siehe I.1) folgern wir daraus, dass auch die Ungleichung

$$|Q(x, y)|^2 \leqq R(x) R(y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

gilt (siehe R. Nevanlinna [34] und N. Aronszajn [1]). Wir zeigen, dass $\sqrt{R}$ eine selbstassoziierte Majorante von Q ist. Zu $x \in X$ bilden wir für alle $k = 1, 2, \ldots$ den Vektor

$$z_k = F^+ x - F^- x - \sum_{n=1}^{k} P(x, e_n) e_n + \sum_{n=1}^{k} P(x, e_{-n}) e_{-n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{k} 2^{n+1} \{ (1-2^{-n-1}) P(x, e_n) + \sqrt{1-2^{-n}} P(x, e_{-n}) \} e_n$$

$$- \sum_{n=1}^{k} 2^{n+1} \{ \sqrt{1-2^{-n}} P(x, e_n) + (1-2^{-n-1}) P(x, e_{-n}) \} e_{-n} ,$$

wobei die Projektionen F^+ und F^- wie in Abschnitt III.2 erklärt sind. Für die Folge $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ gilt dann

$$\lim_{k \to \infty} Q(x, z_k) = R(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} R(z_k) = R(x) .$$

Wir erhalten die Gleichung

$$\sqrt{R}^{\pi}(x) = \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R} , \ |Q(x, z)| \leqq \lambda \sqrt{R(z)} \text{ für alle } z \in X \} = \sqrt{R(x)} .$$

Die Halbnorm $\sqrt{R}$ ist eine selbstassoziierte Majorante von Q. Betrachten wir nun die Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ mit

$$x_k = \sqrt{1-2^{-k}} e_k - e_{-k} \qquad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

so erhalten wir

$$\lim_{k \to \infty} R(x_k) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} P(x_k) = 2.$$

Die Majorante $\sqrt{P}$ ist also nicht gröber als die Majorante $\sqrt{R}$. Da beide minimale Majoranten sind, folgt, dass die beiden Majoranten $\sqrt{P}$ und $\sqrt{R}$ nicht vergleichbar sind.

3. *Tonnelierte Skalarprodukträume.* Wir beweisen ein Lemma, aus dem man sofort ersieht, dass in Satz 9 aus der Aussage (iii) die Aussage (iv) folgt.

Lemma 6. *Es sei (X, P) ein linearer Raum mit einer positiven Hermiteschen Bilinearform. Die starke Topologie $\mathfrak{T}_b(P)$ ist dann und nur dann gleich der von der Halbnorm $\sqrt{P}$ erzeugten Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$, wenn der Raum $(X, \mathfrak{T}(\sqrt{P}))$ tonneliert ist (siehe I.3).*

Beweis. Es gelte $\mathfrak{T}(\sqrt{P}) = \mathfrak{T}_b(P)$. Wir müssen zeigen, dass jede in der Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ nach unten halbstetige Halbnorm q gröber als $\sqrt{P}$ ist. Die Halbnorm $p = \max(q, \sqrt{P})$ ist in der Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ nach unten halbstetig. Wir werden beweisen, dass p auch in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ nach unten halbstetig ist. Zu diesem Zweck reicht es zu zeigen, dass die Menge $S(p) = \{ x \mid x \in X, \ p(x) \leqq 1 \}$ in der Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ abgeschlossen ist. Ist $y \in X$ und $y \notin S(p)$, so ist

$$d = \inf \{ P(x-y) \mid x \in S(p) \} > 0,$$

da $S(p)$ in der Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ abgeschlossen ist. Es gibt einen Punkt $x' \in S(p)$, so dass

$$2\sqrt{d'-d} < d \qquad \text{und} \qquad d'-d \leqq 4$$

ist, wobei $d' = P(x'-y)$ ist. Da $S(p)$ konvex ist, folgt

$$P((1-\lambda)\,x' + \lambda\, x - y) \geqq d \qquad \text{für alle} \quad x \in S(p) \quad \text{und} \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 .$$

Daraus folgt für alle $x \in S(p)$ und $0 \leqq \lambda \leqq 1$ die Ungleichung

$$2\,\lambda \operatorname{Re} P(x'-y, x-x') + \lambda^2 P(x-x') \geqq d-d' .$$

Da die Ungleichung $\sqrt{P(x)} \leqq p(x)$ für alle $x \in X$ gilt, können wir weiter abschätzen

$$2\,\lambda \operatorname{Re} P(x'-y, x-x') + 4\,\lambda^2 \geqq d-d'$$

für alle $x \in S(p)$ und $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Für ein $x \in S(p)$ gilt entweder die Ungleichung $\operatorname{Re} P(x'-y, x-x') > 0$, oder wir erhalten die Abschätzung $-4 \leqq \operatorname{Re} P(x'-y, x-x') \leqq 0$. Im zweiten Fall nimmt die linke Seite der obigen Ungleichung ihr Minimum im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ an. In beiden Fällen folgt die Ungleichung

$$\operatorname{Re} P(x'-y, x-x') \geqq -2\sqrt{d'-d} \qquad \text{für alle} \quad x \in S(p) .$$

Es gibt also eine reelle Zahl γ , so dass

$$\operatorname{Re} P(x'-y\,,x) > \gamma > \operatorname{Re} P(x'-y\,,y) \qquad \text{für alle} \quad x \in S(p)$$

gilt. Die reelle Linearform $\operatorname{Re} P(x'-y\,,\,.\,)$ trennt den Punkt y strikt von $S(p)$. Die Menge $S(p)$ ist folglich in der Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ abgeschlossen. Weil die Halbnorm p in der Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ nach unten halbstetig ist, ist p in der Topologie $\mathfrak{T}_b(P)$ stetig. Wegen $\mathfrak{T}_b(P) = \mathfrak{T}(\sqrt{P})$ ist p , und damit auch q , gröber als die Halbnorm $\sqrt{P}$. Der Raum $(X\,,\,\mathfrak{T}(\sqrt{P}\,))$ ist folglich tonneliert.

Wir zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Der Raum $(X\,,\,\mathfrak{T}(\sqrt{P}\,))$ sei tonneliert. Da die Halbnorm $\sqrt{P}$ in der Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ nach unten halbstetig ist, ist die Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ gröber als die starke Topologie $\mathfrak{T}_b(P)$. Eine Halbnorm p aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_b(P)$ ist in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(P)$ nach unten halbstetig. Die Halbnorm p ist auch in der feineren Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ nach unten halbstetig. Da der Raum $(X\,,\,\mathfrak{T}(\sqrt{P}))$ tonneliert ist, ist p gröber als $\sqrt{P}$. Die Topologien $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ und $\mathfrak{T}_b(P)$ sind also gleich.

Wir zeigen nun, dass in Satz 9 aus der Aussage (iv) die Aussage (i) folgt. Die Halbnorm p sei eine minimale Majorante der Bilinearform Q . Dann sind auf X^+ und X^- die Einschränkungen von p feiner als die Einschränkungen der Halbnorm $\sqrt{P}$. Auf Grund des Korollars von Satz 4 können wir annehmen, dass p in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q)$ und folglich auch in der feineren Topologie $\mathfrak{T}(\sqrt{P})$ nach unten halbstetig ist. Ist etwa der Teilraum $(X^+\,,\,\mathfrak{T}(\sqrt{P}\mid X^+))$ tonneliert, so sind auf X^+ die Einschränkungen $p \mid X^+$ und $\sqrt{P} \mid X^+$ äquivalent. Nach Satz 8 sind die beiden minimalen Majoranten p und $\sqrt{P}$ äquivalent. Alle minimalen Majoranten sind äquivalent mit der Majorante $\sqrt{P}$. Aus Satz 5 folgt dann, dass jede Majorante feiner als die Majorante $\sqrt{P}$ ist. Also ist $\sqrt{P}$ eine gröbste Majorante.

Die Hermitesche Bilinearform Q habe eine gröbste Majorante. Wir wollen noch untersuchen, ob bei verschiedenen kanonischen Zerlegungen die in Satz 9 angegebenen Eigenschaften immer auf den Summanden mit gleichem Vorzeichen von Q zutreffen.

Lemma 7. *Es sei* $(X\,,\,Q)$ *ein linearer Raum mit indefiniter Metrik. Es gebe zwei kanonische Zerlegungen*

$$(X\,,\,Q) = (X_i^+\,,\,Q \mid X_i^+) \oplus (X_i^-\,,\,Q \mid X_i^-) \qquad (\, i = 1, 2\,)\,.$$

Die zugehörigen Projektionen F_i^+ *und* F_i^- *und die Zerlegungsmajoranten* P_i *seien wie in Abschnitt III.2 definiert. Wenn die Majoranten* $\sqrt{P_1}$ *und* $\sqrt{P_2}$

äquivalent sind, so liegt der Teilraum $F_2^+(X_1^+)$ *bezüglich der Topologie* $\mathfrak{T}(\sqrt{P_2})$ *dicht in* X_2^+.

Beweis. Wir vervollständigen den Skalarproduktraum (X, P_1) zu einem Hilbertraum (Y, P_1'). Die Bilinearformen Q und P_i und die Projektionen F_i^+ und F_i^- $(i = 1, 2)$ lassen sich stetig auf Y fortsetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzungen mit Q', P_i' und $F_i^{+\prime}$ und $F_i^{-\prime}$. Es gibt also zwei kanonische Zerlegungen

$$(Y, Q') = (Y_i^+, Q \mid Y_i^+) \oplus (Y_i^-, Q \mid Y_i^-) \qquad (i = 1, 2).$$

Die Teilräume Y_i^+ und Y_i^- sind die abgeschlossenen Hüllen der Teilräume X_i^+ bzw. X_i^-. Ju. P. Ginzburg und I. S. Iohvidov haben in [5] für diesen Fall gezeigt, dass $F_2^{+\prime} \mid Y_1^+$ eine stetige, bijektive Abbildung von $(Y_1^+, P_1' \mid Y_1^+)$ auf $(Y_2^+, P_2' \mid Y_2^+)$ ist. Da der Teilraum X_1^+ dicht in Y_1^+ liegt, liegt sein Bild folglich dicht in Y_2^+. Also ist $F_2^+(X_1^+)$ eine dichtliegende Teilmenge von X_2^+.

Satz 10. *Es sei* (X, Q) *ein linearer Raum mit einer indefiniten Metrik. Es gebe zwei kanonische Zerlegungen*

$$(X, Q) = (X_i^+, Q \mid X_i^+) \oplus (X_i^-, Q \mid X_i^-) \qquad (i = 1, 2).$$

Wenn der Teilraum $(X_1^+, \mathfrak{T}(\sqrt{Q} \mid X_1^+))$ *tonneliert ist, so ist auch der Teilraum* $(X_2^+, \mathfrak{T}(\sqrt{Q} \mid X_2^+))$ *tonneliert.*

Beweis. Zu den vorausgesetzten kanonischen Zerlegungen gehören die Projektionen F_i^+ und F_i^- und die Zerlegungsmajoranten P_i. Nach Satz 9 sind P_1 und P_2 äquivalent. Nach Lemma 7 liegt der Teilraum $F_2^+(X_1^+)$ bezüglich der Topologie $T(\sqrt{Q} \mid X_2^+)$ dicht in X_2^+. Es sei q eine nach unten halbstetige Halbnorm auf $(X_2^+, T(\sqrt{Q} \mid X_2^+))$. Die Halbnorm $p = q(F_2^+ \,.\,)$ ist eine nach unten halbstetige Halbnorm auf $(X_1^+, T(\sqrt{Q} \mid X_1^+))$ und folglich gröber als $\sqrt{Q} \mid X_1^+$. Es gilt

$$Q(F_2^+ x) = Q(x) + Q(F_2^- x) \geqq Q(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X_1^+.$$

Auf dem Teilraum $F_2^+(X_1^+)$ ist die Einschränkung der Halbnorm q gröber als die Einschränkung der Norm $\sqrt{Q}$. Da $F_2^+(X_1^+)$ dicht in X_2^+ liegt und q nach unten halbstetig ist, ist auf ganz X_2^+ die Halbnorm q gröber als die Norm $\sqrt{Q} \mid X_2^+$. Der Raum $(X_2^+, T(\sqrt{Q} \mid X_2^+))$ ist also tonneliert.

4. *Q-unitäre Abbildungen.* Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Eine bijektive lineare Abbildung U von X auf sich nennen wir *Q-unitär,* wenn die Gleichung

$$Q(Ux, Uy) = Q(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

gilt. Wir wollen die Stetigkeit einer derartigen Abbildung untersuchen. Für Q-isometrische Abbildungen wird dieselbe Frage in Kapitel V behandelt.

Satz 11.[3]) *Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Die Bilinearform Q besitze eine gröbste Majorante p. Dann ist jede Q-unitäre Abbildung U eine stetige Abbildung des Raumes $(X, \mathfrak{T}(p))$ auf sich.*

Beweis. Auf Grund von Lemma 3 können wir annehmen, dass für die Halbnorm p die Gleichung $p = \max(p^\pi, p_\pi)$ gilt. Dann ist die Halbnorm $p(U\,.) = q$ eine Majorante der Bilinearform Q. Es gilt nämlich

$$|Q(x, y)| = |Q(Ux, Uy)| \leqq p(Ux)\,p(Uy) = q(x)\,q(y)$$

für alle $x, y \in X$. Da U bijektiv ist, erhalten wir für die Polare q^π von q die Gleichung

$$\begin{aligned} q^\pi(x) &= \inf\{\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}, \quad |Q(x, y)| \leqq \lambda\, q(y) \quad \text{für alle } y \in X\} \\ &= \inf\{\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}, \quad |Q(Ux, Uy)| \leqq \lambda\, p(Uy) \quad \text{für alle } y \in X\} \\ &= \inf\{\lambda \mid \lambda \in \boldsymbol{R}, \quad |Q(Ux, y)| \leqq \lambda\, p(y) \quad \text{für alle } y \in X\} \\ &= p^\pi(Ux) \qquad \text{für alle } x \in X. \end{aligned}$$

Analog folgt die Gleichung $q_\pi(x) = p_\pi(Ux)$, für alle $x \in X$. Es folgt,

$$\max(q^\pi(x), q_\pi(x)) = \max(p^\pi(Ux), p_\pi(Ux)) = p(Ux) = q(x),$$

für alle $x \in X$. Auf Grund von Satz 4 ist die Halbnorm q eine minimale Majorante von Q. Die Halbnormen p und q sind äquivalent. U ist eine stetige Abbildung des Raumes $(X, \mathfrak{T}(p))$ auf sich.

5. *Indefinite Metriken auf reflexiven Banachräumen.* Wir untersuchen die in IV.1 für die Existenz einer gröbsten Majorante angegebenen Bedingungen in dem Fall, dass die Bilinearform Q auf einem reflexiven Banachraum stetig ist. Zuvor beweisen wir einen Satz über die starke Topologie einer Bilinearform auf einem Banachraum.

Lemma 8. *Es sei $(X, \|\,.\,\|)$ ein Banachraum und Q eine stetige Bilinearform auf $(X, \|\,.\,\|)$. Die linksseitig starke Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$ wird dann durch die Halbnorm*

$$p_l(x) = \lim_{U \in \mathfrak{U}(x)} \inf\{\|y\| \mid y \in U\}$$

erzeugt, wobei $\mathfrak{U}(x)$ der Umgebungsfilter des Punktes x in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ ist.

[3]) Aus der Arbeit [43] von I. S. Iohvidov geht hervor, dass der analoge Satz für Q-isometrische Abbildungen (siehe V.3 und Satz 15) im allgemeinen nicht richtig ist.

Korollar 1. *Ist* $(X, \|\,.\,\|)$ *ein reflexiver Banachraum und* Q *eine linksseitig nichtausgeartete, stetige Bilinearform auf* $(X, \|\,.\,\|)$, *so ist die Topologie des Banachraumes gleich der linksseitig starken Topologie* $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$.

Korollar 2. *Es sei* $(X, \|\,.\,\|)$ *ein reflexiver Banachraum und* Q *eine stetige indefinite Metrik (siehe I.1) auf* $(X, \|\,.\,\|)$. *Der Raum* (X, Q) *gestatte eine kanonische Zerlegung* $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$. *Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei* P. *Die Halbnorm* $\sqrt{P}$ *ist dann und nur dann eine gröbste Majorante der Bilinearform* Q, *wenn mindestens einer der beiden Räume* $(X^+, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^+))$ *oder* $(X^-, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^-))$ *vollständig ist.*

Beweis von Lemma 8. Eine Halbnorm q aus dem Erzeugendensystem der Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$ ist in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ und folglich auch in der feineren Topologie des Banachraumes nach unten halbstetig. Da Banachräume tonneliert sind (siehe I.3), existiert eine reelle Zahl λ, $0 \leqq \lambda < +\infty$, so dass die Abschätzung

$$q(x) \leqq \lambda \|x\| \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Da die Halbnorm q in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ nach unten halbstetig ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} q(x) &\leqq \liminf_{U \in \mathfrak{U}(x)} \{\, q(y) \mid y \in U \,\} \\ &\leqq \lambda \liminf_{U \in \mathfrak{U}(x)} \{\, \|y\| \mid y \in U \,\} = \lambda\, p_l(x)\,, \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Da die Halbnorm p_l schwach nach unten halbstetig ist, gehört sie zu den erzeugenden Halbnormen der starken Topologie. Es gilt also $\mathfrak{T}_{lb}(Q) = \mathfrak{T}(p_l)$.

Ist die Bilinearform Q auf einem Fréchetraum stetig, so kann man mit der gleichen Methode zeigen, dass die linksseitig starke Topologie $\mathfrak{T}_{lb}(Q)$ metrisierbar ist.

Beweis von Korollar 1. Auf Grund des vorhergehenden Lemmas reicht es zu zeigen, dass $p_l = \|\,.\,\|$ gilt. Äquivalent damit ist, dass die Einheitskugel $S = \{\, x \mid x \in X, \|x\| \leqq 1 \,\}$ in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ abgeschlossen ist. Da der Banachraum $(X, \|\,.\,\|)$ reflexiv ist, ist S in der schwachen Topologie des Banachraumes kompakt. Da Q stetig ist, ist $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ gröber als die schwache Topologie des Banachraumes. Da Q linksseitig nichtausgeartet ist, ist $(X, \mathfrak{T}_{ls}(Q))$ separiert. Der topologische Raum $(S, \mathfrak{T}_{ls}(Q) \mid S)$ ist also kompakt, und S ist in der Topologie $\mathfrak{T}_{ls}(Q)$ abgeschlossen.

Beweis von Korollar 2. Aus Satz 6 und aus Korollar 1 folgt, dass $(X, \mathfrak{T}(\|\,.\,\|)) = (X^+, \mathfrak{T}(\|\,.\,\|) \mid X^+) \oplus (X^-, \mathfrak{T}(\|\,.\,\|) \mid X^-)$ gilt. Aus dem Kriterium (iii) von Satz 9 und aus Korollar 1 ergibt sich Korollar 2.

Ist Q eine stetige Bilinearform auf einem Hilbertraum $(X, (\,.\,|\,.\,))$, so existiert eine beschränkte lineare Transformation A des Hilbertraumes, so dass $Q(x, y) = (A\,x \mid y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Aus der Spektraltheorie der Transformation A ergibt sich der folgende Satz von M. R. Hestenes [7] und R. Nevanlinna [32].

Satz 12. *Es sei Q eine stetige Hermitesche Bilinearform auf dem Hilbertraum $(X, (\,.\,|\,.\,))$. Dann lässt sich der Hilbertraum in drei komplementäre, orthogonale Unterräume X^+, X^-, X° zerlegen, so dass*

$$(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-) \oplus (X^\circ, Q \mid X^\circ)$$

gilt, und $Q_q \mid X^+ > 0$, $Q_q \mid X^- < 0$ und $Q \mid X^\circ = 0$ ist.

Korollar. *Es sei Q eine stetige Hermitesche Bilinearform auf dem Hilbertraum $(X, (\,.\,|\,.\,))$. Ferner sei A die beschränkte lineare Transformation, für die $Q(x, y) = (A\,x \mid y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Die zu der in Satz 12 angegebenen Zerlegung gehörende Zerlegungsmajorante sei P (siehe III.2). Die Halbnorm $\sqrt{P}$ ist dann und nur dann eine gröbste Majorante von Q, wenn es eine reelle Zahl ε, $0 < \varepsilon < +\infty$, gibt, so dass mindestens eines der beiden Intervalle $(-\varepsilon, 0)$ oder $(0, \varepsilon)$ nicht zum Spektrum der Transformation A gehört.*

Beweis des Korollars. Aus Korollar 2 von Satz 11 folgt, dass $\sqrt{P}$ dann und nur dann eine gröbste Majorante ist, wenn mindestens einer der beiden Räume $(X^+, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^+))$ oder $(X^-, \mathfrak{T}(\sqrt{P} \mid X^-))$ vollständig ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn das Spektrum der Transformation A die angegebene Bedingung erfüllt.

V. Quasipositive Bilinearformen

1. *Quasipositive Bilinearformen.* Einen wichtigen Spezialfall der im vorigen Kapitel untersuchten Bilinearformen mit gröbsten Majoranten bildet die Klasse der quasipositiven Bilinearformen. Diese Klasse ist im Zusammenhang mit verschiedenen Fragestellungen schon öfter untersucht worden (siehe M. R. Hestenes [7], I. S. Iohvidov und M. G. Kreĭn [14]—[15], N. Aronszajn [1]). Eine Bilinearform, die eine der Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt, heisst *quasipositiv*.

Satz 13. *Es sei X ein linearer Raum mit einer (indefiniten) Hermiteschen Bilinearform Q. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *Es gibt zwei positive Hermitesche Bilinearformen Q_1 und Q_2 auf X, wobei Q_2 endlichen Rang hat, so dass $Q = Q_1 - Q_2$ gilt. (Der Rang von Q_2 ist gleich dem Defekt (Codimension) des Nullraumes $\mathfrak{N}(Q_2)$ in X (siehe I.1).)*

(ii) *Für alle linearen Teilräume* Y *von* X, *auf denen* $Q_q \mid Y \leqq 0$ *ist, gilt* $\dim Y / \mathfrak{N}(Q) < +\infty$. *(Die Dimensionen von* $Y / \mathfrak{N}(Q)$ *sind dann sogar beschränkt.)*

(iii) *Die quadratische Form* Q_q *ist in der schwachen Topologie* $\mathfrak{T}_s(Q)$ *nach unten halbstetig. (Es reicht, die Halbstetigkeit nach unten im Nullpunkt zu fordern.)*

(iv) *Es gibt eine kanonische Zerlegung von* (X, Q): $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$, *bei der* $\dim X^- / \mathfrak{N}(Q) < +\infty$ *ist. (Man kann die Zerlegung so wählen, dass* $Q_q \mid X^- < 0$ *ist.)*

Auf Grund von Satz 9 folgt aus der Eigenschaft (iv) das Korollar:

Korollar. *Eine quasipositive Bilinearform hat eine gröbste quadratische Majorante.*

Beweis des Satzes. Wir werden die angegebenen Äquivalenzen in der natürlichen Reihenfolge beweisen.

Schluss von (i) auf (ii). Es sei Y ein linearer Teilraum von X, auf dem $Q_q \mid Y \leqq 0$ gilt. Dann gilt für alle $y \in Y$ die Ungleichung $Q_1(y) \leqq Q_2(y)$. Ist $y \in \mathfrak{N}(Q_2) \cap Y$, so folgt $Q_1(y) = 0$. Da die positive Bilinearform $Q_1 + Q_2$ die Bilinearform Q majorisiert, folgt $y \in \mathfrak{N}(Q)$. Es gilt also $\mathfrak{N}(Q_2) \cap Y \subset \mathfrak{N}(Q)$. Wir können abschätzen:

$$\dim Y / \mathfrak{N}(Q) \leqq \dim Y / \mathfrak{N}(Q_2) \leqq \dim X / \mathfrak{N}(Q_2) = \operatorname{Rang} Q_2 < +\infty .$$

Schluss von (ii) auf (iii). Aus der Beziehung

$$Q(x) - Q(y) = Q(x-y) + 2 \operatorname{Re} Q(y, x-y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

ersieht man, dass die quadratische Form Q_q dann und nur dann in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q)$ nach unten halbstetig ist, wenn sie im Nullpunkt in dieser Topologie nach unten halbstetig ist. Ist die quadratische Form nicht im Nullpunkt in der schwachen Topologie nach unten halbstetig, so existiert ein solches gerichtetes System $(x_a)_{a \in A}$, $x_a \in X$, dass $\lim_{a \in A} Q(x_a, y) = 0$ für alle $y \in X$ gilt, aber

$$\liminf_{a \in A} Q(x_a) < 0$$

ist. Wir können annehmen, dass es eine reelle Zahl γ, $-\infty < \gamma < 0$, gibt, so dass

$$Q(x_a) < \gamma \qquad \text{für alle} \quad a \in A$$

gilt. Wir wählen nun einen Index $a_0 \in A$ und bezeichnen x_{a_0} mit y_0. Für alle $a \in A$ bilden wir den Vektor

$$x_a' = x_a - Q(x_a, y_0)\,(Q(y_0))^{-1}\, y_0 .$$

Dann ergibt sich $Q(x_a') = Q(x_a) - |Q(x_a, y_0)|^2\,(Q(y_0))^{-1}$. Von einer Stelle $a_1 \in A$ an gilt also $Q(x_a') = 2^{-1}\gamma < 0$. Wir erklären $A_1 =$

$\{ a \mid a \in A , a \geqq a_1 \}$. Für das gerichtete System $(x'_a)_{a \in A_1}$ gilt dann $\lim_{a \in A_1} Q(x'_a , y) = 0$ für alle $y \in X$ und

$$Q(x'_a) \leqq 2^{-1} \gamma < 0 \qquad \text{für alle} \quad a \in A_1 .$$

Wir können das Verfahren wiederholen und gewinnen eine Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ von Q-orthogonalen Vektoren aus X, für die

$$Q(y_n) \leqq 2^{-n} \gamma < 0 \qquad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots$$

gilt. Wenn wir mit Y die lineare Hülle der Vektoren $y_1 , y_2 , \ldots$ bezeichnen, so gilt $Q_q \mid Y < 0$ und $\dim Y / \mathfrak{N}(Q) = \dim Y = +\infty$. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme.

Schluss von (iii) auf (iv). Da die Bilinearform Q indefinit ist, existiert ein Vektor $e_1 \in X$ mit $Q(e_1) = -1$. Wir betrachten die Menge $Z_1 = \{ z \mid z \in X , Q(z , e_1) = 0 \}$. Ist $Q \mid Z_1$ indefinit, so existiert ein Vektor $e_2 \in Z_1$ mit $Q(e_2) = -1$. Sofern das Verfahren nicht abbricht, gewinnen wir auf diese Weise eine Folge $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ von Q-orthonormalen Vektoren $e_n \in X$ mit $Q(e_n) = -1$. Auf der linearen Hülle Y der Vektoren $e_1 , e_2 , \ldots$ ist die Bilinearform Q negativ definit. Die positive quadratische Form $-Q_q \mid Y$ ist in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q \mid Y)$ nach unten halbstetig. Nach Voraussetzung ist die quadratische Form $Q_q \mid Y$ in der feineren Topologie $\mathfrak{T}_s(Q) \mid Y$ nach unten halbstetig. Die quadratische Form $Q_q \mid Y$ ist also in der schwachen Topologie $\mathfrak{T}_s(Q) \mid Y$ stetig. Nach Satz 1 (siehe I.2) gibt es endlich viele Vektoren $y_1 , \ldots , y_n \in X$, so dass die Abschätzung

$$0 < |Q(y)| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(y , y_i)|^2 \qquad \text{für alle} \quad y \in Y , \ y \neq 0 ,$$

gilt. Aus dieser Ungleichung folgt, dass die Dimension von Y höchstens gleich n ist.

Das Verfahren bricht also bei einer natürlichen Zahl n, $1 \leqq n < +\infty$, ab. Die lineare Hülle Y_n der Vektoren $e_1 , \ldots , e_n$ ist n-dimensional und $Q \mid Y_n$ ist negativ definit. Dann ist der Raum

$$Z_n = \{ z \mid z \in X , \ Q(z , e_i) = 0 \ \text{ für } \ i = 1, \ldots , n \}$$

ein Komplementärraum zu Y_n in X. Es gilt

$$(X , Q) = (Z_n , Q \mid Z_n) \oplus (Y_n , Q \mid Y_n) .$$

Da $Q_q \mid Z_n \geqq 0$ ist, haben wir eine kanonische Zerlegung mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

Schluss von (iv) auf (i). Wir bilden zu der kanonischen Zerlegung $(X , Q) = (X^+ , Q \mid X^+) \oplus (X^- , Q \mid X^-)$ die positiven Bilinearformen Q^+ und Q^- (siehe III.2). Es gilt $Q = Q^+ - Q^-$. Da $X^+ \subset \mathfrak{N}(Q^-)$ und $\mathfrak{N}(Q^-) \subset \mathfrak{N}(Q)$ ist, folgt

$$\text{Rang } Q^- = \dim X / \mathfrak{N}(Q^-) \leqq \dim X^- / \mathfrak{N}(Q) < +\infty .$$

2. *Bilinearformen und Stetigkeit.* R. Nevanlinna hat in der Arbeit [31] zu einer beliebigen Hermiteschen Bilinearform Q eine Topologie eingeführt, die wir mit $\mathfrak{T}_N(Q)$ bezeichnen wollen. Eine Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$ in dieser Topologie wird von allen Mengen der Form

$$\begin{aligned} &U(x \mid \varepsilon, z_1, \ldots, z_n) \\ &= \{ y \mid y \in X , |Q(x-y)| < \varepsilon , \max_{1 \leqq i \leqq n} |Q(x-y, z_i)| < \varepsilon \} \end{aligned}$$

gebildet. Dabei sind $z_1, \ldots, z_n \in X$ und $0 < \varepsilon < +\infty$. Die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ ist die gröbste Topologie auf X, in der die quadratische Form Q_q stetig und die Bilinearform Q partiell stetig ist. Im allgemeinen ist $(X, \mathfrak{T}_N(Q))$ kein topologischer linearer Raum; $\mathfrak{T}_N(Q)$ braucht nämlich nicht mit dem Additionsbegriff des Raumes X verträglich zu sein (siehe G. Köthe [17], Seite 148). Die skalare Multiplikation ist jedoch immer stetig und die Topclogie $\mathfrak{T}_N(Q)$ ist translationsinvariant.

Satz 14. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Hermiteschen Bilinearform Q. Damit die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ mit der linearen Struktur des Raumes X verträglich ist, ist notwendig und hinreichend, dass mindestens eine der beiden Bilinearformen Q oder $-Q$ quasipositiv ist. Die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ wird dann von der gröbsten Majorante von Q erzeugt.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass die Bedingung hinreichend ist. Es sei etwa Q quasipositiv. Die skalare Multiplikation ist stetig. Wir zeigen, dass auch die Addition stetig ist. Da die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ translationsinvariant ist, reicht es, die Stetigkeit der Addition im Nullpunkt nachzuweisen. Wenn die beiden gerichteten Systeme $(x_a)_{a \in A}$ und $(y_b)_{b \in B}$ in der Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ gegen Null konvergieren, so gilt für alle $z \in X$

$$\lim_{a \in A} Q(x_a, z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{a \in A} Q(x_a) = 0 ,$$
$$\lim_{b \in B} Q(y_b, z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{b \in B} Q(y_b) = 0 .$$

Daraus folgt, dass für alle $z \in X$ auch

$$\lim_{(a,b) \in A \times B} Q(x_a + y_b, z) = 0$$

und

$$\lim_{(a,b) \in A \times B} Q(x_a - y_b, z) = 0$$

gilt. Nach der Aussage (iii) von Satz 13 ist die quadratische Form Q_q in der Topologie $\mathfrak{T}_s(Q)$ nach unten halbstetig. Es gilt

$$\liminf_{(a,b) \in A \times B} Q(x_a + y_b) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{(a,b) \in A \times B} Q(x_a - y_b) \geqq 0 .$$

Wir können nun abschätzen:

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \limsup_{(a,b)\in A\times B} Q(x_a+y_b) \\ &\leqq \limsup_{(a,b)\in A\times B} \{Q(x_a+y_b)+Q(x_a-y_b)\} + \limsup_{(a,b)\in A\times B}\{-Q(x_a-y_b)\} \\ &= \limsup_{(a,b)\in A\times B}\{2\,Q(x_a)+2\,Q(y_b)\} - \liminf_{(a,b)\in A\times B} Q(x_a-y_b) \leqq 0\,. \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichungen

$$\lim_{(a,b)\in A\times B} Q(x_a+y_b\,,z) = 0 \qquad \text{für alle} \qquad z\in X$$

und

$$\lim_{(a,b)\in A\times B} Q(x_a+y_b) = 0$$

erhalten. Das gerichtete System $(x_a+y_b)_{(a,b)\in A\times B}$ konvergiert folglich in der Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ gegen Null. Die Addition ist stetig, und $(X\,,\mathfrak{T}_N(Q))$ ist folglich ein topologischer linearer Raum. Die Bedingung ist also hinreichend.

Die Bilinearform Q ist stetig auf dem topologischen linearen Raum $(X\,,\mathfrak{T}_N(Q))$. Nach Satz 1 existiert eine stetige Halbnorm p, die Q majorisiert. Die Topologie $\mathfrak{T}(p)$ ist gröber als die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$. Da die Topologie $\mathfrak{T}_N(Q)$ gröber als jede Topologie ist, in der Q stetig ist, gilt $\mathfrak{T}(p)=\mathfrak{T}_N(Q)$. Die Halbnorm p ist eine gröbste Majorante von Q.

Jetzt werden wir die Notwendigkeit der Bedingung beweisen. Es sei also $(X\,,\mathfrak{T}_N(Q))$ ein topologischer linearer Raum. Wie wir eben bemerkt haben, existiert dann eine Halbnorm p, für die $\mathfrak{T}_N(Q)=\mathfrak{T}(p)$ gilt. Es gibt also endlich viele Vektoren $z_1,\ldots,z_n\in X$ und eine reelle Zahl λ, $0<\lambda<+\infty$, so dass

$$|Q(x)| \leqq (p(x))^2 \leqq \lambda \max_{1\leqq i\leqq n}(|Q(x)|\,,|Q(x\,,z_i)|^2)$$

für alle $x\in X$ gilt. Für den linearen Teilraum

$$Y = \{\,y \mid y\in X\,,\ Q(y\,,z_i)=0 \text{ für } i=1,\ldots,n\,\}$$

von X gilt $\dim X/Y\leqq n$. Für alle $y\in Y$ gilt die Ungleichung

$$|Q(y)| \leqq (p(y))^2 \leqq \lambda\,|Q(y)|\,.$$

Daraus folgt, dass $\mathfrak{N}(Q\mid Y)$ ein linearer Teilraum von Y ist. Gilt $Q(u)>0$ und $Q(v)<0$ für zwei Vektoren $u\,,v\in Y$, so hat die quadratische Gleichung $Q(u+\mu\,v)=0$ zwei verschiedene reelle Nullstellen $\mu_1\,,\mu_2$. Mit $u+\mu_i\,v$ $(i=1,2)$ liegen auch u und v in dem linearen Teilraum $\mathfrak{N}(Q\mid Y)$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme. Die Bilinearform $Q\mid Y$ ist folglich semidefinit.

Ist etwa $Q_q \mid Y \geqq 0$, so gilt für jeden Teilraum Z von X, auf dem $Q_q \mid Z < 0$ ist,

$$\dim Z = \dim Z / Y \leqq \dim X / Y \leqq n < +\infty .$$

Jede Konstruktion einer Familie Q-orthonormaler Vektoren e_i, mit $Q(e_i) = -1$, bricht also nach spätestens n Schritten ab. Wir können das im Beweis von Satz 13 im Schluss von (iii) auf (iv) angegebene Verfahren durchführen und erhalten eine kanonische Zerlegung $(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-)$, bei der die Dimension von X^- kleiner als n ist. Die Bilinearform Q ist quasipositiv. Hiermit ist Satz 14 bewiesen.

3. *Q-isometrische Abbildungen.* Es sei Q eine Bilinearform auf dem linearen Raum X. Eine injektive lineare Abbildung V von X in sich nennen wir *Q-isometrisch*, wenn die Gleichung

$$Q(Vx, Vy) = Q(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

gilt. Wir wollen zeigen, dass der in Abschnitt IV.4 für Q-unitäre Abbildungen gezeigte Satz im Falle einer quasipositiven Bilinearform Q auch für Q-isometrische Abbildungen gilt.

Satz 15. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Hermiteschen quasipositiven Bilinearform. Dann ist jede Q-isometrische Abbildung V eine stetige Abbildung von $(X, \mathfrak{T}_N(Q))$ in sich.*

Beweis. Nach Satz 13 gibt es eine kanonische Zerlegung

$$(X, Q) = (X^+, Q \mid X^+) \oplus (X^-, Q \mid X^-),$$

bei der $Q_q \mid X^- < 0$ und $\dim X^- < +\infty$ ist. Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei P. Da V eine Q-isometrische Abbildung ist, hat der Wertevorrat $\mathfrak{R}(V)$ eine kanonische Zerlegung

$$(\mathfrak{R}(V), Q \mid \mathfrak{R}(V)) = (V(X^+), Q \mid V(X^+)) \oplus (V(X^-), Q \mid V(X^-)) .$$

Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei R'. Die Abbildung V ist dann ein Isomorphismus des Raumes (X, P) auf den Raum $(\mathfrak{R}(V), R')$.

Für jeden linearen Teilraum Y, auf dem $Q_q \mid Y < 0$ ist, gilt $Y \cap X^+ = \{0\}$. Daraus folgt

$$\dim Y = \dim Y / X^+ \leqq \dim X / X^+ = \dim X^- < +\infty .$$

Der Raum Y hat höchstens die gleiche Dimension wie X^-. Da die Abbildung V injektiv ist, und $Q_q \mid V(X^-) < 0$ ist, ist $V(X^-)$ ein maximaler Teilraum, auf dem Q negativ definit ist. Auf dem linearen Teilraum

$$Z = \{ z \mid z \in X, \; Q(z, y) = 0 \text{ für alle } y \in V(X^-) \}$$

ist folglich $Q_q \mid Z \geqq 0$. Da $V(X^-)$ endlichdimensional und $Q \mid V(X^-)$ definit ist, ist Z ein Komplementärraum zu $V(X^-)$ in X . Es gibt also eine kanonische Zerlegung

$$(X\,,Q) = (V(X^-)\,,Q \mid V(X^-)) \oplus (Z\,,Q \mid Z)\,.$$

Die zugehörige Zerlegungsmajorante sei R . Da $V(X^+) \subset Z$ ist, folgt, dass die Einschränkung von R auf $V(X^+)$ gleich R' ist. V ist folglich ein Isomorphismus von $(X\,,P)$ in $(X\,,R)$ und damit eine stetige Abbildung von $(X\,,\mathfrak{T}(\sqrt{P}))$ in den Raum $(X\,,\mathfrak{T}(\sqrt{R}))$. Nach Satz 14 ist aber $\mathfrak{T}(\sqrt{P}) = \mathfrak{T}(\sqrt{R}) = \mathfrak{T}_N(Q)$.

Freie Universität Berlin
Deutschland

Literatur

[1] ARONSZAJN, N.: Quadratic forms on vector spaces. - Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem 1960, The Israel Academy of Sciences and Humanities (Jerusalem Academic Press / Pergamon Press), Jerusalem, 1961, S. 29—87.

[2] BOGNÁR, J.: Non-negativity properties of operators in spaces with indefinite metric. - Colloquium on Mathematical Analysis / Kolloquium über mathematische Analysis, Helsinki 1962, Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 336/10, 1963.

[3] —»— О некоторых соотношениях между свойствами неотрицательности операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Abstract: Some connections between non-negativity properties of operators in spaces with indefinite metric. - Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8, 1963, S. 201—212.

[4] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique. XXIV. (Algèbre. Ch. 9.) Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Actualités Sci. Ind. 1272, Hermann, Paris, 1959.

[5] Гинзбург, Ю. П., und И. С. Иохвидов [YU. P. GINZBURG und I. S. IOKHVIDOV]: Исследования по геометрии бесконечномерных пространсвах с билинейной метрикой. - Успехи Мат. Наук (Нов. Сер.) 17:4 (106), 1962, S. 3—56.

[5′] —»— —»— The geometry of infinite-dimensional spaces with a bilinear metric. - Russian Math. Surveys 17:4, 1962 (1963), S. 1—51. [Englische Übersetzung von [5].]

[6] HALPERIN, I., und W. A. J. LUXEMBURG: Reflexivity of the length function. - Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1957, S. 496—499.

[7] HESTENES, M. R.: Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations. - Pacific J. Math. 1, 1951, S. 525—581.

[8] HILDEBRANDT, S.: Rand- und Eigenwertaufgaben bei stark elliptischen Systemen linearer Differentialgleichungen. - Math. Ann. 148, 1962, S. 411—429.

[9] —»— Über das alternierende Verfahren von Schwarz bei positiv definiten selbstadjungierten Differentialgleichungssystemen. - Colloquium on Mathematical Analysis / Kolloquium über mathematische Analysis, Helsinki 1962, Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 336/2, 1963.

[10] HILDEBRANDT, S., und E. WIENHOLTZ: Constructive proofs of representation theorems in separable Hilbert space. - Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964, S. 369—373.

[11] HÖLDER, E.: Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung. - Jber. Deutsch. Math.-Verein. 62, 1959, S. 34—52.

[12] Hölder, E.: Beweise einiger Ergebnisse aus der Theorie der 2. Variation mehrfacher Extremalintegrale. - Math. Ann. 148, 1962, S. 214—225.

[13] —»— Mit harmonischen Feldern verwandte Differentialformen unter Rand- und Anfangsbedingungen. - Colloquium on Mathematical Analysis / Kolloquium über mathematische Analysis, Helsinki 1962, Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 336/7, 1963.

[14] Иохвидов, И. С., und М. Г. Крейн [I. S. Iohvidov und M. G. Kreĭn]: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I. - Труды Москов. Мат. Общ. 5, 1956, S. 367—432.

[14′] —»— —»— Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. I. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 13, 1960, S. 105—175. [Englische Übersetzung von [14].]

[15] —»— —»— Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II. - Труды Москов. Мат. Общ. 8, 1959, S. 413—496.

[15′] —»— —»— Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. II. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34, 1963, S. 283—373. [Englische Übersetzung von [15].]

[16] Исмагилов, Р. С. [R. S. Ismagilov]: Описание унитарных представлений группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 158, 1964, S. 268—270.

[16′] —»— Description of the unitary representation of the Lorentz group in a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 5, 1964, S. 1217—1219. [Englische Übersetzung von [16].]

[17] Köthe, G.: Topologische lineare Räume. I. - Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 107, Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg, 1960.

[18] Крейн, М. Г. [M. G. Kreĭn]: Об новом одном применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 154, 1964, S. 1023—1026.

[18′] —»— A new application of the fixed-point principle in the theory of operators on a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 5, 1964, S. 224—228. [Englische Übersetzung von [18].]

[19] Крейн, М. Г., und Г. К. Лангер [M. G. Kreĭn und G. K. Langer (H. Langer)]: О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой. - Докл. Акад. Наук СССР 152, 1963, S. 39—42.

[19′] —»— —»— The spectral function of a selfadjoint operator in a space with indefinite metric. - Soviet Math. Dokl. 4, 1963, S. 1236—1239. [Englische Übersetzung von [19].]

[20] Kühne, R.: Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren. - Math. Ann. 154, 1964, S. 56—69.

[21] Langer, H.: Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren. - Math. Ann. 146, 1962, S. 60—85.

[22] —»— Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin. - Math. Ann. 152, 1963, S. 434—436.

[23] Louhivaara, I. S.: Über verschiedene Metriken in linearen Räumen. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 282, 1960.

[24] Наймарк, М. А. [M. A. Naĭmark]: On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric. - Acta Sci. Math. (Szeged) 24, 1963, S. 177—189.

[25] НАЙМАРК, М. А. [M. A. NAÏMARK]: Об унитарных представлениях разрешимых групп в пространствах индефинитной метрикой. [Über unitäre Darstellungen auflösbarer Gruppen in Räumen mit indefiniter Metrik.] - Изв. Акад. Наук СССР Сер. Mat. 27, 1963, S. 1181—1185.

[26] —»— Коммутативные алгебры операторов в пространстве Π_1. [Kommutative Algebren von Operatoren im Raum Π_1.] - Rev. Math. Pures Appl. 9, 1964, S. 499—528.

[27] —»— Об унитарных представлениях группы Лоренца в пространствах с индефинитной метрикой. [Über unitäre Darstellungen der Lorentz-Gruppe in Räumen mit indefiniter Metrik.] - Мат. Сб. 65 (107), 1964, S. 198—211.

[28] —»— О структуре унитарных представлений локально-бикомпактных групп в пространстве Π_1. [Über die Struktur der unitären Darstellungen von lokal bikompakten Gruppen im Raum Π_1.] - Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 29, 2965, S. 689—700.

[29] —»— On unitary group representations in spaces with indefinite metric. - Acta Sci. Math. (Szeged) 26, 1965, S. 201—209.

[30] —»— Kommutative symmetrische Operatorenalgebren in Pontryaginschen Räumen Π_k. - Math. Ann. 162, 1965, S. 147—171.

[31] NEVANLINNA, R.: Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 113, 1952.

[32] —»— Über metrische lineare Räume. III. Theorie der Orthogonalsysteme. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 115, 1952.

[33] —»— Erweiterung der Theorie des Hilbertschen Raumes. - Medd. LundsUniv. Mat. Sem. Supplementband tillägnat Marcel Riesz, 1952, S. 160—168.

[34] —»— Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unterräume. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 163, 1954.

[35] —»— Über metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 222, 1956.

[36] PESONEN, E.: Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 227, 1956.

[37] ПОНТРЯГИН, Л. С. [L. S. PONTRJAGIN]: Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Summary: Hermitian operators in spaces with indefinite metric. - Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 8, 1944, S. 243—280.

[38] SAVAGE, L. J.: The application of vectorial methods to metric geometry. - Duke Math J. 13, 1946, S. 521—528.

[39] SCHEIBE, E.: Über hermitische Formen in topologischen Vektorräumen. I. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 294, 1960.

[40] STENHOLM, S.: On linear equations in a Hilbert space. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 370, 1965.

[41] WITTSTOCK, G.: Über koerzive indefinite Metriken. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 347, 1964.

[42] —»— Über Majoranten indefiniter Bilinearformen. - Inaugural-Dissertation, Freie Universität Berlin, Berlin, 1965.

[43] ИОХВИДОВ, И. С. [I. S. IOHVIDOV]: G-изометрические и J-полуунитарные операторы в Гильбертовом пространстве. [G-isometrische und J-halbunitäre Operatoren in Hilberträumen.] - Успехи Мат. Наук (Нов. Сер.) 20:3 (123), 1965, S. 175—181.