

Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik
 Formelsammlung zum Skriptum Automatisierung

Kapitel 2

Satz 2.3 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) *Es sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ stückweise stetig in t und genüge der Abschätzung (Lipschitz-Bedingung)*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad 0 < L < \infty$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ und alle $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

genau eine Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ besitzt. Dabei wird L auch als Lipschitz-Konstante bezeichnet.

Kapitel 3

Berechnung der Transitionsmatrix für lineare zeitkontinuierliche zeitinvariante Systeme

- (a) Die Dynamikmatrix \mathbf{A} besitzt Eigenwerte λ_j mit $j = 1, \dots, n$, für die gilt, dass die geometrische Vielfachheit g_j und die algebraische Vielfachheit n_j gleich sind. Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix}$$

- (b) Die Dynamikmatrix \mathbf{A} besitzt genau einen Eigenwert λ , für den gilt, dass die geometrische Vielfachheit $g = 1$ und die algebraische Vielfachheit $n > 1$ ist. Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Die Dynamikmatrix \mathbf{A} besitzt die konjugiert komplexen Eigenwertpaare $\lambda_j = \alpha_j + I\beta_j$, $\lambda_j^* = \alpha_j - I\beta_j$ mit $j = 1, \dots, r$, für die gilt, dass die geometrische Vielfachheit g_j und die algebraische Vielfachheit n_j gleich sind.

Reelle Jordansche Normalform:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}$$

Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ -e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t) & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) \\ 0 & 0 & \cdots & -e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t) & e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t) \end{bmatrix}$$

Satz 3.2 (Reelle Jordansche Normalform) *Es sei die reellwertige $(n \times n)$ -Matrix \mathbf{A} die Dynamikmatrix eines linearen, zeitinvarianten Systems. Angenommen, \mathbf{A} habe k reelle und $(n - k) / 2$ konjugiert komplexe Eigenwerte. Dann existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form*

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_{k+1}), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, \operatorname{Re}(\mathbf{v}_r), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_r)]$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren \mathbf{v}_j , $j = 1, \dots, r$ mit $r = (n + k) / 2$ so, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems folgende Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_l \end{bmatrix}$$

annimmt. Dabei bezeichnen \mathbf{J}_i , $i = 1, \dots, l$ die so genannten Jordanblöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte λ_i in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte $\alpha_i \pm I\beta_i$ in der Form

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W} & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist.

Realisierungsproblem

$$\text{Übertragungsfunktion } G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

(a) Realisierung als 1-te Standardform oder Steuerbarkeitsnormalform

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{[\tilde{b}_0 \ \tilde{b}_1 \ \cdots \ \tilde{b}_{n-2} \ \tilde{b}_{n-1}]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{d} u \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

(b) Realisierung als 2-te Standardform oder Beobachtbarkeitsnormalform

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \\ y &= \underbrace{[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]}_{\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{d} u \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{b}_i = b_i - a_i b_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Schaltungstechnische Realisierung einiger Übertragungsfunktionen

In Abbildung 3.1 ist eine Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung gezeigt.

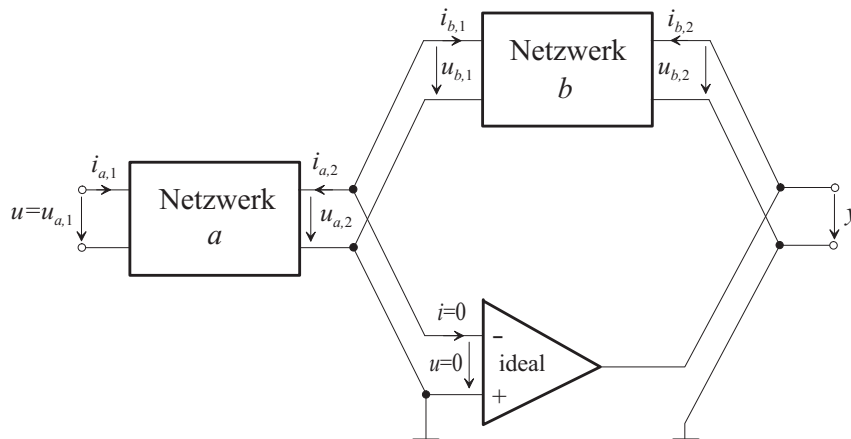


Abbildung 3.1: Operationsverstärkerschaltung in Vierpoldarstellung.

Die Übertragungsfunktion vom Eingang u zum Ausgang y lautet

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{u}_{b,2}}{\hat{u}_{a,1}} = \frac{\hat{i}_{b,1}}{Y_{b,12}(s)} \frac{Y_{a,21}(s)}{\hat{i}_{a,2}} = -\frac{Y_{a,21}(s)}{Y_{b,12}(s)}.$$

Da passive RLC -Netzwerke reziprok sind, gilt allgemein, dass die Admittanzmatrix symmetrisch ist, d.h. $Y_{12}(s) = Y_{21}(s)$. Der nachfolgenden Tabelle sind die Leitwerte einiger Netzwerke zu entnehmen, womit sich verschiedene Übertragungsfunktionen als Operationsverstärkerschaltung realisieren lassen.

Schaltung	Y_{12}	Koeff.	Schaltung	Y_{12}	Koeffizienten
	$-\frac{1}{R}$			$-\frac{V}{(1+sT)}$	$V = \frac{1}{2R}$ $T = \frac{RC}{2}$
	$-sC$			$-V \frac{1+sT}{1+s\eta T}$ $\eta < 1$	$V = \frac{1}{R_1}$ $T = (R_1 + R_2)C$ $\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
	$-V(1+sT)$	$V = \frac{1}{R}$ $T = RC$		$-V \frac{1+s\eta T}{1+sT}$ $\eta < 1$	$V = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1R_2}$ $T = \frac{R_1C}{2}$ $\eta = \frac{2R_1}{2R_1 + R_2}$

Kapitel 4

Satz 4.3 (Routh-Hurwitz Verfahren) Ein Polynom $n(s)$ der Form

$$n(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j$$

mit den reellen Koeffizienten $a_j, j = 0, \dots, n$, ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh-Schemas

s^n	$a_{01} = a_n$	$a_{02} = a_{n-2}$	$a_{03} = a_{n-4} \dots$
s^{n-1}	$a_{11} = a_{n-1}$	$a_{12} = a_{n-3}$	$a_{13} = a_{n-5} \dots$
s^{n-2}	a_{21}	a_{22}	$a_{23} \dots$
s^{n-3}	a_{31}	a_{32}	$a_{33} \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
s^1	$a_{n-1,1}$	0	0 \dots
s^0	$a_{n,1}$		
	<i>Pivotspalte</i>		

mit

$$a_{ij} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n \quad \text{und } j = 1, 2, \dots$$

von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen besitzen.

Satz 4.4 (Kriterium von Michailov) Ein Polynom $n(s)$ vom Grad n ist genau dann ein Hurwitzpolynom, wenn

$$\Delta \arg (n(I\omega)) = n\pi$$

gilt.

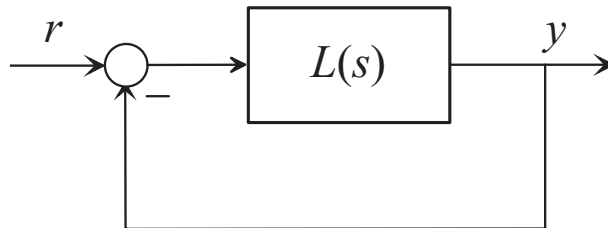


Abbildung 4.2: Geschlossener Regelkreis.

Satz 4.5 (Nyquist-Kriterium) Der geschlossene Regelkreis $T_{r,y}(s)$ nach Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ ist genau dann BIBO-stabil, wenn die stetige Winkeländerung von $1 + L(s)$ folgender Bedingung

$$\Delta \arg (1 + L(I\omega)) = (\max(\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L)) \pi$$

genügt.

Satz 4.6 (Nyquist-Kriterium in Frequenzkennliniendarstellung) *Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ in folgender Form*

$$L(s) = \frac{V z_L(s)}{s^\rho n_L(s)} \exp(-sT_t) \quad , \quad z_L(0) = n_L(0) = 1$$

mit den teilerfremden Polynomen $z_L(s)$ und $s^\rho n_L(s)$ darstellen lässt, wobei nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

- (A) *Der Verstärkungsfaktor V und die Totzeit T_t sind positiv,*
- (B) *$\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$,*
- (C) *das Polynom $n_L(s)$ ist ein Hurwitzpolynom und für ρ gilt $\rho \in \{0, 1, 2\}$,*
- (D) *die Betragskennlinie von $L(I\omega)$ weist genau einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie (eine Durchtrittsfrequenz ω_C) auf bzw. die Ortskurve von $L(I\omega)$ schneidet den Einheitskreis genau einmal und*
- (E) *im Bereich $|L(I\omega)|_{dB} \geq 0$ gelte $-540^\circ < \arg(L(I\omega)) < 180^\circ$ (d.h. die Ortskurve des offenen Kreises $L(s)$ kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Nullpunkt höchstens einmal vollständig umkreisen).*

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis nach Abbildung 4.2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ genau dann BIBO-stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz $\arg(L(I\omega_C))$ zu $-\pi$, die so genannte Phasenreserve Φ ,

$$\Phi = \arg(L(I\omega_C)) + \pi$$

positiv ist.

Kapitel 5

Lead-Lag-Reglerentwurf

- (a) Ein Lead-Glied besitzt eine Übertragungsfunktion der Form

$$R_{Lead}(s) = \frac{1 + sT_{Lead}}{1 + s\eta_{Lead}T_{Lead}} \quad , \quad 0 < \eta_{Lead} < 1 \quad .$$

Will man eine maximale Phasenhebung von $\Delta\varphi_{Lead}$ an der Stelle ω_C erreichen, so berechnen sich die Koeffizienten T_{Lead} und η_{Lead} zu

$$\eta_{Lead} = 1 + 2 \tan(\Delta\varphi_{Lead}) \left(\tan(\Delta\varphi_{Lead}) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi_{Lead}) + 1} \right) \quad ,$$

$$T_{Lead} = \frac{1}{\sqrt{\eta_{Lead}\omega_C}} \quad .$$

- (b) Ein Lag-Glied besitzt eine Übertragungsfunktion der Form

$$R_{Lag}(s) = \frac{1 + sT_{Lag}}{1 + s\eta_{Lag}T_{Lag}} \quad , \quad \eta_{Lag} > 1 \quad .$$

Will man eine Betragsabsenkung um Δa_{Lag} und eine Phasenabsenkung um $\Delta\varphi_{Lag}$ an der Stelle ω_C erreichen, so berechnen sich die Koeffizienten T_{Lag} und η_{Lag} zu

$$T_{Lag} = \frac{\Delta a_{Lag} \sqrt{1 + \tan^2(\Delta\varphi_{Lag})} - 1}{\omega_C \tan(\Delta\varphi_{Lag})},$$

$$\eta_{Lag} = \frac{\omega_C T_{Lag} - \tan(\Delta\varphi_{Lag})}{\omega_C T_{Lag} (1 + \omega_C T_{Lag} \tan(\Delta\varphi_{Lag}))}.$$

Kapitel 6

Satz 6.8 (Jury Verfahren) Ein Polynom $n(z)$ der Form $n(z) = a_0 z^0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ mit den reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, \dots, n$ und $a_n > 0$ ist genau dann ein Einheitskreispolynom, wenn alle Elemente $a_{j,n}$, $j = 0, \dots, n$ der ersten Spalte der nachfolgenden Tabelle

z^n	$a_{n,n} = a_n$	$a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$\dots a_{n,1} = a_1$	$a_{n,0} = a_0$	
	$a_{n,0} = a_0$	$a_{n,1} = a_1$	$\dots a_{n,n-1} = a_{n-1}$	$a_{n,n} = a_n$	$\lambda_n = \frac{a_{n,0}}{a_{n,n}}$
z^{n-1}	$\underbrace{a_{n,n} - \lambda_n a_{n,0}}_{a_{n-1,n}}$	$\underbrace{a_{n,n-1} - \lambda_n a_{n,1}}_{a_{n-1,n-1}}$	$\dots \underbrace{a_{n,1} - \lambda_n a_{n,n-1}}_{a_{n-1,1}}$	0	
	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$\dots a_{n-1,n}$	0	$\lambda_{n-1} = \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n}}$
z^{n-2}	$\underbrace{a_{n-1,n} - \lambda_{n-1} a_{n-1,1}}_{a_{n-2,n}}$	$\underbrace{a_{n-1,n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-1,2}}_{a_{n-2,n-1}}$	$\dots 0$	0	
	$a_{n-2,2}$	$a_{n-2,3}$	$\dots 0$	0	$\lambda_{n-2} = \frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,n}}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
	$a_{0,n}$	0			

positiv sind. Wenn keines der $a_{j,n}$, $j = 0, \dots, n$, identisch Null ist, dann ist die Anzahl der negativen $a_{j,n}$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $n(z)$ außerhalb des Einheitskreises.

Zeitverschiebung

Für kausale Zeitfunktionen $f(t)$ und $n \in \mathbb{N}_+$ gilt allgemein

$$\mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) e^{-nsT_a} \right) = z^{-n} \mathbf{Z} \left(\hat{f}(s) \right).$$

Pole im Tustin-Bereich

Sei $s_i = a$ ein Pol von $G(s)$, dann besitzt die zugehörige Übertragungsfunktion $G^\#(q)$ den Pol

$$q_i = A = \frac{2}{T_a} \tanh \left(\frac{T_a}{2} a \right).$$

Setzt man für $a = \alpha + I\omega$ ein, so erhält man

$$A = \frac{2 \sinh(T_a \alpha) + I \sin(T_a \omega)}{T_a \cosh(T_a \alpha) + \cos(T_a \omega)}.$$

Korrespondenzen zur q -Übertragungsfunktion

$G(s)$	$G^\#(q)$
1	1
$\frac{1}{s}$	$\frac{1 - q^{\frac{T_a}{2}}}{q}$
$\frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{1 + \frac{q}{A}}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{q^2}$
$\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)^2}$	$\frac{\left(1 - \frac{T_a}{2}q\right)\left(1 + \frac{q}{B}\right)}{\left(1 + \frac{q}{A}\right)^2}$ mit $A = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}a\right)$, $B = \frac{A}{1 + aA\frac{T_a^2}{4} - \frac{a}{A}}$

Kapitel 7

Satz 7.12 (PBH-Eigenvektortest) *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

der Ordnung n ist genau dann nicht vollständig erreichbar, wenn ein Vektor $\mathbf{w}_i^T \neq \mathbf{0}^T$ so existiert, dass gilt

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{b} = 0 .$$

Man beachte, dass \mathbf{w}_i^T ein Linkseigenvektor der Matrix \mathbf{A} ist.

Das System ist genau dann nicht vollständig beobachtbar, wenn ein Vektor $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ so existiert, dass gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v}_i = 0 .$$

Der Vektor \mathbf{v}_i entspricht einem (Rechts)eigenvektor der Matrix \mathbf{A} .

Satz 7.13 (PBH-Rangtest) *Das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

ist genau dann vollständig erreichbar, wenn gilt

$$\text{rang}[s\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = n$$

für alle s der komplexen Ebene.

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{E} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n$$

für alle s der komplexen Ebene.

Kapitel 8

Satz 8.1 (Satz von Cayley-Hamilton) *Bezeichnet*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

das charakteristische Polynom der Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann genügt Φ der Beziehung

$$p(\Phi) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \Phi + \dots + a_{n-1} \Phi^{n-1} + \Phi^n = \mathbf{0} .$$

Satz 8.2 (Formel von Ackermann) *Gegeben sei das Abtastsystem*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad , \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k . \end{aligned} \tag{8.1}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ_g des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{(\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T)}_{\Phi_g} \mathbf{x}_k + \Gamma g r_k \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= (\mathbf{c}^T + d \mathbf{k}^T) \mathbf{x}_k + d g r_k \end{aligned}$$

können genau dann durch eine Zustandsrückführung der Form

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + g r_k$$

beliebig platziert werden, wenn das Abtastsystem (8.1) vollständig erreichbar ist. Der Rückführungsvektor \mathbf{k}^T berechnet sich nach der Beziehung

$$\begin{aligned} \underbrace{[0, 0, \dots, 1]}_{\mathbf{e}_n^T = \Gamma_R^T} &= \mathbf{v}_1^T \underbrace{[\Gamma, \Phi \Gamma, \Phi^2 \Gamma, \dots, \Phi^{n-1} \Gamma]}_{\mathcal{R}(\Phi, \Gamma)} \\ \mathbf{k}^T &= -p_0 \mathbf{v}_1^T - p_1 \mathbf{v}_1^T \Phi - \dots - p_{n-1} \mathbf{v}_1^T \Phi^{n-1} - \mathbf{v}_1^T \Phi^n = -\mathbf{v}_1^T p_{g, \text{soll}}(\Phi) \end{aligned}$$

mit $p_{g, \text{soll}}(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n$ als gewünschtes charakteristisches Polynom des geschlossenen Kreises.

Will man erreichen, dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_0$$

mit der Sprungfolge $(r_k) = r_0 (1^k) = (r_0, r_0, r_0, \dots)$ als Eingangsgröße, so ergibt sich der Vorfaktor g in der Form

$$g = \frac{1}{(\mathbf{c}^T + d \mathbf{k}^T) (\mathbf{E} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \Gamma + d} .$$

Satz 8.5 (Formel von Ackermann für den Zustandsbeobachterentwurf) Die Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ_e des Fehlersystems

$$\mathbf{e}_{k+1} = \underbrace{(\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)}_{\Phi_e} \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

eines vollständigen Beobachters der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}} (\hat{y}_k - y_k) \quad , \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k \end{aligned}$$

zum Abtastsystem (8.1) können genau dann durch $\hat{\mathbf{k}}$ beliebig platziert werden, wenn das System vollständig beobachtbar ist. Der Vektor $\hat{\mathbf{k}}$ berechnet sich nach der Beziehung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \Phi)} \hat{\mathbf{v}}_1$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\hat{p}_0 \hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{p}_1 \Phi \hat{\mathbf{v}}_1 - \dots - \hat{p}_{n-1} \Phi^{n-1} \hat{\mathbf{v}}_1 - \Phi^n \hat{\mathbf{v}}_1 = -\hat{p}_{g, \text{soll}}(\Phi) \hat{\mathbf{v}}_1$$

mit $\hat{p}_{g, \text{soll}}(z) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 z + \hat{p}_2 z^2 + \dots + \hat{p}_{n-1} z^{n-1} + z^n$ als gewünschtes charakteristisches Polynom der Dynamikmatrix Φ_e des Fehlersystems.

Allgemeine Formeln

Eigenschaften der Laplace-Transformation

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$

II. Ähnlichkeitssatz:

Zeitbereich: $f(at) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich: $\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

III. Erster Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t-a) \sigma(t-a) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich: $e^{-as} \hat{f}(s)$

IV. Zweiter Verschiebungssatz:

Zeitbereich: $f(t+a) \quad , \quad a > 0$

Bildbereich: $e^{as} \left(\hat{f}(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt \right)$

V. Dämpfungssatz:

Zeitbereich: $e^{-ct} f(t)$, $c \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $\hat{f}(s + c)$

VI. Differentiation:

Zeitbereich: $\frac{d}{dt} f(t) = \dot{f}(t)$

Bildbereich: $s \hat{f}(s) - f(+0)$

bzw.

Zeitbereich: $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$

Bildbereich: $s^n \hat{f}(s) - f(+0) s^{n-1} - f^{(1)}(+0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$

VII. Integration:

Zeitbereich: $\int_0^t f(\tau) d\tau$

Bildbereich: $\frac{1}{s} \hat{f}(s)$

VIII. Umkehrung zu VI:

Zeitbereich: $(-t)^n f(t)$

Bildbereich: $\frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$

IX. Umkehrung zu VII:

Zeitbereich: $\frac{1}{t} f(t)$

Bildbereich: $\int_s^\infty \hat{f}(\sigma) d\sigma$

X. Faltungssatz:

Zeitbereich: $(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$

Bildbereich: $\hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$

XI. Periodische Funktionen:

Zeitbereich: $f(t + T) = f(t)$

Bildbereich: $\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$

XII. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

Anfangswertsatz: $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$

Endwertsatz: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s)$

Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nummer	Zeitbereich $f(t)$	Bildbereich $\hat{f}(s)$
I.	$\delta(t)$	1
II.	$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
III.	t	$\frac{1}{s^2}$
IV.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
V.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
VI.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
VII.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
VIII.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
IX.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Tabelle 8.1: Laplace-Korrespondenztafel einiger wichtiger Funktionen.

Eigenschaften der z-Transformation

I. Linearität:

Zeitbereich: $c_1 (f_{1,k}) + c_2 (f_{2,k})$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Bildbereich: $c_1 f_{1,z}(z) + c_2 f_{2,z}(z)$

II. Erster Verschiebungssatz (Rechtsverschiebung):

Zeitbereich: (f_{k-n}) , $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^{-n} \left(f_z(z) + \sum_{j=1}^n f_{-j} z^j \right)$ bzw. (f_{k-n}) , $n \in \mathbb{N}_+$
 $z^{-n} f_z(z)$ für $f_j = 0, j < 0$

III. Zweiter Verschiebungssatz (Linksverschiebung):

Zeitbereich: (f_{k+n}) , $n \in \mathbb{N}_+$

Bildbereich: $z^n \left(f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j} \right)$

IV. Dämpfungssatz:

Zeitbereich: $(c^k f_k)$, $c \in \mathbb{C}$ und $c \neq 0$

Bildbereich: $f_z \left(\frac{z}{c} \right)$

V. Differenzenbildung (Vorwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_{k+1} - f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } (z - 1) f_z(z) - z f_0$$

VI. Differenzenbildung (Rückwärtsdifferenz):

$$\text{Zeitbereich: } (f_k - f_{k-1})$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z-1}{z} f_z(z) - f_{-1}$$

VII. Summenbildung:

$$\text{Zeitbereich: } \left(\sum_{j=0}^k f_j \right)$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{z}{z-1} f_z(z)$$

VIII. Umkehrung zu V bzw. VI:

$$\text{Zeitbereich: } (k T_a f_k)$$

$$\text{Bildbereich: } -T_a z \frac{d}{dz} f_z(z)$$

IX. Umkehrung zu VII:

$$\text{Zeitbereich: } 0 \text{ für } k = 0 \text{ und } \left(\frac{f_k}{k T_a} \right) \text{ für } k > 0$$

$$\text{Bildbereich: } \frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{f_z(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

X. Faltungssatz:

$$\text{Zeitbereich: } (f_{1,k}) * (f_{2,k}) = \sum_{j=0}^k f_{1,k-j} f_{2,j} = \sum_{j=0}^k f_{1,j} f_{2,k-j}$$

$$\text{Bildbereich: } f_{1,z}(z) f_{2,z}(z)$$

XI. Grenzwertsätze: (nur anwendbar, wenn die Grenzwerte auch existieren)

$$\text{Anfangswertsatz: } f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f_z(z)$$

$$\text{Endwertsatz: } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f_z(z)$$

Nr.	s-Bildbereich $\hat{f}(s)$	Zeitbereich $f(t)$	Abtastfolgen (f_k)	z-Bildbereich $f_z(z)$
I.	1	$\delta(t)$	$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$	1
II.	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	(1^k)	$\frac{z}{z-1}$
III.	$\frac{1}{s^2}$	t	(kT_a)	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
IV.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	(e^{akT_a})	$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
V.	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$((kT_a)^n e^{akT_a})$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT_a}}$
VI.	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$	$(\sin(bkT_a))$	$\frac{z \sin(bT_a)}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VII.	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$	$(\cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - \cos(bT_a))}{z^2 - 2z \cos(bT_a) + 1}$
VIII.	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \sin(bt)$	$(e^{akT_a} \sin(bkT_a))$	$\frac{ze^{aT_a} \sin(bT_a)}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$
IX.	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$(e^{akT_a} \cos(bkT_a))$	$\frac{z(z - e^{aT_a} \cos(bT_a))}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(bT_a) + e^{2aT_a}}$

Tabelle 8.2: Korrespondenztabelle einiger wichtiger Funktionen.

Einige trigonometrische Beziehungen

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$