

• Der Absorptionskoeffizient

• Chemische Zusammensetzung

("Häufigkeiten", engl.: abundances)

Definition:  $X_k :=$  Massenbruchteil, der auf das Element "k" entfällt  
(engl.: mass fraction)

Normierung: Massenerhaltung  $\Rightarrow \sum_k X_k = 1$

Beispiel: solare Häufigkeiten

$$\left. \begin{array}{l} X_H = 0.71 \\ Y = X_{He} = 0.28 \\ X_C = 0.002 \\ X_N = 0.0007 \\ X_O = 0.006 \end{array} \right\} \approx 1\%$$

Definition: Teilchenzahl-Dichte  $N_k$

$N_k :=$  Zahl von Atomen des Elements "k" pro Volumen einheit [Dimension z.B.:  $\text{cm}^{-3}$ ]

Zusammenhang mit Massendichte  $\rho$ :

$$X_k \rho = A_k m_H \cdot N_k$$

$A_k m_H =$  Massenzahl  $\cdot$  atom. Masseneinheit = Atomgewicht

Rechtung: Angabe von chem. Häufigkeiten (leider!) oft als Teilchenzahl - Bruchteile, z. B.  $N_k / N_H$  = Wasserstoff ...

• Besetzungszahlen

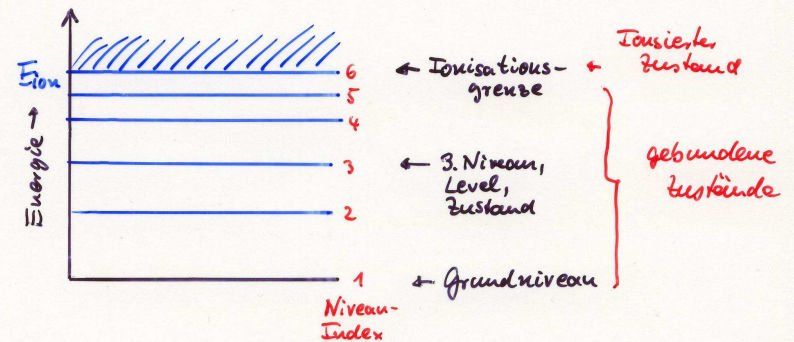
(auch: Niveau bevölkerungen, engl.: population numbers)

Definition: Besetzungszahl  $n_i$

$n_i :=$  Anzahldichte (pro Volumen einheit) derjenigen Atome (des betrachteten Elements "k"), die sich im Zustand "i" befinden

Normierung (Massenerhaltung):  $\sum_i n_i = N_k$

"Modell-Atom"



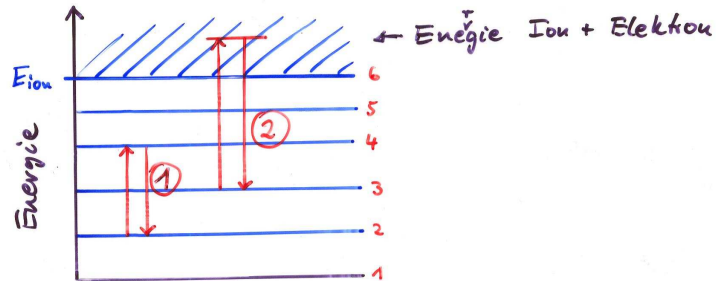
- Jedem Zustand entspricht eine Energie  $E_i$
- In der Praxis:
  - Beschränkung auf endliche Zahl von Niveaus
  - Vernachlässigung bestimmter Niveau-Aufspaltungen

## • Übergänge

IV. 29 4-59

Atome können von einem Zustand in einen anderen Zustand übergehen durch

- (inelastischen) Stoß mit einem anderen Teilchen
- Absorption / Emission von Strahlung



## • Statistisches Gleichgewicht

IV. 30 4-61

= allgemeiner Fall, sog. Non-LTE

[LTE = Local Thermodynamical Equilibrium]

Forderung nach Stationarität  $\Rightarrow$

für jedes Niveau stehen die Zu- und Abgänge in einem Fließ-Gleichgewicht

d.h. Berechnung der Besetzungszahlen

erfordert Kenntnis des Strahlungsfeldes  
(welches wiederum nur aus gegebenen  $n_i$  folgt!)

## ① Gebunden - Gebunden - Übergänge

4-60

engl. bound-bound (b-b) transitions

- inelastischer / superelastischer Stoß
- Absorption / Emission eines Quants mit Frequenz  $h\nu = E_{up} - E_{low}$   
 $\hat{=}$  Spektrallinie

## ② Gebunden - Frei - Übergänge (bound-free, b-f)

- Stoß-Ionisation / -Rekombination



Rekombination: 3-Körper-Stoß,  $e^-$  trägt Energie weg!

- Photo-Ionisation / -Rekombination

Absorption / Emission eines Quants mit  $h\nu > E_{ion}$

## • Lokales Thermodynamisches Gleichgewicht

4-62

= LTE: Näherung unter 2 Voraussetzungen:

- Die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen ist im Thermodynamischen Gleichgewicht

(Zustand maximaler Entropie: Maxwell-Verteilung, nur abhängig von der lokalen Temperatur  $T$ )  
- ist in Sternatmosphären stets erfüllt -

- (hinreichende, nicht notwendige Bedingung):

Bei den Übergangsprozessen dominieren die Stoßprozesse über die Strahlungsprozesse

Wenn 1) und 2)  $\Rightarrow$  "LTE", d.h.:

IV. 31

4-63

die Besetzungszahlen stehen im thermodynamischen Gleichgewicht, entsprechend der lokalen Temperatur.

Statistische Mechanik: Zustand maximaler Entropie

$\Rightarrow$

- Besetzung zweier Zustände  $n_{up}, n_{low}$  desselben Ions:

BOLTZMANN - FORMEL:

$$\frac{n_{up}}{n_{low}} = \frac{g_{up}}{g_{low}} \cdot \exp\left\{-\frac{E_{up} - E_{low}}{kT}\right\}$$

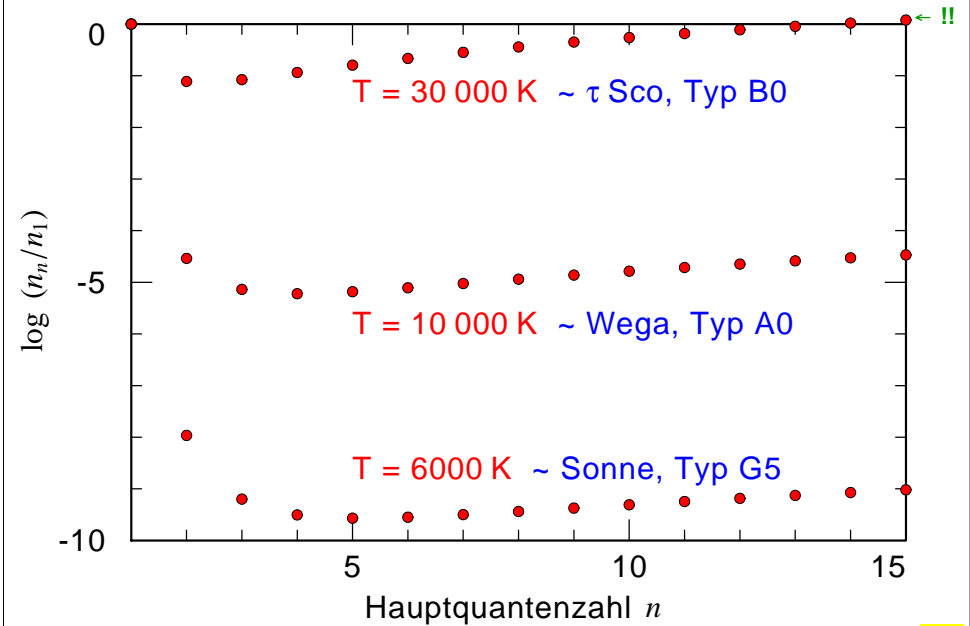
$g_i$  = "statistisches Gewicht des Zustands  $i$ "

$\hat{=}$  Entartungsgrad, z.B. beim Wasserstoff:

$$g_i = 2 \cdot (\text{Hauptquantenzahl})^2$$

## Beispiel: LTE-Besetzungszahlen für Wasserstoff

4-65



- ...  $n_{up}, n_{low}$  aus aufeinanderfolgenden Ionisationsstufen:

SAHA - GLEICHUNG

$$\frac{n_{up}}{n_{low}} = \frac{1}{n_e} T^{\frac{3}{2}} C^{-1} \frac{g_{up}}{g_{low}} \exp\left\{-\frac{E_{up} - E_{low}}{kT}\right\}$$

$n_e$  = Anzahldichte der freien Elektronen

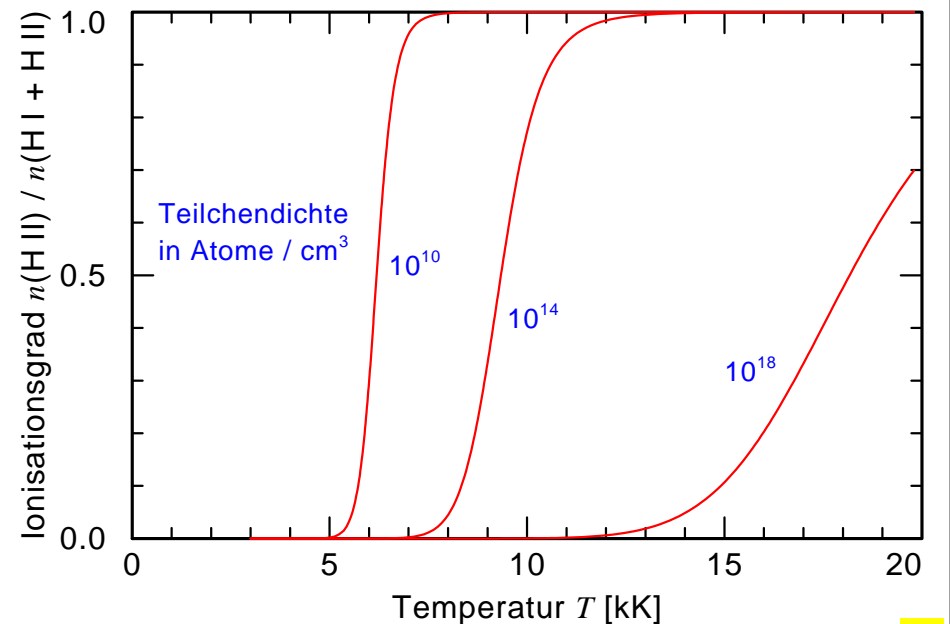
$$C = 2.07 \cdot 10^{-16} \text{ [cgs]}$$

Vergleiche "Massenwirkungsgesetz" für chemische Dissoziation:

$$\frac{n_{up} \cdot n_e}{n_{low}} = f(T) \quad !$$

## Beispiel für Saha-Gl.: Ionisationsgrad von Wasserstoff

4-66



- Absorptionskoeffizient / Emissivität  
und Besetzungszahlen

• Def.: Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{lu}(\nu)$ :

$l = \text{low} \rightarrow u = \text{up}$ , b-b oder b-f-Übergang

$$\alpha_{lu}(\nu) = \sigma_{lu}(\nu) \cdot n_{\text{low}}$$

Opazität = Querschnitt  $\times$  Anzahldichte

Dimension von  $\sigma_{lu}$ : Fläche

typische Größenordnung:  $10^{-18} \text{ cm}^2$

$\sigma_{lu}(\nu)$  ist eine Eigenschaft des betrachteten Atoms!

- Emissivität

- nur spontane Emission

$$\eta_{\nu}^{lu} \propto \sigma_{lu}(\nu) n_{\text{up}}$$

$$\text{genauer: } \eta_{\nu}^{lu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_{\text{low}}}{g_{\text{up}}} \sigma_{lu}(\nu) n_{\text{up}}$$

- Quellfunktion

für nur einen Übergang:  $l \leftrightarrow u$ , z.B. bound-bound:

$$S_{\nu}^{lu} = \frac{\eta_{\nu}^{lu}}{\sigma_{lu}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\frac{g_{\text{low}}}{g_{\text{up}}} n_{\text{up}}}{n_{\text{low}} - \frac{g_{\text{low}}}{g_{\text{up}}} n_{\text{up}}}$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} \frac{n_{\text{low}}}{n_{\text{up}}} - 1 \right]^{-1}$$

d.h. nur abhängig von den Besetzungszahlen!

- Induzierte Emission:

induziert emittierte Energie  $\propto$  zu  $I_{\nu}$ , wie Absorption!  
deshalb in der Transportgleichung als negative Absorption

$$\alpha_{lu}(\nu) = \sigma_{lu}(\nu) \left[ n_{\text{low}} - \frac{g_{\text{low}}}{g_{\text{up}}} n_{\text{up}} \right]$$

- Opazitäten bzw. Emissionskoeffizienten  
verschiedener Übergangsprozesse addieren sich:

$$\alpha_{\text{gesamt}}(\nu) = \sum_{\text{Elemente}} \sum_{\text{low}} \sum_{\text{up} > \text{low}} \alpha_{lu}(\nu)$$

$\eta_{\nu}$  analog ...

Wenn LTE  $\Rightarrow n_i$  nach BOLTZMANN (IV.31)

$$\Rightarrow S_{\nu}^{lu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp\left\{ \frac{h\nu}{kT} \right\} - 1 \right]^{-1} = B_{\nu}(T) \text{ wie LTE!}$$

... analog für b-f-Übergänge

- gilt für alle Übergänge  $\Rightarrow$  auch  $S_{\nu}^{\text{gesamt}} = B_{\nu}(T)$

Also:

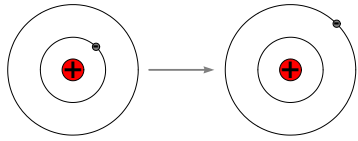
$$\text{LTE} \Leftrightarrow \text{Besetzung nach Saha/BOLTZMANN}$$

$$\Leftrightarrow S_{\nu} = B_{\nu}(T) \text{ (lokal!)}$$

jedoch i. A.:  $I_{\nu} \neq B_{\nu}(T)$

## Types of radiative processes

4-71



Line absorption / emission

→ bound-bound transition

$$\sigma(\nu) = \sigma_0 \varphi(\nu - \nu_0)$$

with  $\varphi$  = (normalized) profile function, peaked at  $\nu_0$

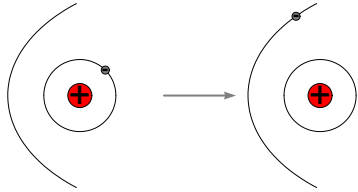
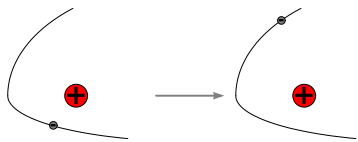


Photo-ionization / recombination

→ bound-free transition

$$\sigma(\nu) \approx \begin{cases} \sigma_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-3} & \text{if } \nu > \nu_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(in hydrogenic approximation)



Free-free absorption / emission ("bremsstrahlung")

$\sigma(\nu) \propto \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT})$   
important for infrared and radio range

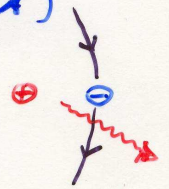
4-73

- in der Sonnenatmosphäre wichtig:

b-f-Opazität des  $H^-$  (Kante bei 17000 Å)

• frei-frei-Übergänge:

klassisch: Änderung der Hyperbelbahn



• Thomson-Opazität:

Streuung von Lichtquanten an freien Elektronen

erh. unabhängig von  $\nu$

- dominiert bei "heißen" Sternen!

## Frequenzverlauf der Wirkungsquerschnitte

IV. 35

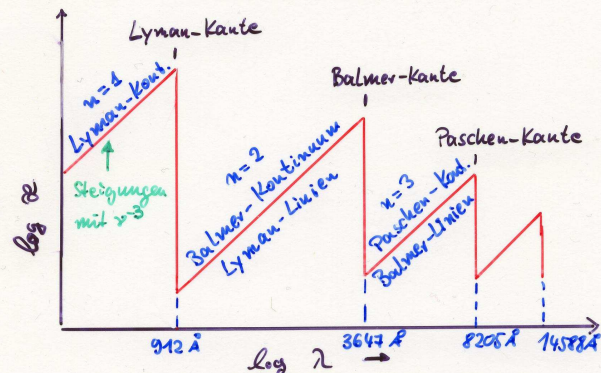
4-72

### Kontinuums-Querschnitte:

- nur großräumig von  $\nu$  abhängig

• bound-free (Photoionisation)

≅ B. Wasserstoff (schematisch):



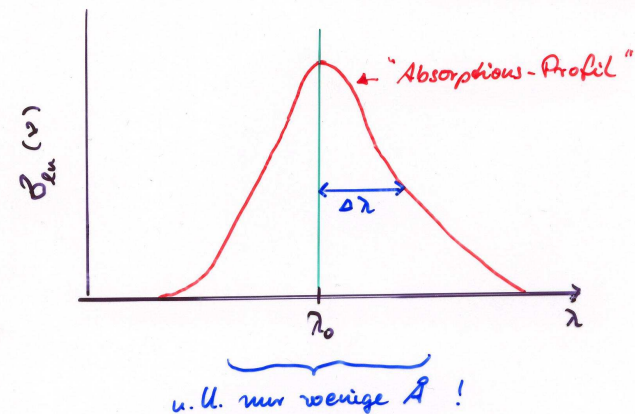
IV. 36

4-74

### Linien-Querschnitte

- Resonanz in einem schmalen Intervall um  $\lambda_0$

- können sehr viel größer werden als die Kontinuums-Querschnitte



Linien-Verbreiterung:

statt unendlich scharfer Resonanz  
 → verbreitertes Absorptions-Profil

Verbreiterungs-Mechanismen

- Strahlungsdämpfung: Energie-Unschärfe der Zustände  
 semi-klassisch:  $\Delta\lambda = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$
- Thermische Verbreiterung: Doppler-Effekt durch Temperatur-Bewegung  
 $\Delta\lambda = \lambda_0 v_{th} / c$ ;  $v_{th} = [2kT / (m_{Hn})]^{-1/2}$   
 z.B. Wasserstoff bei 50000 K:  $v_{th} = 29 \text{ km/s} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-4}$
- Druck-Verbreiterung: Energie-Unschärfe durch gegenseidige Störung der Teilchen

Prinzip der Entstehung von Absorptionslinien (statisch)

Näherung von Eddington-Barbier:

$I_{\nu}^+ \approx S_{\nu}(\tau_{\nu} = 1)$

LTE:

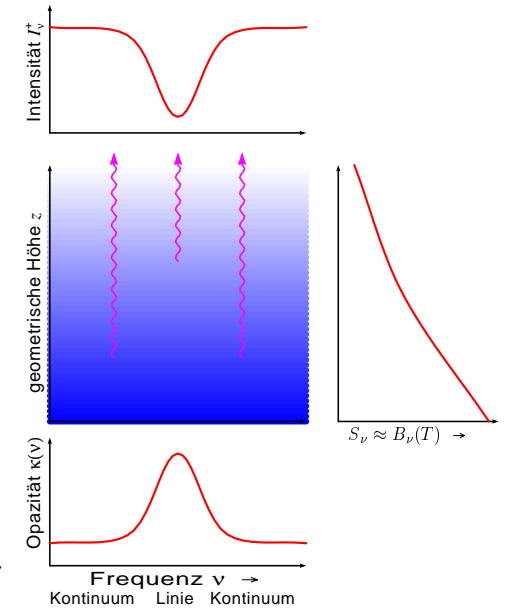
- T nimmt nach außen ab
- $B_{\nu}(T)$  nimmt nach außen ab
- $S_{\nu} = B_{\nu}(T)$  nimmt n. außen ab

non-LTE (2-Level-Streuung):

- $J_{\nu}$  nimmt nach außen ab
- $\bar{J}$  nimmt nach außen ab
- $S_{\nu} = \bar{J}$  nimmt nach außen ab

Im Vergleich zum Kontinuum ist in der Linie ...

- Opazität  $\kappa(\nu)$  höher
- Sichttiefe kleiner
- Ort wo  $\tau_{\nu} = 1$  weiter außen
- Quellfunktion  $S_{\nu}(\tau_{\nu} = 1)$  kleiner
- emergente Intensität  $I_{\nu}^+$  kleiner

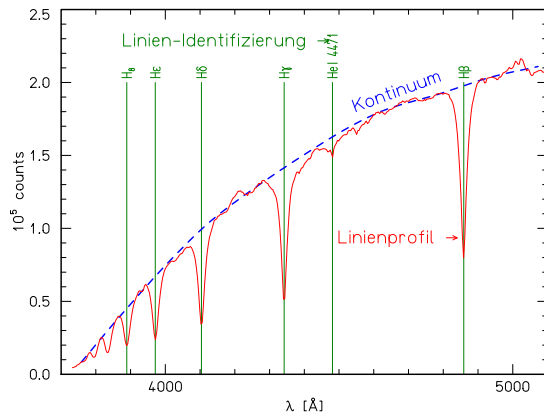


Spektrum eines Sterns

„Normalfall“: photosphärisches Spektrum mit Absorptionslinien  
 Beispiel: Spektrum von Wega (Spektraltyp A0)



Aufnahme mit dem OST (unserm Übungsteleskop) Rohdaten (CCD-Image)



Reduziertes Spektrum nach Wellenlängen-Kalibration  
**Kontinuum:** Spektrale Energieverteilung × Empfindlichkeitsverteilung der Apparatur (nicht flusskalibriert)

• Temperatur schichtung

engl. temperature stratification:

Verlauf T von z bzw. r oder von tau

Spezialfall:

Strahlungsgleichgewicht

engl. radiative equilibrium

Voraussetzungen:

- keine nuklearen Energiequellen  
 - gilt also nicht im Stern-Innern! -
- Energie-Transport vorwiegend durch Strahlung  
 - gilt also nicht bei Konvektion! -

- Stationarität

⇒ an jedem Ort ist (pro Zeiteinheit und Wegeinheit)

Absorbierte Energie = Emittierte Energie

$$\frac{1}{2} \int_{\mu=-1}^{+1} d\mu \int_{\nu=0}^{\infty} \kappa(\nu) I_{\nu} d\nu = \frac{1}{2} \int_{\mu=-1}^{+1} d\mu \int_{\nu=0}^{\infty} \eta_{\nu} d\nu$$

- $\eta_{\nu}, \kappa(\nu)$  isotrop

- def.  $J_{\nu} := \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_{\nu}(\mu) d\mu =$  winkelgemittelte Intensität

Simple Näherung:

Die "Graue Atmosphäre"

- Annahmen:  $\kappa(\nu) \equiv \kappa = \text{const. in } \nu$
- LTE:  $S_{\nu} = B_{\nu}$

$$\Rightarrow \kappa(\tau) \int_{\nu=0}^{\infty} \{J_{\nu}(\tau) - B_{\nu}(T(\tau))\} d\nu = 0$$

$$B(\tau) = \int_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (\text{IV.13}) \quad \text{def.: } J = \int_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu} d\nu$$

$$\Rightarrow \underline{B(T(\tau)) = J(\tau)}$$

Strahlungstransport in "Diffusionsnäherung"

liefert: (hier ohne Herleitung!)

$$J(\tau) = F \cdot \frac{3}{4} \left( \tau + \frac{2}{3} \right), \quad \text{wobei } F = \frac{\sigma}{\pi} T_{\text{eff}}^4$$

$$\Rightarrow [T(\tau)]^4 = T_{\text{eff}}^4 \cdot \frac{3}{4} \left( \tau + \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{oder } \underline{T(\tau) = T_{\text{eff}} \left[ \frac{3}{4} \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \right]^{1/4}} \quad (*)$$

$$\text{also: } \int_{\nu=0}^{\infty} \kappa(\nu) J_{\nu} d\nu = \int_{\nu=0}^{\infty} \eta(\nu) d\nu \rightarrow$$

$$\int_{\nu=0}^{\infty} \kappa(\nu) (J_{\nu} - S_{\nu}) d\nu = 0 \quad \text{Strahlungsgleichgewicht}$$

Dies ist äquivalent zur **Flusskonstanz**:

Man nehme die Transportgleichung (planparallel)  $\mu \frac{dI_{\nu}}{dz} = \kappa(\nu) (I_{\nu} - S_{\nu})$

Integration über alle Winkel  $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \dots d\mu$

und Vertauschung von Integration und Differentiation

mit  $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_{\nu} d\mu = J_{\nu}$  und  $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_{\nu} \mu d\mu = \frac{1}{4} F_{\nu}$

und schließlich Integration über alle Frequenzen gibt

$$\frac{1}{4} \frac{dF_{\text{bol}}(z)}{dz} = \int_{\nu=0}^{\infty} \kappa(\nu) (J_{\nu} - S_{\nu}) d\nu = 0 \rightarrow \underline{F_{\text{bol}}(z) = \text{const.}}$$

Anmerkungen:

- Formel (\*) gilt auch im nicht-grauen Fall, mit geeignetem Mittelwert für  $\kappa$  bzw.  $\tau$ :  
sog. Rosseland'sche Mittel  $\tau_{\text{Ross}}$  bzw.  $\kappa_{\text{Ross}}$ .

Im sichtbaren Spektralbereich oft:

$$\tau_{\text{Ross}} \approx \tau_{\text{Kontinuum}}$$

- Gleichung (\*) für  $\tau = \frac{2}{3}$ :

$$\underline{T(\tau = \frac{2}{3}) = T_{\text{eff}} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \right]^{1/4}}$$

- Aus LTE und Eddington-Barbier'scher Näherung:

$$F_{\nu}^{+} \approx B_{\nu}(T(\tau = \frac{2}{3}))$$

$$\Rightarrow F_{\nu}^{+}(\text{Kontinuum}) \approx B_{\nu}(T_{\text{eff}}) \quad \text{!!}$$

- Rand-Temperatur:

$$T(\tau=0) = T_{\text{eff}} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{4}} = T_{\text{eff}} \cdot 0.84$$

(genauere Rechnung ergibt  $0.81 \cdot T_{\text{eff}}$ )

$$\text{also } T(\tau) \approx 0.81 T_{\text{eff}}$$

Zusammenbruch der Näherungen (spätestens) bei den Kernen starker Linien:

- kein "strikttes LTE":  $S_{\nu}(\tau) < B_{\nu}(T(\tau))$   
Abhilfe: - im LTE: Behandlung als "Streulinie"  
- non-LTE
- kein Strahlungsgleichgewicht  
Heizung durch magneto hydrodynamische Wellen (sog. Alfvén-Wellen)  $\rightarrow$  Temperaturanstieg  
Chromosphäre, Korona

$\Rightarrow$  in LTE-Näherung (!):

IV.42

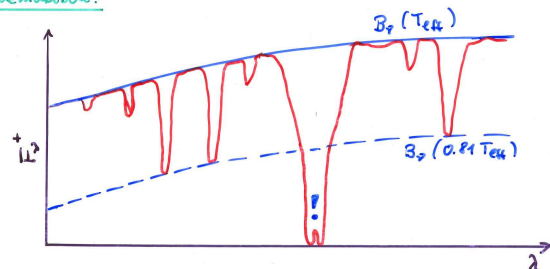
$$F_{\nu}^{+} \approx B_{\nu}(T = 0.81 T_{\text{eff}})$$

$$\text{oder } \frac{F_{\nu}^{+}}{F_{\nu}^{+}(\text{kont.})} \approx \frac{B_{\nu}(0.81 T_{\text{eff}})}{B_{\nu}(T_{\text{eff}})}$$

Beispiel:  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$   $T_{\text{eff}} = 6000 \text{ K}$  (Sonne)

$$\Rightarrow F_{\nu}^{+} \approx 0.32 \cdot F_{\nu}^{+}(\text{kont.})$$

Schematisch:



IV.43

- Randverdunklung

$$I_{\nu}^{+}(\mu) = S_{\nu}(\tau = \mu) \quad \text{Eddington-Barbier}$$

$$= B_{\nu}(T(\tau = \mu)) \quad \text{LTE}$$

frequenzintegriert ("bolometrisch"):

$$I^{+}(\mu) = B(T(\tau = \mu)) = \frac{\sigma}{\pi} [T(\tau = \mu)]^4 \quad \text{Stefan-Boltzmann}$$

$$= \frac{\sigma}{\pi} T_{\text{eff}}^4 \cdot \frac{3}{4} \left(\mu + \frac{2}{3}\right) \quad \text{graue Näherung}$$

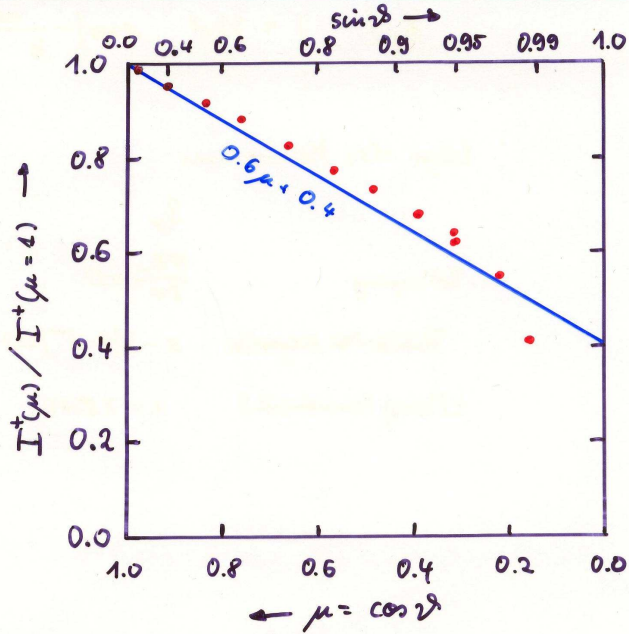
$$\text{oder } \frac{I^{+}(\mu)}{I^{+}(\mu=1)} = \frac{\mu + \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 0.6 \mu + 0.4$$



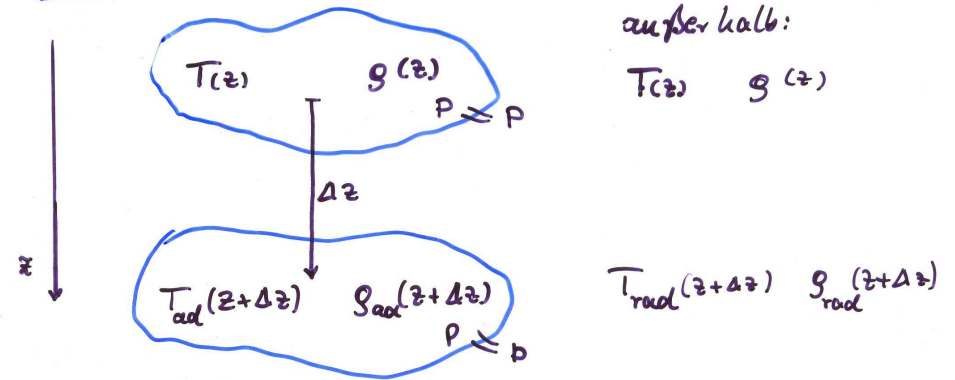
## Mitte-Rand-Kontrast der Sonne (Gesamtstrahlung): <sup>4-87</sup>

• Beobachtung

nach Unsöld:  
Physik der Sternatm.  
p. 131



Test: Ist diese radiative Schichtung stabil gegen Konvektion? <sup>4-89</sup>



Verschiebe einen Gasballen um  $\Delta z$  nach unten:

- so langsam, dass Druckausgleich erfolgt
- so schnell, dass kein Energieaustausch erfolgt (= "adiabatisch")

4-88

IV. 44

## • Konvektion

Zunächst:

Strahlungsgleichgewicht

Strahlungstransport

hydrostatische Gleichung <sup>\*)</sup>

<sup>\*)</sup> siehe Kap. I.6 f

"radiative" Schichtung

$T_{\text{rad}}(z)$ ,  $g_{\text{rad}}(z)$

4-90

wenn:  $g_{\text{rad}}(z + \Delta z) < g_{\text{rad}}(z)$

$\Rightarrow$  Antrieb (Lücke in die Ausgangslage):

Stabilität.

Andernfalls: Einsetzen von Konvektion

also: stabil  $\Leftrightarrow \frac{d\varrho_{\text{rad}}}{dz} < \frac{d\varrho_{\text{rad}}}{dz}$  IV. 45 4-91

oder: wg. ideales Gas:  $p = \frac{k}{A m_H} \varrho \cdot T$ ,  $P_{\text{ad}} = P_{\text{rad}}$ :

stabil  $\Leftrightarrow \frac{dT_{\text{ad}}}{dz} > \frac{dT_{\text{rad}}}{dz}$

d.h.: Konvektion setzt dann ein, wenn dadurch ein flacherer Temperaturgradient entsteht

Übliche Schreibweise:  $p$  statt  $z$  als unabhängiger Variablen

wg. hydrostatische Gl.  $\frac{dp}{dz} = \varrho \cdot g(z) = \frac{A m_H \varrho}{k} \frac{p}{T}$

$\rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{A m_H \varrho}{k} \frac{dT/T}{dp/p} = \frac{A m_H \varrho}{k} \frac{d(\ln T)}{d(\ln p)}$

Def. "logarithmische Gradient" =  $\nabla$

Stabil  $\Leftrightarrow \nabla_{\text{ad}} > \nabla_{\text{rad}}$  Schwarzschild-Kriterium

Damit wird der logarithmische Gradient IV. 46 4-93

$\nabla_{\text{ad}} = \frac{d(\ln T_{\text{ad}})}{d(\ln p)} = \frac{d(\ln p^{(\gamma-1)/\gamma})}{d(\ln p)} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} d(\ln p)}{d(\ln p)} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$

$\Rightarrow$  stabil  $\Leftrightarrow \nabla_{\text{rad}} < \frac{\gamma-1}{\gamma}$  Schwarzschild-Krit.

D. h. Konvektion tritt auf

- wenn  $\nabla_{\text{rad}}$  groß: bei großer Opazität, d.h. schlechter "radiativer Leitfähigkeit" sog.  $\kappa$ -Effekt
- wenn  $\nabla_{\text{ad}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$  klein wird ( $\gamma \rightarrow 1$ ) sog.  $\gamma$ -Effekt

Der adiabatische Gradient  $\nabla_{\text{ad}}$ :

Adiabaten Gleichung:  $p \propto \varrho^\gamma$  (siehe Thermodynamik!)

$\Rightarrow$  wg.  $p \propto \varrho T$  (ideales Gas):

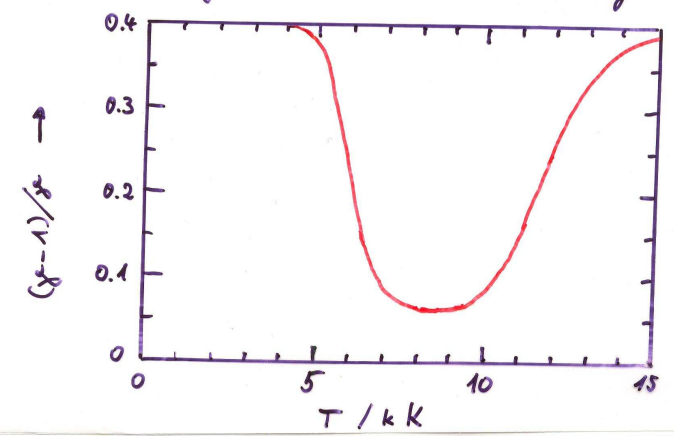
$p \propto \left(\frac{p}{T}\right)^\gamma \Rightarrow T_{\text{ad}}^\gamma \propto p^{\gamma-1}$

$\Rightarrow T_{\text{ad}} \propto p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Bedeutung von  $\gamma$ :  $\gamma := c_p/c_v$

wobei  $\left. \begin{matrix} c_p \\ c_v \end{matrix} \right\} :=$  spezifische Wärme bei konstantem  $\left\{ \begin{matrix} \text{Druck} \\ \text{Volumen} \end{matrix} \right.$

für 1-atomiges Gas: nur Bewegungsenergie  $\rightarrow \gamma = 5/3$   
 - jedoch bei Ionisationsumschlag: nur knapp über 1!



- Beispiel:
- Wasserstoff
  - SAHA - Gl.
  - Dichte  $10^{14} / \text{cm}^3$

Ende von Kap. IV