

Prof. Dr.-Ing. Rainer Joeckel

## Inhaltsverzeichnis

2.1	Grundlagen . . . . .	41
2.1.1	Das Lagefestpunktfeld . . . . .	41
2.1.2	Das Höhenfestpunktfeld . . . . .	43
2.2	Grundaufgaben . . . . .	43
2.2.1	Berechnung des Richtungswinkels und der Entfernung . . . . .	43
2.2.2	Polarpunktberechnung . . . . .	44
2.2.3	Höhenübertragung mit dem Tachymeter . . . . .	44
2.2.4	Transformationen . . . . .	45
2.2.5	Achsenschnitte . . . . .	47
2.3	Festpunktverdichtung durch Polygonierung . . . . .	47
2.3.1	Der beidseitig angeschlossene Polygonzug . . . . .	48
2.3.2	Fehlgrenzen beim Polygonzug . . . . .	49
2.3.3	Streckenreduktionen . . . . .	49
2.4	Freie Standpunktwahl mit Helmert-Transformation . . . . .	51
2.4.1	Stationierung durch Anschluss an koordinierte Punkte . . . . .	51
2.4.2	Aufnahme der Neupunkte . . . . .	51
2.4.3	Absteckung mit Freier Standpunktwahl . . . . .	51
2.5	Geländeaufnahme . . . . .	52
2.6	Absteckung . . . . .	52
2.7	Liniennivellement . . . . .	53
2.8	Achsberechnung . . . . .	54
2.9	Mengenberechnung . . . . .	57

**Anmerkung** Entsprechend DIN 18709 werden die dort angeführten Bezeichnungen verwendet.

## 2.1 Grundlagen

Die vermessungstechnischen Arbeiten gliedern sich in

- Horizontal- oder Lagemessungen und
- Vertikal- oder Höhenmessungen

In der Regel bezieht man sich dabei auf ein *Lagefestpunktfeld* und ein *Höhenfestpunktfeld*.

R. Joeckel ✉

Hochschule für Technik Stuttgart, Dillweg 13, 70619 Stuttgart, Deutschland

Bei bautechnischen Vermessungen sind die beiden Aufgaben:

- Erfassung (Punktaufnahme) und
- Absteckung (Übertragung des Bauentwurfs in das Gelände) von besonderer Bedeutung.

Die Vermessung bildet die Grundlage für die Planung und Durchführung von Bauvorhaben.

### 2.1.1 Das Lagefestpunktfeld

Das Lagefestpunktfeld umfasst ein enges Netz koordinierter Punkte, von denen aus Absteckung und Punktaufnahme durchgeführt werden können. Die Punkte sind zum Teil noch im Gauß-Krüger-Meridianstreifensystem (GK-System) koordiniert. Die Umstellung in allen Bundesländern auf das transversale Mercatorsystem (UTM-System) steht kurz vor dem Abschluss.

**GK-System** Das GK-System erlaubt eine winkeltreue jedoch nicht längentreue Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene. Das GK-System ist in 3°-breite Meridianstreifen eingeteilt. In der Mitte der Meridianstreifen liegen die Bezugsmeridiane  $L_0$ .

Für das Gebiet der Bundesrepublik Deutschland sind die Bezugsmeridiane  $L_0 = 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ$  und  $15^\circ$  östlich Greenwich in östlicher Richtung durchnummeriert und mit einer Kennzahl  $K_z$  versehen.

$$K_z = L_0/3^\circ$$

Die Gauß-Krüger-Koordinaten eines Punktes nennt man Rechts- und Hochwert.

$$\text{Rechtswert} = R = \text{Ordinate} = R_0 + Y$$

Mit

$R_0$  Ordinatenwert des Bezugsmeridians =  $(K_z + 0,5) \cdot 10^6$  m  
 $Y$  Abstand des Punktes vom Bezugsmeridian (Lotlänge).  
 Östlich vom Bezugsmeridian ist  $Y$  positiv, westlich davon negativ (Abb. 2.1).

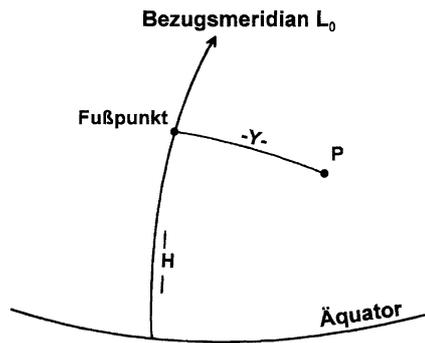


Abb. 2.1 GK-Koordinaten

**Beispiele**

Ein Punkt *A* liegt 23.415,25 m östlich vom 9°-Meridian

$$R_0 = (9^\circ/3^\circ + 0,5) \cdot 10^6 \text{ m} = 3.500.000 \text{ m}$$

$$R_A = R_0 + Y_A = 3.523.415,25 \text{ m}$$

Ein Punkt *B* liegt 77.216,82 m westlich vom 12°-Meridian

$$R_0 = (12^\circ/3^\circ + 0,5) \cdot 10^6 \text{ m} = 4.500.000 \text{ m}$$

$$R_B = R_0 + Y_B = 4.422.783,18 \text{ m}$$

Hochwert = *H* = Abszisse = Länge des Bezugsmeridians vom Äquator bis zum Lotfußpunkt.

**Beispiel**

$$H = 5.617.316,17 \text{ m}$$

Gauß-Krüger-Koordinaten sind ebene rechtwinklige Koordinaten. Bei der Abbildung einer auf der Erdoberfläche gemessenen Strecke in die Gauß-Krüger-Ebene muss eine Verzerrungskorrektur angebracht werden (siehe Abschn. 2.3.3).

**UTM-System** Das UTM-System erlaubt ebenfalls eine winkeltreue Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene. Das UTM-System ist in 6° breite Meridianstreifen eingeteilt. In der Mitte der Meridianstreifen liegen die Bezugsmeridiane  $L_0$ . Für das Gebiet der Bundesrepublik Deutschland sind die Bezugsmeridiane  $L_0 = 3^\circ, 9^\circ$  und  $15^\circ$  östlich Greenwich in östlicher Richtung durchnummeriert und mit einer Zonennummer *Z* versehen.

$$Z = \frac{L_0 + 3^\circ}{6^\circ} + 30$$

Die UTM-Koordinaten eines Punktes nennt man Ost- und Nord-Wert.

$$\text{Ostwert} = E = \text{Ordinate} = E_0 + Y$$

mit

$$E_0 = (Z + 0,5)10^6 \text{ m}$$

*Y* Abstand des Punktes vom Bezugsmeridian. Östlich vom Bezugsmeridian ist *Y* positiv, westlich davon negativ.

**Beispiel**

Ein Punkt *C* liegt 107.325,16 m westlich vom 9°-Meridian.

$$Z = 32$$

$$E_0 = 32.500.000 \text{ m}$$

$$E_C = 32.392.674,84$$

Nordwert = *N* = Abszisse = Länge des Bezugsmeridians vom Äquator bis zum Lotfußpunkt.

**Beispiel**

$$N = 5.489.217,12 \text{ m}$$

Die Koordinaten des Festpunktfeldes können über die Landesvermessungsämter der Bundesländer bezogen werden. Die einzelnen Landesvermessungsämter sind über das Internetportal [www.adv-online.de](http://www.adv-online.de) zu erreichen.

Die Festpunktfelder der Länder bestehen derzeit noch aus dem trigonometrischen Punktfeld (TP-Feld) mit einem durchschnittlichen Punktabstand von ca. 1 km. Das TP-Feld ist durch das Aufnahmepunktfeld (AP-Feld) weiter verdichtet. In Ortslagen beträgt der durchschnittliche Punktabstand des AP-Feldes ca. 200 m. Reicht diese Punktdichte für ein Bauvorhaben nicht aus, so muss z. B. durch Polygonierung (siehe Abschn. 2.3) das Punktfeld weiter verdichtet werden.

Die Punktverdichtung (sowohl nach Lage und Höhe) kann aber auch durch satellitengestützte Vermessung erfolgen. Dazu kann unter anderem der bundesweit zur Verfügung stehende Satellitenpositionierungsdienst SAPOS® eingesetzt werden. Hierzu ist ein GPS-Empfänger und eine Verbindung zu einer Referenzstation über Langwelle, UKW oder Mobiltelefon (GSM) erforderlich.

SAPOS® bietet folgende Dienste an:

- Echtzeit-Positionierungs-Service (EPS) mit einer Genauigkeit von 0,5 m bis 3 m. Dieser Dienst kann über UKW, Langwelle oder 2 m-Funk genutzt werden.
- Hochpräziser-Echtzeit-Positionierungs-Service (HEPS) mit einer Genauigkeit von 1 cm bis 5 cm. Durch Vernetzung der SAPOS®-Referenzstationen kann diese Genauigkeit auf 1 bis 2 cm gesteigert werden. Hier werden Korrekturdaten über Mobiltelefon (GSM) oder 2 m-Funk übertragen.
- Geodätisch Hochpräziser Positionierungs-Service (GHPS)  
Hier lassen sich Genauigkeiten im Subzentimeterbereich erzielen.

Einzelheiten über die erforderliche Hardware-Konfiguration und die angebotenen Dienste sind über die Internet-Adresse [www.sapos.de](http://www.sapos.de) zu erfahren.

### 2.1.2 Das Höhenfestpunktfeld

Die gesamte Bundesrepublik ist mit einem Netz stabiler Höhenfestpunkte überzogen. Meist werden die Höhenfestpunkte durch waagrechte Höhenbolzen, die in Bauwerksfundamenten angebracht sind, verkörpert. Der Abstand der Höhenfestpunkte beträgt in Ortslagen etwa 300 m. Bei diesem geringen Punktabstand ist ein Höhenanschluss durch Liniennivellement (siehe Abschn. 2.7) immer schnell durchführbar. Bei Baumaßnahmen empfiehlt es sich, immer an zwei Höhenfestpunkten anzuschließen.

Die Höhen einiger alter Bundesländer beziehen sich derzeit noch auf die Bezugsfläche „Normal Null“ (NN), die an den Amsterdamer Pegel angeschlossen ist. Die Höhen der neuen Bundesländer beziehen sich zum Teil noch auf den Pegel Kronstadt (bei St. Petersburg). Man bezeichnet sie als Höhen über Höhen-Null (HN). Die HN-Bezugsfläche liegt ca. 16 cm unter der NN-Bezugsfläche. Im Übergangsbereich kann dies zu Problemen bei der Höhenübertragung führen. Inzwischen ist eine Umstellung auf ein bundesweit einheitliches Höhensystem (Normalhöhen) fast abgeschlossen.

Da die Höhenwerte der verschiedenen Systeme nicht identisch sind, muss gewährleistet sein, dass sich sämtliche Höhenpunkte eines Projektes auf ein einheitliches Höhensystem beziehen.

Die Höhen des Festpunktfeldes können von den Landesvermessungsämtern der Bundesländer über die Internet-Adresse [www.adv-online.de](http://www.adv-online.de) bezogen werden.

## 2.2 Grundaufgaben

### 2.2.1 Berechnung des Richtungswinkels und der Entfernung (siehe Abb. 2.2)

Gegeben:  $P_1(Y_1, X_1)$

$P_2(Y_2, X_2)$

Gesucht:  $t_{1,2}$  und  $S_{1,2}$

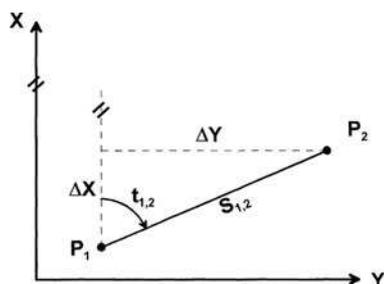


Abb. 2.2 Richtungswinkel und Entfernung

Lösung:

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1$$

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

$$S_{1,2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (2.1)$$

$$t_{1,2} = \arctan \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (2.2)$$

Der Richtungswinkel  $t$  muss immer im Intervall  $0 \text{ gon} \leq t < 400 \text{ gon}$  liegen. Je nach Vorzeichen von  $\Delta Y$  und  $\Delta X$  wird er in einem der Quadranten I bis IV liegen (siehe Abb. 2.3 und Tafel 2.1).

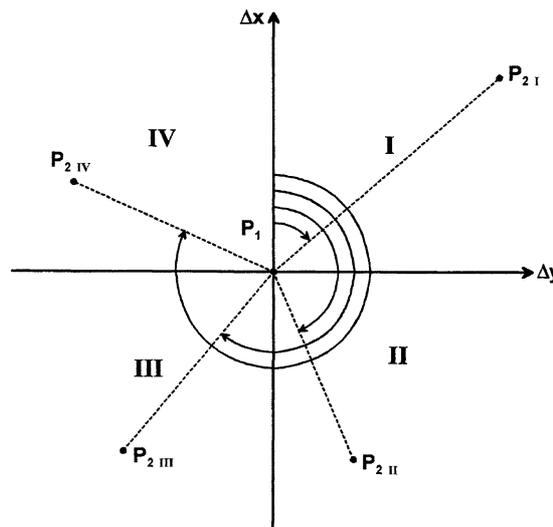


Abb. 2.3 Quadranten

Tafel 2.1 Quadrantenfestlegung

Quadrant	$\Delta Y$	$\Delta X$	Richtungswinkel $t = \arctan \frac{\Delta Y}{\Delta X}$
I	+	+	$t$
II	+	-	$t + 200 \text{ gon}$
III	-	-	$t + 200 \text{ gon}$
IV	-	+	$t + 400 \text{ gon}$

Bei einigen Taschenrechnern wird der Richtungswinkel  $t$  im Intervall:  $-200 \text{ gon} \leq t \leq 200 \text{ gon}$  ausgegeben. Um den quadrantengerechten Richtungswinkel zu bekommen, muss bei negativem Vorzeichen dann 400 gon dazuaddiert werden.

Geschlossene Formel für quadrantengerechte Richtungswinkel:

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 + 1 \cdot 10^{-a}$$

$$\Delta X = X_2 - X_1 + 1 \cdot 10^{-a}$$

$a$  entspricht der Stellenzahl, mit der gerechnet wird (z. B.  $a = 8$  bei achtstelliger Genauigkeit).

$$t [\text{gon}] = \frac{200}{\pi} \arctan \frac{\Delta Y}{\Delta X} + 200 - (1 + \text{sgn } \Delta X) \cdot \text{sgn } \Delta Y \cdot 100 \quad (2.3a)$$

oder für Taschenrechner mit voreingestellter Winkeleinheit „Gon“:

$$t \text{ [gon]} = \arctan \frac{\Delta Y}{\Delta X} + 200 - (1 + \operatorname{sgn} \Delta X) \cdot \operatorname{sgn} \Delta Y \cdot 100 \quad (2.3b)$$

Die meisten Taschenrechner verfügen über die „Signum“-Funktion ( $\operatorname{sgn} x$ ), wobei gilt:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

### Beispiele

$\Delta Y$	$\Delta X$	$t$
+50,15	+48,27	51,216 gon
+27,83	-65,12	174,289 gon
-39,46	-47,74	243,973 gon
-62,39	+28,28	327,093 gon

## 2.2.2 Polarpunktberechnung

Gegeben: Standpunkt  $S(Y_S, X_S)$   
Anschlusspunkt  $A(Y_A, X_A)$

Gemessen:  $\alpha_n, S_n$

Gesucht:  $P_n(Y_n, X_n)$  (siehe Abb. 2.4)

Lösung:

$$t_{S,A} = \arctan \frac{Y_A - Y_S}{X_A - X_S} \quad (2.4)$$

$t_{S,A}$  muss im Intervall  $0 \leq t < 400$  gon liegen (siehe Abschn. 2.2.1!)

$$t_n = t_{S,A} + \alpha_n \quad (2.5)$$

falls  $t_n \geq 400$  gon dann 400 gon abziehen.

$$Y_n = Y_S + S_n \cdot \sin t_n \quad (2.6)$$

$$X_n = X_S + S_n \cdot \cos t_n \quad (2.7)$$

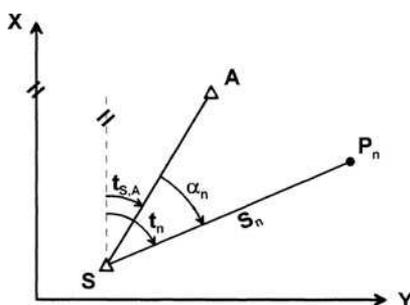


Abb. 2.4 Polarpunktberechnung

### Beispiel

$Y_S = 100,00 \text{ m}$	$Y_A = 150,00 \text{ m}$
$X_S = 100,00 \text{ m}$	$X_A = 150,00 \text{ m}$
$\alpha_n = 27,000 \text{ gon}$	$S_n = 100,00 \text{ m}$
$t_{S,A} = 50,000 \text{ gon}$	$t_n = 77,000 \text{ gon}$
$Y_n = 193,544 \text{ m}$	$X_n = 135,347 \text{ m}$

Diese Aufgabe lässt sich auch umkehren:

Punkte mit gegebenen  $Y, X$ -Koordinaten sollen polar abgesteckt werden. Dann ist gesucht:  $\alpha_n$  und  $S_n$

Lösung:

$$t_n = \arctan \frac{Y_n - Y_S}{X_n - X_S}$$

$$\alpha_n = t_n - t_{S,A}$$

$$S_n = \sqrt{(Y_n - Y_S)^2 + (X_n - X_S)^2}$$

## 2.2.3 Höhenübertragung mit dem Tachymeter

Gemessen: Zenitwinkel  $Z$

Schrägstrecke  $S$

Instrumentenhöhe  $i$

Zielhöhe  $t$

Gesucht: Höhenunterschied  $\Delta H$  (siehe Abb. 2.5)

Lösung:

$$\Delta H = S \cdot \cos Z + i - t \quad (2.8)$$

Für  $S > 200$  m muss die Erdkrümmung und die Refraktion berücksichtigt werden:

$$\Delta H = S \cdot \cos Z + \frac{S^2}{2R} \cdot 0,87 + i - t \quad (2.9)$$

mit  $R = \text{Erdradius} = 6.380.000 \text{ m}$

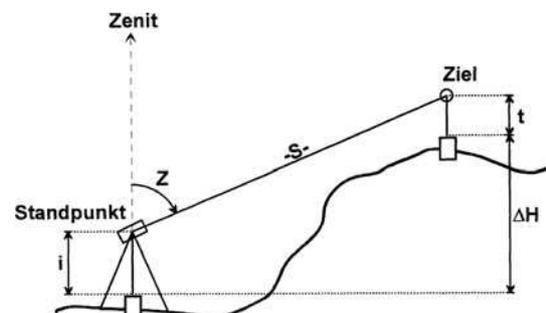


Abb. 2.5 Trigonometrische Höhenübertragung

**Beispiel**

$$S = 295,15 \text{ m} \quad Z = 93,105 \text{ gon}$$

$$i = 1,355 \text{ m} \quad t = 1,585 \text{ m}$$

$$\Delta H = 31,904 + 0,006 + 1,355 - 1,585 = 31,680 \text{ m}$$

**2.2.4 Transformationen**

Sehr oft werden Bauwerkskoordinaten in einem lokalen Koordinatensystem berechnet, das keinen Bezug zum übergeordneten Koordinatensystem der Vermessungsverwaltungen hat. Soll dieses Bauwerk dann vom übergeordneten Koordinatensystem aus abgesteckt werden, so muss eine Transformation erfolgen. Für eine Transformation von einem Ausgangssystem in ein Zielsystem sind in der Regel vier Transformationsparameter erforderlich. Diese vier Parameter müssen zuvor mithilfe identischer Punkte ermittelt werden. Identische Punkte sind in beiden Systemen koordiniert.

**Transformation mit zwei identischen Punkten** Um Punkte des Systems 1 (Ausgangssystem  $y, x$ ) in das System 2 (Zielsystem  $Y, X$ ) zu überführen, hat man vier Freiheitsgrade (siehe Abb. 2.6):

- $Y_0$  Verschiebung parallel zur  $Y$ -Achse
- $X_0$  Verschiebung parallel zur  $X$ -Achse
- $\alpha$  Drehung
- $M$  Maßstabsänderung

Mit den folgenden Transformationsgleichungen lassen sich Punkte des Systems 1 in das System 2 transformieren:

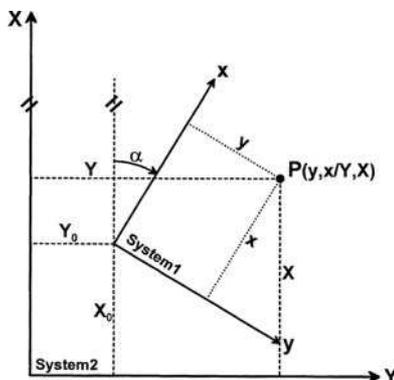
$$Y = Y_0 + M \cdot \sin \alpha \cdot x + M \cdot \cos \alpha \cdot y$$

$$X = X_0 + M \cdot \cos \alpha \cdot x - M \cdot \sin \alpha \cdot y$$

oder mit  $o = M \cdot \sin \alpha$  und  $a = M \cdot \cos \alpha$  folgt:

$$Y = Y_0 + o \cdot x + a \cdot y \tag{2.10}$$

$$X = X_0 + a \cdot x - o \cdot y \tag{2.11}$$



**Abb. 2.6** 4-Parameter-Transformation

Mit den Koordinaten von zwei identischen Punkten  $P_1(y_1, x_1/Y_1, X_1)$  und  $P_2(y_2, x_2/Y_2, X_2)$  ergeben sich die Parameter wie folgt:

$$o = \frac{(x_2 - x_1)(Y_2 - Y_1) - (y_2 - y_1)(X_2 - X_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.12}$$

$$a = \frac{(X_2 - x_1)(X_2 - X_1) + (y_2 - y_1)(Y_2 - Y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.13}$$

bzw.

$$M = \sqrt{a^2 + o^2} \tag{2.14}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{o}{a}\right) \tag{2.15}$$

$$Y_0 = Y_1 - o \cdot x_1 - a \cdot y_1 \tag{2.16}$$

$$X_0 = X_1 - a \cdot x_1 + o \cdot y_1 \tag{2.17}$$

Für die Transformation von System 2 in das System 1 (Rücktransformation) folgt:

$$y = \frac{a}{M^2}(Y - Y_0) - \frac{o}{M^2}(X - X_0) \tag{2.18}$$

$$x = \frac{a}{M^2}(X - X_0) + \frac{o}{M^2}(Y - Y_0) \tag{2.19}$$

**Beispiel**

Punkt-Nr.	y	x	Y	X
Identische Punkte				
287	-24,02	30,93	492,95	755,49
288	60,32	-80,15	367,51	816,38
Neupunkt				
350	34,76	87,52	-	-

$$o = 0,452314 \quad M = 0,999763$$

$$a = -0,891593 \quad \alpha = 170,1121 \text{ gon}$$

$$Y_0 = 457,544 \quad X_0 = 772,202$$

$$Y_{350} = 466,14 \quad X_{350} = 678,45$$

Rücktransformation mit (2.18) und (2.19) ergibt wieder:

$$y_{350} = 34,76 \quad x_{350} = 87,52$$

**Transformationen mit mehr als zwei identischen Punkten (Helmert-Transformation)** Die Koordinaten der identischen Punkte  $P_1$  bis  $P_n$  werden hierfür auf den Schwerpunkt bezogen.

$$y_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad x_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$Y_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad X_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\bar{y}_i = y_i - y_S \quad \bar{x}_i = x_i - x_S$$

$$\bar{Y}_i = Y_i - Y_S \quad \bar{X}_i = X_i - X_S$$

Berechnung der Transformationsparameter:

$$o = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i \bar{Y}_i - \bar{y}_i \bar{X}_i)}{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} \quad (2.20)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i \bar{Y}_i - \bar{x}_i \bar{X}_i)}{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)} \quad (2.21)$$

bzw.

$$M = \sqrt{a^2 + o^2} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{o}{a}\right)$$

$$Y_0 = Y_S - o \cdot x_S - a \cdot y_S \quad (2.22)$$

$$X_0 = X_S - a \cdot x_S + o \cdot y_S \quad (2.23)$$

Formeln für die Transformation von System 1 in das System 2:

$$Y = Y_0 + o \cdot x + a \cdot y \quad (2.24)$$

$$X = X_0 + a \cdot x - o \cdot y \quad (2.25)$$

Kontrolle bei der Helmert-Transformation:

Werden auch die identischen Punkte mit (2.24) und (2.25) transformiert, so erhält man die Verbesserungen  $v_y$  und  $v_x$  mit:

$$v_y = Y - Y_0 - o \cdot x - a \cdot y \quad (2.26)$$

$$v_x = X - X_0 - a \cdot x + o \cdot y \quad (2.27)$$

Für die Verbesserungen der  $n$  identischen Punkte gilt:

$$\sum_{i=1}^n v_{y_i} = \sum_{i=1}^n v_{x_i} = 0 \quad (2.28)$$

Aus diesen Verbesserungen lässt sich auch eine Standardabweichung für die Koordinaten im System 2 ableiten:

$$S_y = S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2)}{2n - 4}} \quad (2.29)$$

Für die Transformation von System 2 in das System 1 (Rücktransformation) gilt:

$$y = \frac{a(Y - Y_0) - o(X - X_0)}{a^2 + o^2} \quad (2.30)$$

$$x = \frac{a(X - X_0) + o(Y - Y_0)}{a^2 + o^2} \quad (2.31)$$

### Beispiel

Punkt-Nr.	y	x	Y	X
Identische Punkte				
287	-24,02	30,93	492,95	755,49
288	60,32	-80,15	367,51	816,38
209	-157,36	194,14	685,81	670,22
275	6,48	-9,26	447,58	777,51
Neupunkt				
350	34,76	87,52	-	-

$$y_S = -28,645 \quad x_S = 33,915$$

$$Y_S = 498,462 \quad X_S = 754,900$$

Punkt-Nr.	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{Y}$	$\bar{X}$
287	4,625	-2,985	-5,512	0,590
288	88,965	-114,065	-130,952	61,480
209	-128,715	160,225	187,348	-84,680
275	35,125	-43,175	-50,882	-22,610

$$\sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i \bar{Y}_i - \bar{y}_i \bar{X}_i) = 30.002,097$$

$$\sum_{i=1}^4 (\bar{y}_i \bar{Y}_i + \bar{x}_i \bar{X}_i) = -59.135,883$$

$$\sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i^2 - \bar{y}_i^2) = 66.293,344$$

$$o = 0,452566 \quad M = 1,0002697$$

$$a = -0,892034 \quad \alpha = 170,1105 \text{ gon}$$

$$Y_0 = 457,561 \quad X_0 = 772,190$$

$$v_{y_1} = -0,036 \text{ m} \quad v_{x_1} = +0,020 \text{ m}$$

$$v_{y_2} = +0,029 \text{ m} \quad v_{x_2} = -0,007 \text{ m}$$

$$v_{y_3} = +0,017 \text{ m} \quad v_{x_3} = -0,006 \text{ m}$$

$$v_{y_4} = -0,010 \text{ m} \quad v_{x_4} = +0,007 \text{ m}$$

$$\text{Probe: } \sum = 0 \quad \sum = 0$$

Standardabweichung:

$$S_x = S_y = \sqrt{\frac{0,00306}{4}} = 0,028 \text{ m}$$

$$Y_{350} = 466,16 \quad X_{350} = 678,39$$

Rücktransformation dieser Koordinaten mit (2.30) und (2.31):

$$Y_{350} = 34,76 \quad X_{350} = 87,52$$

### 2.2.5 Achsenschnitte

- Schnitt zweier geradliniger Achsen  
 Gegeben:  $A(Y_A, X_A), B(Y_B, X_B), C(Y_C, X_C), D(Y_D, X_D)$   
 Gesucht:  $S(Y_S, X_S)$  (siehe Abb. 2.7)  
 Lösung:

$$k_1 = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad (2.32)$$

$$k_2 = \frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} \quad (2.33)$$

$$X_S = X_A + \frac{(Y_C - Y_A) - k_2(X_C - X_A)}{k_1 - k_2} \quad (2.34)$$

$$Y_S = Y_A + k_1(X_S - X_A) \quad (2.35)$$

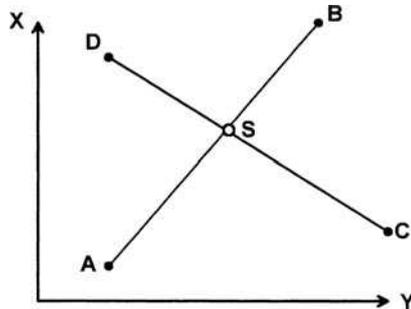


Abb. 2.7 Schnitt Gerade-Gerade

**Beispiel**

Punkt	Y	X
A	360,20	2934,77
B	480,19	2990,33
C	400,17	3000,19
D	484,79	2970,88
S	458,13	2980,11

$$k_1 = 2,15965$$

$$k_2 = -2,88707$$

- Schnitt einer geradlinigen Achse mit Kreis  
 Gegeben:  $A(Y_A, X_A), B(Y_B, X_B)$ ,  
 Kreismittelpunkt  $M(Y_M, X_M)$ , Radius  $r$   
 Gesucht:  $S_1(Y_{S_1}, X_{S_1})$  bzw.  $S_2(Y_{S_2}, X_{S_2})$   
 (siehe Abb. 2.8)

Lösung: Berechnung der Strecke  $\overline{AM}$  und der Richtungswinkel  $t_{A,B}$  und  $t_{A,M}$  aus den gegebenen Koordinaten (siehe Abschn. 2.2.1).

$$\alpha = |t_{A,M} - t_{A,B}| \quad (2.36)$$

$$h = \overline{AM} \cdot \sin \alpha \quad (2.37)$$

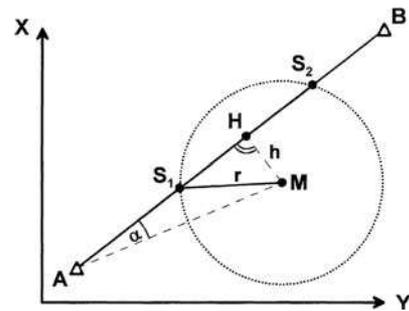


Abb. 2.8 Schnitt Gerade-Kreis

$$\overline{HS} = \overline{HS}_1 = \overline{HS}_2 = \sqrt{r^2 - h^2} \quad (2.38)$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - h^2} \quad (2.39)$$

$$\overline{AS}_1 = \overline{AH} - \overline{HS} \quad \text{bzw.} \quad \overline{AS}_2 = \overline{AH} + \overline{HS} \quad (2.40)$$

$$Y_{S_1} = Y_A + \overline{AS}_1 \cdot \sin t_{A,B} \quad \text{bzw.}$$

$$Y_{S_2} = Y_A + \overline{AS}_2 \cdot \sin t_{A,B} \quad (2.41)$$

$$X_{S_1} = X_A + \overline{AS}_1 \cdot \sin t_{A,B} \quad \text{bzw.}$$

$$X_{S_2} = X_A + \overline{AS}_2 \cdot \cos t_{A,B} \quad (2.42)$$

In der Regel kann der Bearbeiter aus der geometrischen Anordnung der Punkte klar entscheiden, welche der beiden Lösungen gesucht ist.

Kontrolle:  $\overline{S_1M} = \overline{S_2M} = r$

**Beispiel**

Punkt	Y	X
A	391,70	713,51
B	514,56	680,94
M	500,66	738,08
$r = 58,80 \text{ m}$		
$S_1$	460,29	695,33
$S_2$	514,55	680,94

$$\alpha = 30,6165 \text{ gon}$$

$$\overline{AM} = 111,696 \text{ m}$$

$$h = 51,670 \text{ m}$$

$$\overline{HS} = 28,065 \text{ m}$$

$$\overline{AH} = 99,026 \text{ m}$$

$$\overline{AS}_1 = 70,962 \text{ m}$$

$$\overline{AS}_2 = 127,091 \text{ m}$$

### 2.3 Festpunktverdichtung durch Polygonierung

Reicht die Dichte des amtlichen Festpunktfeldes für die Absteckung eines Bauwerks nicht aus, so muss das Festpunktfeld durch Einschaltung weiterer koordinierter Punkte verdichtet werden.

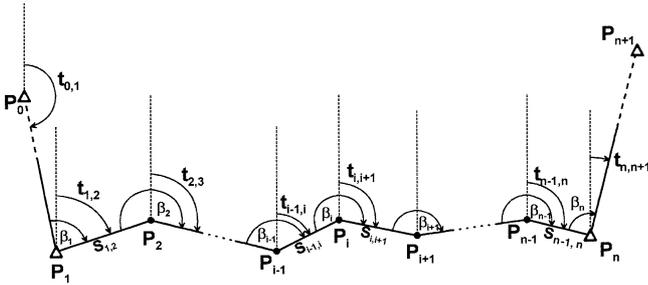


Abb. 2.9 Polygonzug

Dies kann z. B. mithilfe eines Polygonzuges (Abb. 2.9) geschehen. Vor allem für die Absteckung von Straßenachsen ist der Polygonzug zur Schaffung trassennaher Vermessungspunkte geeignet.

### 2.3.1 Der beidseitig angeschlossene Polygonzug

Die wichtigste Polygonzugsvariante ist der beidseitig angeschlossene Polygonzug. Hierbei können zwischen die beiden gegebenen Festpunkte  $P_1$  und  $P_n$  die Neupunkte  $P_2$  bis  $P_{n-1}$  durch Winkel- und Streckenmessung eingeschaltet werden (siehe Abb. 2.9). Außerdem sind hierbei die Anschlusspunkte  $P_0$  und  $P_{n+1}$  für die Anschlussrichtungen erforderlich.

Gegeben: Koordinaten der Anschlusspunkte  $P_0, P_1, P_n, P_{n+1}$

Gemessen: Brechungswinkel  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$   
Strecken  $S_{1,2}, S_{2,3}, \dots, S_{n-1,n}$

Gesucht: Koordinaten der Neupunkte  $P_2$  bis  $P_{n-1}$

Lösung:

- Berechnung der An- und Abschlussrichtungswinkel

$$t_{0,1} = \arctan \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (2.43)$$

$$t_{n,n+1} = \arctan \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \quad (2.44)$$

Die Richtungswinkel  $t$  müssen im Intervall  $0 \text{ gon} \leq t < 400 \text{ gon}$  liegen (siehe Abschn. 2.2.1)

- Berechnung der Winkelabschlussverbesserung  $v_\beta$  und der ausgeglichenen Richtungswinkel.

Ausgehend vom Anschlussrichtungswinkel  $t_{01}$  können alle weiteren Richtungswinkel der Polygonseiten wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= t_{0,1} - 200 \text{ gon} + \beta_1 (\pm 400 \text{ gon}) \\ t_{2,3} &= t_{1,2} - 200 \text{ gon} + \beta_2 (\pm 400 \text{ gon}) \\ &\vdots \\ t_{i,i+1} &= t_{i-1,i} - 200 \text{ gon} + \beta_i (\pm 400 \text{ gon}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ergibt sich  $t_{i,i+1} \geq 400 \text{ gon}$ , dann 400 gon abziehen!  
Ergibt sich  $t_{i,i+1} < 0 \text{ gon}$ , dann 400 gon dazuzählen!  
Der Richtungswinkel  $t_{i,i+1}$  lässt sich auch aus dem Anschlussrichtungswinkel  $t_{0,1}$  und der Summe der Brechungswinkel berechnen:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= t_{0,1} - 200 \text{ gon} + \beta_1 (\pm 400 \text{ gon}) \\ t_{2,3} &= t_{0,1} - 2 \cdot 200 \text{ gon} + \beta_1 + \beta_2 (\pm 400 \text{ gon}) \\ &\vdots \\ t_{i,i+1} &= t_{0,1} - i \cdot 200 \text{ gon} + \sum_{k=1}^i \beta_k (\pm 400 \text{ gon}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aufgrund von Ungenauigkeiten in den Brechungswinkeln  $\beta$  und Restfehlern in den Anschlusskoordinaten wird die nach (2.46) berechnete Abschlussrichtung nicht mit der nach (2.44) aus Koordinaten berechneten übereinstimmen. Diese Abweichung kann als Winkelabschlussverbesserung  $v_\beta$  wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} v_\beta &= t_{n,n+1} - \left( t_{0,1} - n \cdot 200 \text{ gon} + \sum_{k=1}^n \beta_k (\pm 400 \text{ gon}) \right) \\ &= \text{„SOLL} - \text{IST“} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Falls  $v_\beta$  innerhalb der Fehlergrenzen (siehe Abschn. 2.3.2) liegt, erfolgt eine gleichmäßige Verteilung der Abschlussverbesserungen auf die einzelnen Brechungswinkel und man erhält die endgültigen und ausgeglichenen Richtungswinkel  $\bar{t}$  nach (2.45).

$$\bar{t}_{i,i+1} = \bar{t}_{i-1,i} - 200 \text{ gon} + \beta_i + \frac{v_\beta}{n} (\pm 400 \text{ gon}) \quad (2.48)$$

- Berechnung der Koordinatenabschlussverbesserungen und der ausgeglichenen Koordinaten der Neupunkte.  
Mit den ausgeglichenen Richtungswinkeln  $\bar{t}$  und den Strecken  $S$  erhält man die Koordinatenunterschiede:

$$\Delta Y_{i,i+1} = Y_{i+1} - Y_i = S_{i,i+1} \cdot \sin \bar{t}_{i,i+1} \quad (2.49)$$

$$\Delta X_{i,i+1} = X_{i+1} - X_i = S_{i,i+1} \cdot \cos \bar{t}_{i,i+1} \quad (2.50)$$

Aufgrund der Ungenauigkeiten in den Strecken, in den ausgeglichenen Richtungswinkeln und in den Anschlusskoordinaten wird die Summe der nach (2.49) und (2.50) berechneten Koordinatenunterschiede nicht mit den Sollwerten  $Y_n - Y_1$  und  $X_n - X_1$  übereinstimmen. Man berechnet deshalb die Koordinatenanschlussverbesserungen  $v_y$  und  $v_x$  nach folgenden Gleichungen:

$$v_Y = (Y_n - Y_1) - \sum_{k=1}^{n-1} Y_{k,k+1} \quad (2.51)$$

$$v_X = (X_n - X_1) - \sum_{k=1}^{n-1} X_{k,k+1} \quad (2.52)$$

Diese Verbesserungen werden nun proportional zu den Seitenlängen auf die einzelnen Koordinatenunterschiede verteilt:

$$v_{\Delta Y_{i,i+1}} = \frac{S_{i,i+1}}{\sum S} \cdot v_Y \quad (2.53)$$

$$v_{\Delta X_{i,i+1}} = \frac{S_{i,i+1}}{\sum S} \cdot v_X \quad (2.54)$$

Somit folgt für die endgültigen und ausgeglichenen Koordinaten der Neupunkte:

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_{i,i+1} + v_{\Delta Y_{i,i+1}} \quad (2.55)$$

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_{i,i+1} + v_{\Delta X_{i,i+1}} \quad (2.56)$$

Setzt man diese Berechnung bis zum Abschlusspunkt  $P_n$  fort, so ergibt sich die Kontrolle:

$$Y_n = Y_{n\text{SOLL}} \quad X_n = X_{n\text{SOLL}}$$

### 2.3.2 Fehlergrenzen beim Polygonzug

Die nach (2.51) und (2.52) berechneten Koordinatenverbesserungen  $v_y$  und  $v_x$  werden in Längsverbesserung  $L$  und Querverbesserung  $Q$  umgerechnet:

$$L = \frac{v_y(Y_n - Y_1) + v_x(X_n - X_1)}{\overline{P_1 P_n}}$$

$$Q = \frac{v_y(X_n - X_1) + v_x(Y_n - Y_1)}{\overline{P_1 P_n}}$$

mit

$$\overline{P_1 P_n} = \sqrt{(Y_n - Y_1)^2 + (X_n - X_1)^2}$$

$L$ ,  $Q$  und die nach (2.47) berechnete Winkelabschlussverbesserung  $v_\beta$  müssen innerhalb der vorgeschriebenen Fehlergrenzen (B.-W.) liegen:

Zulässige Winkelabweichung ZW in [mgon]:

$$ZW_2 = \sqrt{\frac{600^2}{(\sum s)^2} (n-1)^2 \cdot n + 10^2}$$

für Genauigkeitsstufe 2

$$ZW_1 = \frac{2}{3} ZW_2 \quad \text{für Genauigkeitsstufe 1}$$

Zulässige Längsabweichung ZL in [m]:

$$ZL_2 = \sqrt{0,03^2(n-1) + 0,06^2} \quad \text{für Genauigkeitsstufe 2}$$

$$ZL_1 = \frac{2}{3} ZL_2 \quad \text{für Genauigkeitsstufe 1}$$

Zulässige lineare Querabweichung ZQ in [m]:

$$ZQ_2 = \sqrt{0,003^2 \cdot n^3 + 0,00005^2 \cdot S_G^2 + 0,06^2}$$

für Genauigkeitsstufe 2

$$ZQ_1 = \frac{2}{3} ZQ_2 \quad \text{für Genauigkeitsstufe 1}$$

Dabei bedeuten:

- $n$  Zahl der Brechungswinkel
- $\sum s$  Summe der Polygonseiten in Metern
- $S_G$  Strecke  $\overline{P_1 P_n}$  in Metern
- Genauigkeitsstufe 1 Gebiete mit hohem Grundstückswert
- Genauigkeitsstufe 2 übrige Gebiete

### 2.3.3 Streckenreduktionen

Werden die Polygonzüge im Gauß-Krüger- oder UTM-Koordinatensystem berechnet, müssen die gemessenen Strecken in diese Rechenebenen abgebildet werden. Bei dieser Abbildung treten Verzerrungen auf, die berücksichtigt werden müssen.

Außerdem muss berücksichtigt werden, wenn die mittlere Höhe des Messgebietes von der Höhe des Meeresspiegels abweicht.

Streckenreduktion  $\Delta S$  bei Gauß-Krüger-Systemen (Tafel 2.2):

$$\Delta S = S \left( \frac{Y^2}{2R^2} - \frac{h}{R} \right) \quad (2.57)$$

Streckenreduktion bei UTM-Systemen:

$$\Delta S = S \left( \frac{Y^2}{2R^2} - \frac{h}{R} - 0,0004 \right) \quad (2.58)$$

Für die reduzierte Strecke  $\bar{S}$  folgt dann:

$$\bar{S} = S + \Delta S \quad (2.59)$$

Dabei bedeuten:

- $S$  gemessene Horizontalstrecke
- $R$  Erdradius (6380 km)
- $Y$  Entfernung des Messgebietes vom Bezugsmeridian
- $h$  mittlere Höhe über dem Meeresspiegel

**Tafel 2.2** Streckenreduktion  $\Delta S$  [mm] für 100 m-Strecke bei GK-Systemen

$h$ [m]	$Y$ [km]						
	0	20	40	60	80	100	120
0	0	0,5	2,0	4,4	7,9	12,3	17,7
200	-3,1	-2,6	-1,2	1,3	4,7	9,1	14,6
400	-6,2	-5,8	-4,3	-1,8	1,6	6,0	11,4
600	-9,4	-8,9	-7,4	-5,0	-1,5	2,9	8,3
800	-12,5	-12,0	-10,6	-8,1	-4,7	-0,3	5,1
1000	-15,7	-15,2	-13,7	-11,3	-7,8	-3,4	2,0

**Beispiel**

$$S = 265,500 \text{ m} \quad Y = 20 \text{ km} \quad h = 600 \text{ m}$$

Aus Tafel 2.2 für 100 m-Strecke:

$$\Delta S = -8,9 \text{ mm}$$

Reduktion für  $S = 265,500 \text{ m}$

$$\Delta S = 2,655 \cdot (-8,9) = -24 \text{ mm}$$

$$\bar{S} = 265,476 \text{ m}$$

Für die Streckenreduktion bei UTM-Systemen sind von den Werten der Tafel 2.2 jeweils 40 mm abzuziehen:

für 100 m-Strecke:  $\Delta S = -48,9 \text{ mm}$

für  $S = 265,500 \text{ m}$ :  $S = 2,655 \cdot (-48,9) = -130 \text{ mm}$

$$\bar{S} = 265,370 \text{ m}$$

**Beispiel zur Polygonzugsberechnung**

Gegeben: Koordinaten der Anschlusspunkte  $P_0, P_1, P_5, P_6$

Punkt	Y [m]	x [m]
$P_0$	927,64	5431,00
$P_1$	406,23	4234,58
$P_5$	293,59	3681,46
$P_6$	382,17	3780,26

(2.43):  $t_{0,1} = 226,1644 \text{ gon}$        $ZW_2 = 0,0136 \text{ gon} = 13,6 \text{ mgon}$

(2.44):  $t_{5,6} = 46,5312 \text{ gon}$        $ZW_1 = 0,0091 \text{ gon} = 9,1 \text{ mgon}$

(2.47):  $v_\beta = 0,0048 \text{ gon} = 4,8 \text{ mgon}$        $\frac{v_\beta}{5} = 0,00096 \text{ gon}$

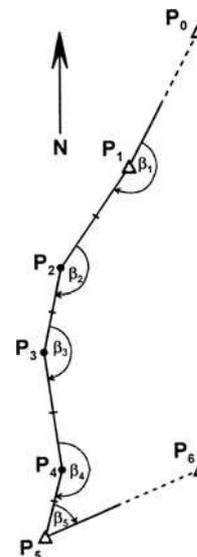
Gemessen: Brechungswinkel  $\beta_1$  bis  $\beta_5$

Reduzierte Horizontalstrecken  $S_{1,2}, S_{2,3}, S_{3,4}, S_{4,5}$

Punkt	$\beta$ [gon]	S [m]
$P_1$	203,2750	157,33
$P_2$	188,1460	109,98
$P_3$	172,0410	161,56
$P_4$	226,7470	152,08
$P_5$	30,1530	$\sum S = 580,95$

Gesucht: Koordinaten der Neupunkte  $P_2, P_3$  und  $P_4$

**Abb. 2.10** Lage des Polygonzugs



	$\bar{t}$ (2.48)	$\Delta Y$ (2.49)	$\Delta X$ (2.50)	$v_{\Delta Y}$ (2.53)	$v_{\Delta X}$ (2.54)	Y (2.55)	X (2.56)
$P_0$							
	<b>226,1644</b>						
$P_1$						<b>406,23</b>	<b>4234,58</b>
	229,4404	-70,191	-140,804	0,011	-0,003		
$P_2$						336,050	4093,773
	217,5873	-29,998	-105,810	0,008	-0,002		
$P_3$						306,060	3987,961
	189,6293	26,202	-159,421	0,011	-0,003		
$P_4$						332,273	3828,537
	216,3772	-38,693	-147,075	0,010	-0,002		
$P_5$						<b>293,59</b>	<b>3681,46</b>
	<b>46,5312</b>						
$P_6$							
		$\sum \Delta Y = -112,68$ $v_Y = 0,04 \text{ m}$ $L = 0,002 \text{ m}$ $ZL_2 = 0,085 \text{ m}$ $ZL_1 = 0,057 \text{ m}$	$\sum \Delta X = -553,11$ $v_X = -0,01 \text{ m}$ $Q = -0,041 \text{ m}$ $ZQ_2 = 0,074 \text{ m}$ $ZQ_1 = 0,050 \text{ m}$			$Y_5 - Y_1 = -112,64$	$X_5 - X_1 = -553,12$