Lösungen zu den Übungen aus Kapitel 22

(1) Berechnen sie die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1|X = x)$ für $\beta_0 = 0{,}2$, $\beta_1 = 1{,}2$ und $x = 3$.

Hierzu setzt man die Werte der β-Koeffizienten und den x-Wert in folgende Gleichung ein:

$$P(Y = 1|X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot x}}$$

und erhält:

$$P(Y = 1|X = 3) = \frac{e^{0,2+1,2\cdot 3}}{1 + e^{0,2+1,2\cdot 3}} = \frac{e^{3,8}}{1 + e^{3,8}} = \frac{44,70}{45,70} = 0,98\,.$$

(2) Berechnen Sie anhand des Beispiels in Abschnitt 2P.1.2 (a) die bedingte Wahrscheinlichkeit, mit dem Leben zufrieden zu sein, (b) den bedingten Wettquotienten sowie (c) den bedingten Logit für Personen, die
(a) kein positives, aber 30 negative Tagesereignisse angegeben haben,
(b) kein negatives, aber 30 positive Tagesereignisse angegeben haben,
(c) 30 positive und 15 negative Tagesereignisse angegeben haben.

In dem Beispiel wurden die Regressionskoeffizienten des logistischen Regressionsmodells für die Variablen »positive Tagesereignisse« (X_1) und »negative Tagesereignisse« (X_2) wie folgt geschätzt:

$$\hat{P}(Y|X_1, X_2) = \frac{e^{0,449+0,083\cdot X_1 - 0,123\cdot X_2}}{1 + e^{0,449+0,083\cdot X_1 - 0,123\cdot X_2}}$$

(a) Für Personen, die kein positives ($X_1 = 0$), aber 30 negative Lebensereignisse ($X_2 = 30$) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30) = \frac{e^{0,449+0,083\cdot 0 - 0,123\cdot 30}}{1 + e^{0,449+0,083\cdot 0 - 0,123\cdot 30}} = \frac{e^{-3,241}}{1 + e^{-3,241}} = \frac{0,039}{1,039} = 0,038$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)} = \frac{0,038}{0,962} = 0,040$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 0, X_2 = 30)}\right) = \ln\left(\frac{0,038}{0,962}\right) = -3,219$$

(b) Für Personen, die kein negatives ($X_2 = 0$), aber 30 positive Lebensereignisse ($X_1 = 30$) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0) = \frac{e^{0,449+0,083\cdot 30 - 0,123\cdot 0}}{1 + e^{0,449+0,083\cdot 30 - 0,123\cdot 0}} = \frac{e^{2,939}}{1 + e^{2,939}} = \frac{18,897}{19,897} = 0,950$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)} = \frac{0,950}{0,050} = 19$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}{1 - \hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 0)}\right) = \ln\left(\frac{0,950}{0,050}\right) = 2,944$$

(c) Für Personen, die 30 positive (X_1 = 30) und 15 negative Lebensereignisse (X_2 = 15) angegeben haben, erhält man:

$$\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15) = \frac{e^{0,449+0,083\cdot 30-0,123\cdot 15}}{1+e^{0,449+0,083\cdot 30-0,123\cdot 15}} = \frac{e^{1,094}}{1+e^{1,094}} = \frac{2,986}{3,986} = 0,749$$

$$\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}{1-\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)} = \frac{0,749}{0,251} = 2,984$$

$$\ln\left(\frac{\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}{1-\hat{P}(Y|X_1 = 30, X_2 = 15)}\right) = \ln\left(\frac{0,749}{0,251}\right) = 1,093$$

(3) Zeigen Sie, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1|X = x)$ gleich 0,5 ist, wenn gilt: $x = -\beta_0/\beta_1$.

Setzt man den Wert $x = -\beta_0/\beta_1$ in die Modellgleichung ein, erhält man:

$$P(Y=1|X=x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot(-\beta_0/\beta_1)}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot(-\beta_0/\beta_1)}} = \frac{e^{\beta_0+(-\beta_0)}}{1+e^{\beta_0+(-\beta_0)}} = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = 0,5\,.$$

(4) Zeigen Sie, dass Gleichung F 22.3 aus Gleichung F 22.1 folgt.

Aufgrund der Gleichung $P(Y=1|X=X) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}$ (F 22.1) erhält man für die bedingte Wettquotientenfunktion: (F 22.3):

$$\frac{P(Y=1|X=X)}{1-P(Y=1|X=X)} = \frac{\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}}{1-\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}} = \frac{\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}}{\dfrac{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}-e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}}{\dfrac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}} = \frac{e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}} \cdot \frac{1+e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}}{1} = e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}$$

(5) Zeigen Sie, dass Gleichung F 22.7 aus Gleichung F 22.3 folgt.

Logarithmiert man beide Seiten der Gleichung $\frac{P(Y=1|X=X)}{1-P(Y=1|X=X)} = e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}$ (F 22.1) erhält man nach den Rechenregeln für Logarithmen:

$$\ln\left(\frac{P(Y=1|X=X)}{1-P(Y=1|X=X)}\right) = \ln\left(e^{\beta_0+\beta_1\cdot X}\right) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$$

(6) Zeigen Sie, dass Gleichung F 22.32 gültig ist.

Ersetzt man in Gleichung F 22.32 $\beta_{0i+1} - \beta_{i0} = \ln\left(\frac{P(Y \le i+1|X=x)}{P(Y > i+1|X=x)}\right) - \ln\left(\frac{P(Y \le i|X=x)}{P(Y > i|X=x)}\right)$ die bedingten Logits nach Gleichung F 22.31 erhält man:

$$\beta_{0i+1} - \beta_{0i} = \beta_{0(i+1)} + \beta_1 \cdot x - \beta_{0i} - \beta_1 \cdot x = \beta_{0(i+1)} - \beta_{0i}$$

(7) Zeigen Sie, dass Gleichung F 22.33 gültig ist.

Gleichung F 22.33 folgt unmittelbar aus Gleichung F 22.32, da gilt:

$$P(Y \leq i+1 | X = x) = P(Y \leq i | X = x) + P(Y = i+1 | X = x) \quad \text{sowie}$$
$$P(Y > i+1 | X = x) = P(Y > i | X = x) - P(Y = i+1 | X = x)$$