Technische Universität Berlin

Fakultät Verkehrs- und Maschinensysteme
Fachgebiet Numerische Fluiddynamik

Prof. Dr. Sesterhenn/Dr. Michael Schlegel

Sommersemester 2014
11. Juni 2014

Übungsaufgaben — Blatt 3

Grundlagen des Regler- und Beobachterentwurfs (4 Aufgaben)

Aufgabe 1: Steuerbarkeit und Transformation auf Regelungsnormalform — 6 Punkte

a) Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Überprüfen Sie, ob das System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) steuerbar ist mittels des Kalmanschen Stuerbarkeitskriteriums. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_R$, die das System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) auf Regelungsnormalform ($\mathbf{A}_R = \mathbf{T}_R^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}_R$, $\mathbf{b}_R = \mathbf{T}_R^{-1}\,\mathbf{b}$) transformiert. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

b) Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Überprüfen Sie, ob das System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) steuerbar ist. Nutzen Sie hierfür das Kalmansche Stuerbarkeitskriterium. Überprüfen Sie das Ergebnis unter Verwendung des Gramschen Stuerbarkeitskriteriums.

Aufgabe 2: Beobachtbarkeit und Transformation auf Beobachtungsnormalform — 6 Punkte

Es bestehen mehrere Möglichkeiten zum Herleiten der Beobachtungsnormalform. Zum einen kann die Transformationsmatrix über die Beobachtungsnormalform bestimmt werden (Teil a)). Andererseits kann die Dualität ausgenutzt werden mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^T$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{C}^T$, für das dann die Regelungsnormalform ($\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$), analog zu Aufgabe 1 a), hergeleitet wird (Teil b)).

a) Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ist das System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$) beobachtbar? Bestimmen Sie Beobachtungsnormalform über die Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix und geben Sie die Transformationsmatrix an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

b) Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Stellen Sie fest, ob das System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) unter Verwendung des Kalmanschen Beobachtbarkeitskriteriums und des Gramschen Beobachtbarkeitskriteriums beobachtbar ist. Benutzen Sie dabei die Dualität ($\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}^T$, $\tilde{\mathbf{B}} := \mathbf{C}^T$).

Aufgabe 3: Konstruktion des Reglers (eigenvalue und eigenstructure assignment) 6 Punkte

a) Betrachten Sie das System aus Aufgabe 1 a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Es werden für $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\,\mathbf{K}$ die Eigenwerte -2 und $-1 \pm i$ festgelegt. Bestimmen Sie den Regler, sodass die genannten Bedingungen erfüllt sind!

b) Betrachten Sie das System aus Aufgabe 1 b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Die Eigenwerte für $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\,\mathbf{K}$ werden zu $\tilde{\lambda}_1 = -1$, $\tilde{\lambda}_2 = -2 + i$ und $\tilde{\lambda}_3 = -2 - i$ festgelegt. Die gewählten Eigenvektoren sind

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bestimmen Sie den Regler $\mathbf{K}$ nach Gl. (3.99) im Skript!
Hinweis: Wenn Sie die Parametervektoren $\mathbf{p}_i$ nach Gl. (3.100) berechnet haben, wie sehen die $\hat{\mathbf{x}}_i$ nach Gl. (3.97) aus? Welche Eigenwerte und Eigenvektoren beobachten Sie für das Gesamtsystem? Warum sind die $\hat{\mathbf{x}}_i$ nicht exakt einstellbar?

Aufgabe 4: Methoden zur Eigenwertfestlegung für den Beobachter 6 Punkte

a) Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Stellen Sie den Regler $\mathbf{L}$ so ein, dass die erhaltenen Richtungen

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

sind und die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1 = -1$, $\tilde{\lambda}_2 = -2 + i$ und $\tilde{\lambda}_3 = -2 - i$. Nutzen Sie dabei z. B. die Dualität aus. Wieso sind für den Beobachter die Abklingraten als auch die Richtungen eindeutig angebbar?

b) Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Bestimmen Sie für die vorgegebenen Richtungen aus Aufgabe 4 a) und die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1 = -2$, $\tilde{\lambda}_2 = -1 + i$ und $\tilde{\lambda}_3 = -1 - i$ den Regler $\mathbf{K}$. Berechnen Sie diesen anhand der Gl. (3.99) im Skript, jedoch mit den vorgegebenen $\hat{\mathbf{x}}_i$ anstelle der $\hat{\mathbf{x}}_{i,neu} = (\mathbf{A} - \tilde{\lambda}_i\,\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{p}_i$. Was beobachten Sie? Warum können wir die Formel (3.99) nicht direkt anwenden?