Prof. Javier Esparza
Kevin Kappelmann, Simon Roßkopf, Lukas Stevens

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2023 – Übungsblatt 11

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Vorbereitung ($\rightarrow$ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü11.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- M_w, $M_w[x]$, $M_w[x]\downarrow$
- allgemeines und spezielles Halteproblem, Halteproblem auf leerem Band
- Reduktion (Beispiel: $A \leq B$, sprich: "A ist reduzierbar auf B")
- semi-entscheidbar
- rekursiv aufzählbar
- Satz von Rice

Individualaufgabe Ü11.2. (*Quiz*)

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge allen Satzenden zu, sodass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$:

(a) Die Funktion χ_A ist berechenbar,

(b) A ist entscheidbar,

(c) B ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $A \leq B$ gilt und B entscheidbar ist.

(ii) wenn A entscheidbar ist.

(iii) wenn $A \leq B$ gilt und A nicht entscheidbar ist.

Lösungsskizze. (a) $\rightarrow$ (i)/(ii), (b) $\rightarrow$ (i)/(ii), (c) $\rightarrow$ (iii).

Individualaufgabe Ü11.3. (*Reductio ad absurdum*)

Sei $A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$.

Entscheiden und erklären Sie, ob die folgenden Funktionen eine korrekte Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: Sei L_1 kontextfrei mit Grammatik G und $\emptyset \neq L_2 \neq \Sigma^*$ regulär mit Grammatik G' und $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann $L_1 \leq L_2$.

Reduktion: Wähle $u \in L_2$ und $v \in \Sigma^* \setminus L_2$. Definiere $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit

$$f(w) := \begin{cases} u, & \text{falls } w \in L_1 \\ v, & \text{sonst} \end{cases} .$$

(b) Behauptung: $A \leq A \cup \{x\}$.

Reduktion: $f(w) = w$.

(c) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion: Definiere $f : \mathcal{H}_0 \to A$ mit $f(w) \coloneqq aaa$.

(d) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} aaa & \text{falls } w \in \mathcal{H}_0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

(e) Behauptung: $A \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung w einer TM ab, die wie folgt definiert ist: Die TM M_w löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine „Ja“(1) oder „Nein“(0) aus.

(f) Behauptung: $\overline{\mathcal{H}_0} \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die $M_w[\epsilon]$ simuliert. Falls $M_w[\epsilon]$ hält, geht $M_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $M_w[\epsilon]$ nicht hält, hält $M_{f(w)}$.

(g) Behauptung: $\mathcal{H}_{\Sigma^*} \leq \mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{H}_{\Sigma^*} \coloneqq \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ M_w[x]{\downarrow}\}$.

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht, dann nichtdeterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $M_w[x]$ simuliert.

Lösungsskizze.

(a) Richtig: die Funktion ist total, korrekt und berechenbar, da das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken berechenbar ist (z.B. mit CYK).

(b) Falsch: Falls $x \notin A$ gilt $f(x) \in A \cup \{x\}$.

(c) Falsch: f ist undefiniert auf $\{0,1\}^* \setminus \mathcal{H}_0 \neq \emptyset$ und somit nicht total.

(d) Falsch: f ist unberechenbar, da $\mathcal{H}_0$ unentscheidbar ist und somit $\chi_{\mathcal{H}_0}$ unberechenbar ist.

(e) Falsch: f bildet auf Kodierungen von Turingmaschinen ab, die immer terminieren. Da $a \notin A$, aber $f(a) \in \mathcal{H}_0$, erfüllt die Funktion f nicht die Definition einer Reduktion.

(f) Falsch: f ist nicht wohldefiniert. Wenn $M_{f(w)}$ die Berechnung von $M_w[\epsilon]$ simuliert und $M_w[\epsilon]$ nicht hält, dann hält definitiv $M_{f(w)}$ auch nicht.

(g) Falsch: Sei w die Kodierung einer TM mit $M_w[\epsilon]{\downarrow}$ und $M_w[0]{\uparrow}$. Dann gilt $w \notin \mathcal{H}_{\Sigma^*}$ und $f(w) \in \mathcal{H}_0$.

Individualaufgabe Ü11.4. (H_{NEQ})

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar zu prüfen, ob für zwei als Eingabe gegebene Turingmaschinen die eine auf allen Eingaben genau dann hält, wenn die andere nicht hält. Formaler: Zeigen Sie, die Menge

$$\mathcal{H}_{NEQ} \coloneqq \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w_1}[x]{\downarrow} \iff \neg M_{w_2}[x]{\downarrow}\}$$

ist unentscheidbar.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

Wir reduzieren das Halteproblem auf leerem Band $\mathcal{H}_0$ auf $\mathcal{H}_{NEQ}$. Dabei gilt zu beachten, dass die Reduktion total, berechenbar und korrekt sein muss.

Reduktion von $\mathcal{H}_0$: Sei $w_\perp$ die Kodierung einer Turingmaschine, die auf keiner Eingabe hält. Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig. Wir berechnen zunächst die Kodierung w' einer Turingmaschine, die bei jeder Eingabe das Band löscht und dann $M_w[\epsilon]$ ausführt. Anschließend geben wir $w'\#w_\perp$ zurück.

Die Reduktion ist total: Für jede Eingabe w wird die Ausgabe $w'\#w_\perp$ erzeugt.

Die Reduktion ist berechenbar: Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turingmaschinen sind berechenbar. Außerdem kann eine TM alle Zeichen auf dem Band, die nicht dem Leerzeichen entsprechen, durch geeignete Übergänge anfangs überschreiben.

Die Reduktion ist korrekt:

$$\begin{aligned}
w \in \mathcal{H}_0 &\iff M_w[\epsilon]{\downarrow} && \text{(Def. } \mathcal{H}_0\text{)}\\
&\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]{\downarrow} && (M_{w'} \text{ führt immer } M_w[\epsilon] \text{ aus})\\
&\iff \forall x \in \Sigma^*.(M_{w'}[x]{\downarrow} \text{ und } \neg M_{w_\perp}[x]{\downarrow}) && (M_{w_\perp} \text{ hält nie})\\
&\iff w'\#w_\perp \in \mathcal{H}_{NEQ} && \text{(Def. } \mathcal{H}_{NEQ}\text{)}
\end{aligned}$$

□

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü11.5. (*Reduktion*)

Erinnerung: $\mathcal{H} := \{w\#x : w, x \in \{0,1\}^*, M_w[x]{\downarrow}\}$ (*allgemeines Halteproblem*) und $\mathcal{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]{\downarrow}\}$ (*Halteproblem auf leerem Band*)

(a) Sei $\mathcal{H}_{uvu} := \{w\#u\#v : w, u, v \in \{0,1\}^*, M_w[uvu]{\downarrow}\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{uvu}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_{uvu}$.

(b) Sei $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* :\ M_w[x]{\downarrow}\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H}_0 \leq \mathcal{H}_{\Sigma^*}$.

Lösungsskizze.

(a) Wir reduzieren das allgemeine Halteproblem $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_{uvu}$. Dabei gilt zu beachten, dass die Reduktion total, berechenbar und korrekt sein muss.

Reduktion von $\mathcal{H}$:
Für $w\#x$ geben wir $w\#\#x$ zurück und für andere Eingaben ein beliebiges $v \notin \mathcal{H}$, z.B. ϵ.

Die Reduktion ist total:
Für jede Eingabe wird eine Ausgabe erzeugt (insbesondere, wenn die Eingabe nicht von der Form $w\#x$ ist!).

Die Reduktion ist berechenbar:
Es gibt eine TM, die nach dem Trennzeichen (#) ein weiteres Trennzeichen einfügt und alle anderen Zeichen danach um eins nach rechts verschiebt.

Die Reduktion ist korrekt:

$$\begin{aligned} w\#x \in \mathcal{H} &\iff M_w[x]{\downarrow} && \text{(Def. } \mathcal{H}\text{)} \\ &\iff M_w[\epsilon x \epsilon]{\downarrow} \\ &\iff w\#\#x \in \mathcal{H}_{uvu} && \text{(Def. } \mathcal{H}_{uvu}\text{)} \end{aligned}$$

$\square$

(b) Wir reduzieren das allgemeine Halteproblem auf leerem Band $\mathcal{H}_0$ auf $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$. Dabei gilt zu beachten, dass die Reduktion total, berechenbar und korrekt sein muss.

Reduktion von $\mathcal{H}$:
Wir berechnen die Kodierung w' einer TM, die zuerst die Eingabe löscht und dann M_w simuliert. Wir geben w' zurück.

Die Reduktion ist total:
Für jede Eingabe w wird die Ausgabe w' erzeugt.

Die Reduktion ist berechenbar:
Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turingmaschinen sind berechenbar. Außerdem kann eine TM alle Zeichen auf dem Band, die nicht dem Leerzeichen entsprechen, durch geeignete Übergänge anfangs überschreiben.

Die Reduktion ist korrekt:

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{H}_0 &\iff M_w[\epsilon]{\downarrow} && \text{(Def. } \mathcal{H}_0\text{)} \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]{\downarrow} && (M_{w'} \text{ führt stets } M_w \text{ auf leerem Band aus}) \\ &\iff w' \in \mathcal{H}_{\Sigma^*} && \text{(Def. } \mathcal{H}_{\Sigma^*}\text{)} \end{aligned}$$

$\square$

Übungsaufgabe Ü11.6. (*Allgemeine Reduktion*)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^* : A \leq \Sigma^*$

(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^* : A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$

(c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

Lösungsskizze.

(a) Falsch. Sei $A = \emptyset$. Dann muss für eine Reduktionsfunktion f gelten: $\forall x \notin A.\ f(x) \notin \Sigma^*$. Eine solche Funktion f existiert aber nicht, da stets $f(x) \in \Sigma^*$ gilt.

(b) Wahr. Es gelte $A \leq B$. Dann existiert ein totales und berechenbares f mit: $x \in A$ genau dann wenn $f(x) \in B$ für alle $x \in \Sigma^*$. Somit gilt auch: $x \in \overline{A}$ genau dann wenn $f(x) \in \overline{B}$ für alle $x \in \Sigma^*$. Daraus folgt dann $\overline{A} \leq \overline{B}$. Die Rückrichtung folgt analog.

(c) Wahr. Seien f und g Reduktionen von $A \leq B$ und $B \leq C$. Sei nun $h(x) = g(f(x))$. h ist total und berechenbar, da f und g total und berechenbar sind. Sei $x \in A$ beliebig. Dann gilt $f(x) \in B$ und $h(x) = g(f(x)) \in C$. Sei nun $x \notin A$ beliebig. Dann gilt $f(x) \notin B$ und damit $h(x) = g(f(x)) \notin C$. Somit ist h eine geeignete Reduktion.

Übungsaufgabe Ü11.7. (*Rice*)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie für (a–d), ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \varphi_w(n) = n \cdot (n+23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0. \ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$. Erinnerung: $w_p \in \Sigma$ bezeichnet den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w.

Lösungsskizze.

(a) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge f^{-1}(1) \text{ ist regulär}\}$. Sei nun g, h mit $g(w) := 1$ und

$$h(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \geq 0. \ w = 0^i 1^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zwei berechenbare Funktionen. Dann gilt $g \in \mathcal{F}$ und $h \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Damit folgt aus dem Satz von Rice, dass L_1 unentscheidbar ist.

(b) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ f(n) = n \cdot (n+23) + 42\}$. Dann gilt für die konstante Nullfunktion g, dass $g \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Weiterhin ist $\mathcal{F}$ auch nicht leer, da das Polynom in der Definition berechenbar ist. Somit ist nach Satz von Rice L_2 unentscheidbar.

(c) Die Menge ist unentscheidbar, jedoch ist der Satz von Rice nicht anwendbar. Für den Satz von Rice müsste es eine nicht-triviale Menge $\mathcal{F}$ an berechenbaren Funktionen geben, sodass $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in \mathcal{F}\}$. Das Problem ist nun, das zwei Turingmaschinenkodierungen verschiedener Längen existieren können, sodass die Maschinen dieselbe Funktion berechnen, die eine Kodierung die Bedingung erfüllt, die andere jedoch nicht. Formaler:

Je nach Kodierungsfunktion können $v, w \in \{0,1\}^*$ mit $|v| \neq |w|$ existieren, sodass $\varphi_v = \varphi_w =: g$, $g(x) = |w|$ für ein $x \in \Sigma^*$ und $g(x) \neq |v|$ für alle $x \in \Sigma^*$. Somit ist zugleich $g = \varphi_w \notin \mathcal{F}$ und $g = \varphi_v \in \mathcal{F}$, und somit ist $\mathcal{F}$ nicht definierbar.

Der Beweis für die Unentscheidbarkeit kann durch Reduktion von $\overline{\mathcal{H}_0}$ erfolgen. Idee: Länge der TM ($|w|$) auf zweitem Band speichern; Eingabe löschen; TM $M_w[\epsilon]$ simulieren; erstes Band löschen; $|w|$ ausgeben

(d) L_4 ist entscheidbar. Eine TM kann alle Primzahlen kleiner $|w|$ berechnen und an diesen Stellen in w prüfen, ob $w_p = 0$ gilt.